Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungsvorschläge Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Basis des K-Vektorraumes V. Für $i = 1, \dots, n$, definiere man

$$V_i = \mathrm{Span}_K(v_1, \dots, v_i)\,.$$

Zeigen Sie: Die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ ist genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $F(V_i) \subset V_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lösung 1. Sei $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.
Da $F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ erhalten wir genau dann $a_{ij} = 0, i > j$, wenn $F(v_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} v_i \in V_j$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 17 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

Bestimmen Sie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\ker((A - \lambda I_6)^n)\,.$$

Lösung 2. Für $\lambda \neq 17$ ist $\det((A - \lambda\,\mathrm{Id})^n) = ((17 - \lambda)^6)^n \neq 0$ für alle n, also ist $\ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})^n = \{0\}$.
Für $\lambda = 17$ ist

$$(A - 17\,\mathrm{Id}) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also ist

$$\ker(A - 17\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Span}\{e_1, e_4, e_6\}\,.$$

Da

$$(A - 17\,\mathrm{Id})^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist
$$\ker(A - 17\,\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$$
und $(A - 17\,\mathrm{Id})^3 = (A - 17\,\mathrm{Id})^k = 0$ gibt $\ker(A - 17\,\mathrm{Id})^k = \mathbb{R}^6$ für alle $k \geq 3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ eine für f invariante direkte Zerlegung von V in Untervektorräume $U_1, U_2, \ldots, U_r$ von V, d.h. $f|_{U_i} \in \mathrm{End}(U_i) = \mathrm{Hom}_K(U_i, U_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, r$. Man zeige für die charakteristischen Polynome p_f von f, bzw. $p_{f|_{U_i}}$ von $f|_{U_i}$
$$p_f = \prod_{i=1}^{r} p_{f|_{U_i}}.$$

Lösung 3. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $B_i = \{u_1^{(i)}, \ldots, u_{k_i}^{(i)}\}$ Basis von U_i ($k_i = \dim(U_i)$).
$\Rightarrow B = \bigcup\limits_{i=1}^{r} B_i$ ist eine Basis von V ($n = \dim(V) = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i$).

Sei $M_i := M_{B_i}^{B_i}(f|_{U_i}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}^{(i)} & \cdots & m_{1,k_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k_i,1}^{(i)} & \cdots & m_{k_i,k_i}^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(k_i \times k_i)$ für $i = 1, \ldots, r$.

Dann ist für $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k_i$
$$f(u_j^{(i)}) = f|_{U_i}(u_j^{(i)}) = \sum_{l=1}^{k_i} m_{l,j}^{(i)} u_l^{(i)},$$
also
$$M := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_r \end{pmatrix},$$
also
$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det(f - \lambda id) = \det(M - \lambda I_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} M_1 - \lambda I_{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 - \lambda I_{k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_r - \lambda I_{k_r} \end{pmatrix} \\ &= \det(M_1 - \lambda I_{k_1}) \det(M_2 - \lambda I_{k_2}) \cdots \det(M_r - \lambda I_{k_r}) \\ &= \prod_{i=1}^{r} p_{f|_{U_i}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie:

1. Die Menge
$$\mathcal{L} = \{y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar }, y' = Ay\}$$

der Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$–Vektorraumes der differenzierbaren Funktionen

$$\mathcal{D} = \{y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\}\,.$$

2. Ist $y(t) = e^{\lambda t} v \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$, eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung
$$y'(t) = Ay(t)\,,$$
dann ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

3. Die Lösungen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbb{R}^n$, sind genau dann linear unabhängig in $\mathcal{L}$, wenn $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind.

Lösung 4. Seien $y, \tilde{y} \in \mathcal{L}$. Dann gilt

$$(y + \tilde{y})' = y' + \tilde{y}' = Ay + A\tilde{y} = A(y + \tilde{y})$$

sowie
$$(\lambda y)' = \lambda y' = \lambda Ay = A(\lambda y)\,.$$
Außerdem ist $y = 0 \in \mathcal{L}$ also ist $\mathcal{L}$ ein Unterraum von $\mathcal{D}$.

Sei $y = e^{t\lambda} v$, dann gilt genau dann
$$y' = \lambda e^{t\lambda} v = Ay\,,$$
wenn $\lambda e^{t\lambda} v = e^{t\lambda} Av$. Da $e^{t\lambda} \neq 0$, ist das äquivalent zu $Av = \lambda v$. Da y eine nichtverschwindende Lösung ist, ist $v \neq 0$ also ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Seien (v_i) linear unabhängig und
$$\sum \mu_i y_i(t) = 0\,.$$
Dann ist insbesondere für $t = 0$ auch

$$0 = \sum \mu_i e^{0\lambda_i} v_i = \sum \mu_i v_i$$

und da v_i linear unabhängig sind, ist $\mu_i = 0$. Also sind (y_i) linear unabhängig.

Umgekehrt können (v_i) nur linear abhängig sein, wenn es $i, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j_m$, gibt mit $\lambda_i = \lambda_{j_m}$ und
$$v_i = \sum \mu_m v_{j_m}\,.$$
Dies folgt, da (v_i) Eigenvektoren sind, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Dann ist aber

$$y_i = e^{t\lambda_i} v_i = e^{t\lambda_i} \sum \mu_{j_m} v_{j_m} = \sum \mu_{j_m} y_{j_m}$$

und (y_i) sind ebenfalls linear abhängig.