Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 7

(Diagonalisierbarkeit, Spur)

Abgabe: bis Montag, den 18. 6., 10:00 Uhr.

Erinnerung: Am 13. Juli findet ab 15:30 der Akademische Festtag "25 Jahre Mathematik in Augsburg" statt (im T 1001). Zu dieser Feier sind alle Mathematikstudenten ganz herzlich eingeladen!

Aufgabe 1 (4 Punkte). Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ sei

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Zeigen Sie:

1. Ist $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix, dann ist
$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. Ist A diagonalisierbar, so gilt
$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. geben Sie Diagonalmatrizen D_i und invertierbare Matrizen P_i an mit $A_i = P_i D_i P_i^{-1}$, und verifizieren Sie, dass $A_i = P_i D_i P_i^{-1}$ gilt.

bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie:

Ist $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\bar{\lambda} = x - iy$ ein Eigenwert von A.

Folgern Sie, dass jede lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Fixgerade hat, dass heißt, es gibt eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^3$ mit $F(G) \subset G$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$. Zeigen Sie:

1. $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$.
2. $\det(A) = \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\, A)^2 - \mathrm{tr}(A^2))$.