Übungsblatt 03

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 10. Mai – 14. Mai 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 7. Mai 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Punktmengen in $\mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind, und berechnen Sie dort – falls nicht leer – die Ableitung $f'(z)$.

1. $f(z) = \bar{z}$, (Prüfen Sie hier direkt, ob der definierende Limes für $f'(z_0)$ existiert.)
2. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ und $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, (wobei $f(0) := \lim_{z \to 0} f(z)$ falls der Grenzwert in $\mathbb{C}$ existiert)
3. $\frac{2z-1}{z^3-3z^2+2z}$,
4. $f(z) = x^4 + 4ix^3y + 6x^2y^2 + 4ixy^3 + y^4$.

Aufgabe 2 Gegeben sei eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, mit U offen, die an $z_0 \in U$ komplex differenzierbar sei und $f'(z_0) \neq 0$. Als reell differenzierbare Funktion existiert für f in einer Umgebung D von $w_0 = f(z_0)$ eine reell differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1}$. Zeigen Sie, dass $g(w)$ im Punkt $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar ist und für die Ableitung gilt:

$$g'(w_0) = 1/f'(z_0) \qquad \text{für } w_0 = f(z_0).$$

Aufgabe 3 Einer invertierbaren komplexen 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

kann eine holomorphe Abbildungen

$$f_A : \begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \to & \bar{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

zugeordnet werden. In $\bar{\mathbb{C}}$ wurde ein Punkt im unendlichen hinzugefügt, $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Abbildung wird wie folgt erweitert: Für $c \neq 0$ gilt $f_A(\infty) = a/c$ und $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$, und für $c = 0$ gilt $f_A(\infty) = \infty$. Holomorphe Abbildungen dieser Form werden Möbiustransformationen genannt.

- Zeigen Sie, dass die Abbildung $A \mapsto f_A$ ein Gruppenhomomorphismus von der (nichtkommutativen) Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen in die Gruppe der Möbiustransformationen ist. In letzterer ist das Produkt die Komposition $f_A \circ f_B$.
- Zeigen Sie, dass eine Multiplikation von A mit einer nicht-verschwindenden komplexen Zahl λ die zugeordnete Möbiustransformation nicht ändert.

Aufgabe 4 Injektive, holomorphe Abbildungen $f : U \to \mathbb{C}$, mit U offen und $f'(z) \neq 0$ in U sind winkel- und orientierungstreu, d.h. konform. Verifizieren sie dies anhand der Möbiustransformationen aus Aufgabe 3 ($c \neq 0$):

(a) Zeigen Sie, dass die im Punkt $-d/c$ zentrierten Kreise durch die Abbildung f_A wieder in Kreise abgebildet werden.

(b) Zeigen Sie, dass Geraden durch den Punkt $-d/c$ in Geraden abgebildet werden.

Eine spezielle Möbiustransformation, die Cayley Transformation, $f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ mit

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

bildet die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$ in die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ab.

- Zeigen Sie, dass der Rand von $\mathbb{H}$ tatsächlich auf den Rand von $\mathbb{E}$ abgebildet wird.
- Illustrieren Sie die Punkte (a) und (b) anhand der Cayley Transformation in der Gaußschen Zahlenebene.