Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 9

(Satz von Cayley-Hamilton, Jordan-Normalform)

Abgabe: bis Montag, den 2. 7., 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie, dass A nilpotent ist, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$.

2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Zeigen Sie, dass A genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von A ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

2. Sei
$$W_i = \ker(A - \lambda I_5)^i \quad \text{und} \quad U_i = W_1 \cap \mathrm{im}(A - \lambda I_5)^i$$
für $i = 1, \ldots, m$, $m = \max\{i \mid 0 \neq (A - \lambda I_5)^i\}$ und λ Eigenwert von A. Finden Sie Basen $\mathcal{B}_i = \{w_1, \ldots, w_{l_i}\}$ von U_i, so dass $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{i-1}$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

3. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^5$, so dass $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ und
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$
wobei λ_i Eigenwerte von A sind.

bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte). Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so heißt das normierte Polynom kleinsten Grades $m_f \in K[x]\backslash\{0\}$ mit $m_f(f) = 0$ (Nullabbildung) *Minimalpolynom* von f.

Anmerkung: Ein Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} p_i x^i \in K[x]$ vom Grad m heißt normiert, falls $p_m = 1$ gilt.

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ($n = \dim(V)$) über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Bestätigen Sie folgendes Verfahren zur Bestimmung des Minimalpolynoms von f:

1. Gegeben sei $v_1 \in V\backslash\{0\}$. Es sei r_1 die kleinste Zahl, so dass die Vektoren $\{v_1, f(v_1), \dots, f^{r_1}(v_1)\}$ linear abhängig sind. Zeigen Sie:
$$U_1 := \mathrm{Span}\{v_1, f(v_1), \dots, f^{r_1-1}(v_1)\}$$
ist invariant bezüglich f.

2. Nach Wahl von r_1 existieren Zahlen $\alpha_0, \dots, \alpha_{r_1} \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, für die
$$\sum_{k=0}^{r_1} \alpha_k f^k(v_1) = 0$$
ist. Sei dann $p_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{r_1} \alpha_k x^k \in K[x]\backslash\{0\}$. Zeigen Sie: $p_1(x)$ ist ein Polynom vom Grad r_1 und nach Normierung (Multiplikation mit $\frac{1}{\alpha_{r_1}}$) erhält man das Minimalpolynom m_{f_1} von $f_1 = f|_{U_1}$.

3. Ist $U_1 = V$, so ist man fertig. Sonst existiert ein Vektor $v_2 \in V\backslash U_1$, für den das gleiche Verfahren angewandt wird: $U_2 := \mathrm{Span}\{v_2, f(v_2), \dots, f^{r_2-1}(v_2)\}$ ist ein bezüglich f invarianter Unterraum von V. Das Minimalpolynom m_{f_2} wird entsprechend definiert.
Zeigen Sie: Setzt man das Verfahren fort, bis
$$V = U_1 + \cdots + U_r$$
für ein $r \in \mathbb{N}$, so ist das normierte kleinste gemeinsame Vielfache von $m_{f_1}, \dots, m_{f_r}$ das Minimalpolynom m_f von f.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit
$$7\varphi^2 - \varphi^6 = \varphi + 6\varphi^2 - \varphi^3 = 6\,\mathrm{Id}_V\,.$$
Zeigen Sie: Es gibt Untervektorräume X, Y von V mit:
$$V = X \oplus Y, \qquad \varphi(x) = x \text{ für alle } x \in X, \qquad \varphi(y) = -y \text{ für alle } y \in Y.$$
Schreiben Sie die Projektion $P : X \oplus Y \to V,\ x + y \mapsto x\ (x \in X, y \in Y)$ als Polynom in φ.

Hinweis: Sei $p_1(x) = -x^6 + 7x^2 - 6$ und $p_2(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 6$. Finden Sie Polynome q, r mit
$$p_1 = p_2 q + r\,.$$