



Universität Augsburg

Institut für
Mathematik

PROF. DR. KATRIN WENDLAND
PRIV. DOZ. DR. KATRIN LESCHKE
CHRISTOPH TINKL
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 8

(Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit)

Abgabe: bis Montag, den 25.6., 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F \in \text{End}_K(V)$ und $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Basis des K -Vektorraumes V . Für $i = 1, \dots, n$, definiere man

$$V_i = \text{Span}_K(v_1, \dots, v_i).$$

Zeigen Sie: Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ ist genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $F(V_i) \subset V_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 17 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array} \right)$$

Bestimmen Sie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\ker((A - \lambda I_6)^n).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$ eine für f invariante direkte Zerlegung von V in Untervektorräume $U_1, U_2, \dots, U_r$ von V , d.h. $f|_{U_i} \in \text{End}(U_i) = \text{Hom}_K(U_i, U_i)$ für $i = 1, 2, \dots, r$. Man zeige für die charakteristischen Polynome p_f von f , bzw. $p_{f|_{U_i}}$ von $f|_{U_i}$

$$p_f = \prod_{i=1}^r p_{f|_{U_i}}.$$

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie:

1. Die Menge

$$\mathcal{L} = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar, } y' = Ay \right\}$$

der Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes der differenzierbaren Funktionen

$$\mathcal{D} = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar} \right\}.$$

2. Ist $y(t) = e^{\lambda t} v \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t),$$

dann ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

3. Die Lösungen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, sind genau dann linear unabhängig in $\mathcal{L}$, wenn $(v_1, \dots, v_k)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind.