Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise, Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $F \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $F = \lambda \,\mathrm{Id}$, wenn jeder von Null verschiedene Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von F zum Eigenwert λ ist.

Lösung 1. "$\Longrightarrow$" Falls $F = \lambda \,\mathrm{Id}$, dann ist $Fv = \lambda v$ für alle $v \in V$, also ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor. "$\Longleftarrow$" Für $v \neq 0$ gilt $F(v) = \lambda v = (\lambda \,\mathrm{Id})v$, sowie $F(0) = 0 = \lambda \,\mathrm{Id}(0)$, also gilt $F(v) = \lambda \,\mathrm{Id}(v)$, also ist $F = \lambda \,\mathrm{Id}$.

Die obige Aufgabenstellung war natürlich ein Tippfehler. Hier die Aufgabe, wie sie hätte sein solllen:

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $F \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $F = \lambda \,\mathrm{Id}$, wenn jeder von Null verschiedene Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von F ist.

Lösung 2. "$\Longrightarrow$" Falls $F = \lambda \,\mathrm{Id}$, dann ist $Fv = \lambda v$ für alle $v \in V$, also ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor. "$\Longleftarrow$" Falls $\dim V = 1$, dann ist $F(v) = \lambda v$ für jeden von null verschiedenen Vektor, aber auch $F(0) = 0$, also ist $F = \lambda \,\mathrm{Id}$. Für $\dim V \geq 2$ seien $v, w \neq 0$ linear unabhängig. Da v, w sowie $v + w$ Eigenvektoren sind, existieren $\lambda, \mu, \nu \in K$ mit

$$F(v) = \lambda v, F(w) = \mu w, F(v + w) = \nu(v + w)\,.$$

Da F linear ist, gilt also

$$\nu(v + w) = F(v + w) = \lambda v + \mu w,$$

also

$$(\nu - \lambda)v = (\mu - \nu)w\,.$$

Da (v, w) linear unabhängig und beide $\neq 0$ sind, folgt

$$\nu = \lambda = \mu$$

Mit anderen Worten: Alle Eigenvektoren sind Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ. Da aber eine beliebige Basis (v_i) von V eine Basis aus Eigenvektoren ist, folgt aus $F(v_i) = \lambda v_i$, dass $F = \lambda \,\mathrm{Id}$.

Aufgabe 3. Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit $A = (a_{ij})$ ist die Spur definiert durch

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

1. Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? (Begründung!)
   (a) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1\}$
   (b) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid |\det A| = 1\}$
   (c) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = -1\}$
   (d) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$
2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$? (Begründung!)

(a) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1\}$

(b) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 1\}$

(c) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = -1\}$

(d) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$

Lösung 3. 1. $\{A \mid \det A = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$ ist, wie schon früher gezeigt, eine Gruppe.

$G = \{A \mid |\det A| = 1\}$ ist eine Gruppe, da $I \in G$ und somit $G \neq \emptyset$. Außerdem

$$A, B \in G \implies |\det(AB)| = |\det A||\det B| = 1 \implies AB \in G$$

und

$$A \in G \implies |\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det A|} = 1 \implies A^{-1} \in G\,.$$

$H = \{A \mid \det A = -1\}$ ist keine Gruppe, da $\mathrm{Id} \notin H$.

$H = \{A \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$ ist keine Gruppe, da $\mathrm{Id} \notin H$. Außerdem ist H auch keine Teilmenge von $GL_n(\mathbb{R})$, da die Nullmatrix in H ist, aber natürlich nicht invertierbar ist.

2. $U = \{A \mid \det A = 1\}$ ist kein Untervektorraum, da $0 \notin U$. Genauso für $U = \{A \mid \mathrm{tr}\, A = 1\}, U = \{A \mid \det A = -1\}$.

$U = \{A \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$ ist ein Unterraum:

$$0 \in U \implies U \neq \emptyset.$$

$$A, B \in U \implies \mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B = 0 \implies A+B \in U$$

$$A \in U, \lambda \in \mathbb{R} \implies \mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \lambda\, \mathrm{tr}\, A = 0 \implies \lambda A \in U\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die beiden Endomorphismen $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sowie $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^4$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen

$$M(f) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -9 & -2 \\ 7 & 8 & 11 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von f, g und h.

Lösung 4. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn es ein $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$, gibt mit $(M(f) - \lambda I)v = 0$. Da der 0-Vektor immer eine Lösung dieses Gleichungssystem ist, ist also zu untersuchen, wann die Lösung des Gleichungssystems nicht eindeutig ist, d.h. wann $\det(M(f) - \lambda I) = 0$ ist. Hier ist $\det(M(f) - \lambda I) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, f hat also die Eigenwerte -3, -2, 1 und 2. Um die zugehörigen Eigenräume zu bestimmen muss man das Gleichungssystem $(M(f)-\lambda I)x=0$, $x\in\mathbb{R}^4$ für die verschiedenen Eigenwerte λ lösen. Wendet man den Gaussalgorithmus für $\lambda=-3$ an, so erhält man:

$$\left(\begin{array}{cc} (M(f)+3I) & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -9 & -2 & 0 \\ 7 & 11 & 11 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -9 & -9 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{z_2+3z_3 \\ z_4-4z_3 \\ z_3 \\ z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 20 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -11 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{z_1 \\ z_2+z_1 \\ z_3+2z_1 \\ z_4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 20 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 43 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{z_1 \\ z_2 \\ z_3-2z_2 \\ z_4+z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 20 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen einer Lösung liefert mit $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ einen Erzeuger des Eigenraums zum Eigenwert -3.

Analog erhält man für $\lambda=-2$ den Eigenraum $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$, für $\lambda=1$ den Eigenraum $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und für $\lambda=2$ den Eigenraum $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Analoges Vorgehen mit g liefert $\det(M(g)-\lambda I)=\lambda^4-7\lambda^3+18\lambda^2-20\lambda+8=(\lambda-2)^3(\lambda-1)$, die Eigenwerte von g sind also 1 und 2. Für $\lambda=2$ erhält man mit dem Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cc} (M(g)-2I) & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der Eigenraum ist also $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Für $\lambda=1$ erhält man

$$\left(\begin{array}{cc} (M(g)-2I) & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{z_1 \\ 3z_2+2z_1 \\ 3z_3+8z_1 \\ z_4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{\substack{z_1 \\ z_2 \\ z_4 \\ z_3-z_2-6z_4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und als Eigenraum ergibt sich Span$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Eigenvektoren v von h erfüllen $(M(h) - \lambda I)v = 0$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ der zugehörige Eigenwert ist. Da nur $v \neq 0$ Eigenvektoren sind, der 0-Vektor aber das Gleichungssystem löst, sucht man also nach λ, für die das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist, also nach λ, für die $\det(M(h) - \lambda I) = 0$ ist. Berechnung der Determinante liefert

$$0 = \det(M(h) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 2)^3,$$

also $\lambda = 2$. Man muss also die Lösungen von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} v = 0$ bestimmen. Mit dem Gaussalgorithmus erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{z_2 \\ z_1 \\ z_3 - z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also den Lösungsraum Span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Der einzige Eigenwert von h ist 2 und der zugehörige Eigenraum Span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Insbesondere wird hier $\mathbb{R}^3$ nicht durch die Eigenräume von g erzeugt, d.h. g ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie:

$$\{\lambda \in K : \lambda \text{ Eigenwert von } f \circ g\} = \{\lambda \in K : \lambda \text{ Eigenwert von } g \circ f\}$$

Lösung 5. "$\subseteq$" Ist $x \neq 0$ ein Eigenwert von $f \circ g$, so gibt es ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit $(f \circ g)(v) = xv$. Dann ist aber $g(v) \neq 0$, da $f(0) = 0 \neq xv = f(g(v))$ ist, und $(g \circ f)(g(v)) = g((f \circ g)(v)) = g(xv) = xg(v)$, also ist $g(v)$ Eigenvektor von $g \circ f$ mit Eigenwert x.
Ist 0 ein Eigenwert von $f \circ g$, so gibt es ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit $(f \circ g)(v) = 0$. Ist dabei $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ Eigenvektor von $g \circ f$ mit Eigenwert 0, da $(g \circ f)(g(v)) = g((f \circ g)(v)) = g(0) = 0$ ist. Ist $g(v) = 0$ und gibt es ein $w \in V$ mit $v = f(w)$, so ist $(g \circ f)(w) = g(f(w)) = g(v) = 0$, also w ein Eigenvektor von $g \circ f$ mit Eigenwert 0. Gibt es kein solches w, so ist die Dimension von $f(V)$ kleiner als die Dimension von V und nach der Dimensionsformel für f ($dim(V) = dim(f(V)) + dim(\mathrm{Kern}(f))$) ist die Dimension des Kerns von f größer als 1, also gibt es ein $w \in V$, $w \neq 0$, mit $f(w) = 0$, also ist $(g \circ f)(w) = g(f(w)) = g(0) = 0$ und w ein Eigenvektor von $g \circ f$ mit Eigenwert 0.
"$\supseteq$" analog