Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte). Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ sei

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\,.$$

Zeigen Sie:

1. Ist $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix, dann ist

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. Ist A diagonalisierbar, so gilt

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}\,.$$

Lösung 1. Da

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, ist

$$e^D = \sum \frac{D^k}{k!} = \sum \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar, dann existiert eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ und ein invertierbares P mit $A = PDP^{-1}$. Daher ist $A^n = PD^nP^{-1}$ und $e^A = Pe^DP^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \det e^A &= \det(Pe^DP^{-1}) = \det P \det e^D \det P^{-1} = \det e^D \\ &= e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \\ &= e^{\operatorname{tr} D} = e^{\operatorname{tr}(PDP^{-1})} = e^{\operatorname{tr} A}, \end{aligned}$$

da $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ und damit $\operatorname{tr}(PDP^{-1}) = \operatorname{tr}(PP^{-1}D) = \operatorname{tr} D$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. geben Sie Diagonalmatrizen D_i und invertierbare Matrizen P_i an mit $A_i = P_iD_iP_i^{-1}$, und verifizieren Sie, dass $A_i = P_iD_iP_i^{-1}$ gilt.

Lösung 2.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -i & i & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & i & -i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie:

Ist $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\bar{\lambda} = x - iy$ ein Eigenwert von A.

Folgern Sie, dass jede lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Fixgerade hat, dass heißt, es gibt eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^3$ mit $F(G) \subset G$.

Lösung 3. Das charakteristische Polynom einer reellen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ist von der Form $p(\lambda) = (-\lambda)^n + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + a_0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$. Wie bereits in der LA 1 gezeigt, heißt das, dass für $p(\lambda) = 0$ auch

$$p(\bar{\lambda}) = (-\bar{\lambda})^n + a_{n-1}(-\bar{\lambda})^{n-1} + \ldots + a_0 = \overline{(-\lambda)^n + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + a_0} = 0$$

gilt. Also ist $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert, falls λ ein Eigenwert ist.

Sei also $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear. Dann ist das charakteristische Polynom von F gegeben durch

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda_2 + a_1\lambda + a_0$$

und hat mindestens eine reelle Nullstelle λ_0, da komplexe Nullstellen paarweise auftreten. Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor bezüglich λ_0 und $G = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ die Gerade, die von v aufgespannt wird. Dann gilt für alle $w \in G$: $w = v\rho$ mit $\rho \in \mathbb{R}$, und also

$$F(w) = F(v\rho) = F(v)\rho = v\,\underbrace{(\lambda_0\rho)}_{\in\mathbb{R}} \in G\,.$$

Also ist G eine Fixgerade von F.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $A \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$. Zeigen Sie:

1. $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$.
2. $\det(A) = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2))$.

Lösung 4. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist

$$\det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Da $\det A = ad - bc$ sowie $\operatorname{tr} A = a + d$ folgt die erste Behauptung.

Außerdem ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & * \\ * & d^2 + bc \end{pmatrix}\,,$$

so dass

$$(\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2) = (a + d)^2 - (a^2 + d^2 + 2bc) = 2(ad - bc) = 2\det A\,.$$