# Übungsblatt 02

## Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 3. Mai – 7. Mai 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 30. April 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

**Aufgabe 1**

- Benützen Sie die Reihenentwicklungen für die Exponentialfunktion, den Sinus und den Cosinus, um die Eulerformeln

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

  zu zeigen.

- Verwenden Sie die Eulerformeln, um die Relation

$$r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = re^{i\varphi}$$

  in Polarkoordinaten, mit dem Betrag $r = |z| \in [0, \infty)$ und dem Argument $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$, zu zeigen.

- Zeigen Sie, dass bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polardarstellung die Beträge, $|z| \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, multipliziert und die Argumente, $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, addiert werden.

**Aufgabe 2** Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen (i) in die Form $z = x + iy$, mit $x$ und $y$ reell, und (ii) in Polarform $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$. Stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $i^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$.
3. $\left(\frac{2}{1-\sqrt{3}i}\right)^n$ für $n = 2, 3, \ldots$.
4. $\frac{x+iy}{y-ix}$, zunächst für $x = 3, y = 4$, dann für allgemeine $x, y \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3** Stellen Sie folgende Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ für $z_0 = 1 + i$ und $r = 1$.
2. $T_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg(z) < 2\pi/6\}$.
3. Das Bild $f(T_6)$ unter der Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^6$.
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\bar{c}z) > 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\bar{c}z) = 0\}$ für eine komplexe Zahl $c \neq 0$ ihrer Wahl.

5. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = |z - z_1|\}$ für $z_0 \neq z_1$.

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen, und stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene dar. (Hinweise: Benützen Sie Polarkoordinaten.)

1. $z^n = 1$ für eine ganze Zahl $n \geq 1$ (Darstellung für ein $n \geq 2$ Ihrer Wahl).
2. $e^z = 1$.
3. $e^z = w$ für gegebenes beliebiges $w \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Was passiert bei $w = 0$?

Sind die Umkehrfunktionen von $f(z) = z^n$ und $g(z) = e^z$ auf $\mathbb{C}$ wohl-definiert?