Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 6

(Eigenwerte, Eigenvektoren)

Abgabe: bis Montag, den 11. 6., 10:00 Uhr.

Am 13. Juli findet ab 15:30 der Akademische Festtag "25 Jahre Mathematik in Augsburg" statt (im T 1001). Zu dieser Feier sind alle Mathematikstudenten ganz herzlich eingeladen. Im Festakt werden Ehrenpromotionen an Professor Dr. Hirzebruch und an Professor Dr. Stoer verliehen, anschließend gibt es einen Sektempfang.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $F \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $F = \lambda\,\mathrm{Id}$, wenn jeder von Null verschiedene Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von F zum Eigenwert λ ist.

Aufgabe 2. Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit $A = (a_{ij})$ ist die Spur definiert durch

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

1. Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? (Begründung!)
   (a) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1\}$
   (b) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid |\det A| = 1\}$
   (c) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = -1\}$
   (d) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$
2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$? (Begründung!)
   (a) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1\}$
   (b) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 1\}$
   (c) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = -1\}$
   (d) $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Die beiden Endomorphismen $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sowie $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^4$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen

$$M(f) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -9 & -2 \\ 7 & 8 & 11 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von f, g und h.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie:

$$\{\lambda \in K : \lambda \text{ Eigenwert von } f \circ g\} = \{\lambda \in K : \lambda \text{ Eigenwert von } g \circ f\}$$