Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise Blatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte). 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie, dass A nilpotent ist, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$.

2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Zeigen Sie, dass A genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von A ist.

Lösung 1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^5 = 0\,.$$

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Dann zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, d.h., A ist trigonalisierbar und es existiert eine Basis $\mathcal{B}$, so dass die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ bezüglich dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sei also $A^k = 0$, dann ist

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Also ist $\lambda_i^k = 0$ für alle i, also $\lambda_i = 0$ ist einziger Eigenwert von A.
Umgekehrt, wenn $\lambda_i = 0$ der einzige Eigenwert ist, dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

also $B_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Wir beweisen mit vollständiger Induktion, dass A^k erst auf der $k$ten Nebendiagonalen von Null verschiedene Einträge haben kann, d.h. $A^k_{ij} = 0$ für $j \leq i + k - 1$.
Induktionsverankerung (k=2):

$$B^2_{ij} = \sum_l \underbrace{B_{il}}_{=0, i \geq l} B_{lj} = \sum_{l \geq i+1} B_{il} \underbrace{B_{lj}}_{=0, l \geq j} = 0, \text{ falls } j \leq i + 1 = i + k - 1\,.$$

Induktionsannahme:

$$B^k_{ij} = 0, j \leq i + k - 1\,.$$

Induktionsschritt:

$$(B^{k+1})_{ij} = \sum_l \underbrace{B_{il}}_{=0, i \geq l} B_{lj} = \sum_{l \geq i+1} B_{il} \underbrace{B^k_{lj}}_{=0, l+k-1 \geq j} = 0 \text{ für } j \leq i + k = i + (k + 1) - 1\,.$$

Damit haben wir die Induktionsbehauptung bewiesen. Also gilt:

$$A^n_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j\,.$$

Aufgabe 2 (**4 Punkte**). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
2. Sei
$$W_i = \ker(A - \lambda I_5)^i \quad \text{und} \quad U_i = W_1 \cap \operatorname{im}(A - \lambda I_5)^i$$
für $i = 1, \ldots, m$, $m = \max\{i \mid 0 \neq (A - \lambda I_5)^i\}$ und λ Eigenwert von A. Finden Sie Basen $\mathcal{B}_i = \{w_1, \ldots, w_{l_i}\}$ von U_i, so dass $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{i-1}$ für alle $i = 1, \ldots, m$.
3. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^5$, so dass $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ und
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
wobei λ_i Eigenwerte von A sind.

Lösung 2. Der einzige Eigenwert ist $\lambda = 2$ (Entwicklung nach der dritten Zeile, Entwicklung nach der zweiten Spalte, Entwicklung nach der zweiten Zeile). Der Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda = 2$ berechnet sich zu

$$W_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiter ist

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A-2)^3 = 0\,,$$

also $m = 2$. Außerdem ist

$$U_2 = W_1 \cap \mathrm{Im}\,(A-2)^2 = W_1 \cap \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

also sei $\mathcal{B}_2 = \{w_1\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Genauso

$$U_1 = W_1 \cap \mathrm{im}(A-2) = W_1 \cap \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},$$

so dass

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1, w_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis von U_1 ist mit $\mathcal{B}_2 \subset B_1$. Da $w_1 \in \mathrm{im}(A-2)^2 \subset \mathrm{im}(A-2)$ existiert ein $w_1^1 \in \mathrm{im}(A-2)$ mit $(A-2)w_1^1 = w_1$, zum Beispiel

$$w_1^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Da $w_1^1 \in \mathrm{im}(A-2)$ existiert w_1^2 mit $(A-2)w_1^2 = w_1^1$, zum Beispiel

$$w_1^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Genauso für $w_2 \in \mathrm{im}(A-2)$:

$$w_2^1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

erfüllt $(A-2)w_2^1 = w_2$. Insgesamt haben wir also

$$Aw_1 = 2w_1, \quad Aw_1^1 = 2w_1^1 + w_1, \quad Aw_1^2 = 2w_1^2 + w_1$$

sowie

$$Aw_2 = 2w_2, \quad Aw_2^1 = 2w_2^1 + w_2$$

also hat die Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{w_1, w_1^1, w_1^2, w_2, w_2^1\}$ die gewünschte Form.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so heißt das normierte Polynom kleinsten Grades $m_f \in K[x]\backslash\{0\}$ mit $m_f(f) = 0$ (Nullabbildung) *Minimalpolynom* von f.

Anmerkung: Ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{m} p_i x^i \in K[x]$ vom Grad m heißt normiert, falls $p_m = 1$ gilt.

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ($n = \dim(V)$) über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Bestätigen Sie folgendes Verfahren zur Bestimmung des Minimalpolynoms von f:

1. Gegeben sei $v_1 \in V\backslash\{0\}$. Es sei r_1 die kleinste Zahl, so dass die Vektoren $\{v_1, f(v_1), \ldots, f^{r_1}(v_1)\}$ linear abhängig sind. Zeigen Sie:

   $$U_1 := \mathrm{Span}\{v_1, f(v_1), \ldots, f^{r_1-1}(v_1)\}$$

   ist invariant bezüglich f.

2. Nach Wahl von r_1 existieren Zahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r_1} \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, für die

   $$\sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k f^k(v_1) = 0$$

   ist. Sei dann $p_1(x) = \sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k x^k \in K[x]\backslash\{0\}$. Zeigen Sie: $p_1(x)$ ist ein Polynom vom Grad r_1 und nach Normierung (Multiplikation mit $\frac{1}{\alpha_{r_1}}$) erhält man das Minimalpolynom m_{f_1} von $f_1 = f|_{U_1}$.

3. Ist $U_1 = V$, so ist man fertig. Sonst existiert ein Vektor $v_2 \in V\backslash U_1$, für den das gleiche Verfahren angewandt wird: $U_2 := \mathrm{Span}\{v_2, f(v_2), \ldots, f^{r_2-1}(v_2)\}$ ist ein bezüglich f invarianter Unterraum von V. Das Minimalpolynom m_{f_2} wird entsprechend definiert.
   Zeigen Sie: Setzt man das Verfahren fort, bis

   $$V = U_1 + \cdots + U_r$$

   für ein $r \in \mathbb{N}$, so ist das normierte kleinste gemeinsame Vielfache von $m_{f_1}, \ldots, m_{f_r}$ das Minimalpolynom m_f von f.

Lösung 3. Zu a): Offensichtlich ist $f(f^k(v_1)) \in U_1$ für $k = 0, \ldots, r_1 - 2$. $f(f^{r_1-1}(v_1)) = f^{r_1}(v_1)$ ist als linear Kombination von $v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1)$ darstellbar, da $\{v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1)\}$ linear unabhängig ist und $\{v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1), f^{r_1}(v_1)\}$ linear abhängig ist. Also bildet f die Basis $\{v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1)\}$ von U_1 nach U_1 ab, womit $f(U_1) \subseteq U_1$ folgt.

Zu b): α_r ist nicht 0, da sonst $\sum_{k=0}^{r_1-1} \alpha_k f^k(v_1) = 0$ ist und wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1)\}$ dann $\alpha_i = 0 \, \forall i = 0, \ldots, r_1$ wäre, also hat $p_1(x)$ den Grad r_1. Außerdem ist

$$p_1(f)(f^i(v_1)) = (\sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k f^k)(f^i(v_1)) = \sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k f^{k+i}(v_1) = (f^i)(\sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k f^k(v_1)) = 0$$

für $i = 0, \ldots, r_1 - 1$, womit $p_1(f)$ eine Basis von U_1 und damit auch U_1 auf 0 abbildet. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \ldots, f^{r_1-1}(v_1)\}$ kann es auch kein Polynom $q(x) \in K[x]\backslash\{0\}$ kleineren Grades geben mit $q(f)(v_1) = 0$.

Zu c): Dies zeigt man mit Induktion über r, wobei der Induktionanfang $r = 1$ trivial ist. Sind $U_1, \ldots, U_{r-1}$ invariant unter f, so ist auch $V' = U_1 + \cdots + U_{r-1}$ invariant unter f

$(f(u_1 + \cdots + u_{r-1}) = f(u_1) + \cdots + f(u_{r-1}) \in U_1 + \cdots + U_{r-1})$. Nach Induktionsannahme ist das Minimalpolynom $m_{f|_{V'}}$ von $f|_{V'}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome $m_{f_1}, \ldots, m_{f_{r-1}}$ von $f_1, \ldots, f_{r-1}$. Nach der Präsenzübung
ist dann das Minimalpolynom m_f von f das kleinste gemeinsame Vielfache von $m_{f|_{V'}}$ und m_{f_r}, welches das kleinste gemeinsame Vielfache von $m_{f_1}, \ldots, m_{f_r}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$7\varphi^2 - \varphi^6 = \varphi + 6\varphi^2 - \varphi^3 = 6\,\mathrm{Id}_V\,.$$

Zeigen Sie: Es gibt Untervektorräume X, Y von V mit:

$$V = X \oplus Y, \qquad \varphi(x) = x \text{ für alle } x \in X, \qquad \varphi(y) = -y \text{ für alle } y \in Y.$$

Schreiben Sie die Projektion $P : X \oplus Y \to V,\ x + y \mapsto x$ $(x \in X, y \in Y)$ als Polynom in φ.

Hinweis: Sei $p_1(x) = -x^6 + 7x^2 - 6$ und $p_2(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 6$. Finden Sie Polynome q, r mit

$$p_1 = p_2 q + r\,.$$

Lösung 4. Polynomdivision ergibt $q(x) = x^3 + 6x^2 + 37x + 222$ und $r(x) = -1326(x^2 - 1)$, und also ist

$$-\varphi^6 + 7\varphi^2 - 6\,\mathrm{Id}_V = (-\varphi^3 + 6\varphi^2 + \varphi - 6\,\mathrm{Id}_V)(\varphi^3 + 6\varphi^2 + 37\varphi + 222\,\mathrm{Id}_V) - 1326(\varphi^2 - \mathrm{Id}_V)\,.$$

Damit folgt aus

$$-\varphi^6 + 7\varphi^2 - 6\,\mathrm{Id}_V = -\varphi^3 + 6\varphi^2 + \varphi - 6\,\mathrm{Id}_V = 0$$

auch

$$-(\varphi^2 - \mathrm{Id}_V) = (\varphi + \mathrm{Id}_V)(-\varphi + \mathrm{Id}_V) = 0$$

Behauptung: Setzt man $X := \{\frac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Id}_V)(v) \mid v \in V\}$ und $Y := \{\frac{1}{2}(-\varphi + \mathrm{Id}_V)(v) \mid v \in V\}$ so erfüllen diese alle Bedingungen!

Da $v = \frac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Id}_V)(v) + \frac{1}{2}(-\varphi + \mathrm{Id}_V)(v)\ \forall v \in V$ gilt, ist $V = X + Y$.
Außerdem gilt für beliebiges $x = (\varphi + \mathrm{Id}_V)(v) \in X$

$$(-\varphi + \mathrm{Id}_V)(x) = ((-\varphi + \mathrm{Id}_V)(\varphi + \mathrm{Id}_V))(v) = 0,$$

also $\varphi(x) = Id_V(x) = x$.
Für beliebiges $y = (-\varphi + \mathrm{Id}_V)(v) \in Y$ erhält man analog $\varphi(y) = -\mathrm{Id}_V(y) = -y$.
Ist $v \in X \cap Y$, so ist $v = \varphi(v) = -v$, also $v = 0$, womit dann auch $V = X \oplus Y$ gilt.
Für P ergibt sich $P = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_V$.