Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise Blatt 5

(Determinanten)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det(A) = 1\},$$

und

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0, A^{-1} = {}^tA\}\,.$$

Zeigen Sie:

1. Ist $A \in O_n(\mathbb{R})$, dann ist $\det A \in \{1, -1\}$.
2. $SL_n(\mathbb{R})$ und $O_n(\mathbb{R})$ sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation.
3. Die Menge

   $$SO_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1, A^{-1} = {}^tA\}$$

   ist bezüglich der Matrixmultiplikation ebenfalls eine Gruppe.

Bemerkung: $SL_n(\mathbb{R})$ heißt die *spezielle lineare Gruppe*, $O_n(\mathbb{R})$ die *orthogonale Gruppe* und $SO_n(\mathbb{R})$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

Lösung 1.

1. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $A^{-1} = {}^tA$, also

   $$\det A = \det {}^tA = \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

   Also ist $(\det A)^2 = 1$ und da $\det A \in \mathbb{R}$ folgt also $\det A = \pm 1$.

2. In der Übung wurde gezeigt, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine Gruppe ist, daher reicht es die Untergruppeneigenschaften nachzuweisen. Für $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$ gilt $\det A = \det B = 1$ und also auch

   $$\det(AB) = \det A \det B = 1\,,$$

   und $AB \in SL_n(\mathbb{R})$. Ausserdem ist A invertierbar, da $\det A = 1 \neq 0$, und $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$ gibt somit $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$.

   Genauso gilt für $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, dass ${}^tA = A^{-1}, {}^tA = A^{-1}$, und damit ist $AB \in O_n(\mathbb{R})$, denn

   $${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}\,.$$

   Ferner ist

   $${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = (A^{-1})^{-1},$$

   so dass $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

3. Wieder reicht es, die Untergruppeneigenschaften zu überprüfen: Für $A, B \in S0_n(\mathbb{R}) \subset SL_n(\mathbb{R})$ gilt wegen (2) $AB \in SL_n(\mathbb{R})$ und $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$. Genauso ist aber auch $A, B \in SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ und wieder gilt mit (2) $AB \in O_n(\mathbb{R}), A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Damit ist aber auch $AB, A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\mathcal{B} = (v_i)$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass

$$\det F := \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ist, d.h., falls $\mathcal{A}$ eine weitere Basis von V ist, dann ist

$$\det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)\,.$$

Hinweis: überlegen Sie, wie $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ miteinander zusammenhängen.

Lösung 2. Ist $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, dann ist (LA 1)

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) &= \det((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) = \det((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}) \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \det T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \\ &= \frac{1}{\det T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}} \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \det T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $A : (a,b) \to GL_n(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls $(a,b) \subset \mathbb{R}$ in die Menge der invertierbaren Matrizen, d.h., falls $A(t)$ die Matrix mit Koeffizienten $(A(t))_{ij} = a_{ij}(t)$ ist, dann sind die Abbildungen $a_{ij} : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig für alle $i,j = 1,\dots,n$.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$A^{-1} : (a,b) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), t \mapsto (A(t))^{-1}$$

ist stetig.

Lösung 3. Die Inverse ist gegeben durch

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^tC$$

mit $c_{ij} = -(1)^{i+j} \det A'_{ij}$ und $A'_{ij} =$ Matrix, wo i-Zeile, j-Spalte gestrichten ist. Da

$$\det A = \sum \mathrm{sign}\sigma a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma n,n}$$

hängt $\det A(t)$ stetig von t ab. Da die Koeffizienten der Matrix A'_{ij} durch die Koeffiziente von A gegeben sind, ist $t \mapsto A'_{ij}$ stetig, und mit dem obigen Argument auch $t \mapsto c_{ij}(t) = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$. Insgesamt ist also $t \mapsto A_{ij}^{-1}(t) = \frac{1}{\det A(t)}({}^tC(t))_{ij}$ stetig für alle i,j, also auch $t \mapsto A(t)^{-1}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Matrix $M_n \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gegeben durch

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det(M_n)$.

(Hinweis: Induktion über n, entwickeln Sie dabei nach der ersten Zeile oder Spalte. Im Induktionsschritt wird die Induktionsannahme für n und $n-1$ benötigt.)

Lösung 4. Zuerst bestimmt man $\det(M_n)$ für einige kleine n. Dabei erhält man $\det(M_1) = 2$, $\det(M_2) = 3$ und $\det(M_3) = 4$. Dies führt zur Induktionsannahme $\det(M_n) = n + 1$. Um das zu zeigen entwickelt man $\det(M_{n+1})$ nach der ersten Zeile. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\det(M_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2\det(M_n) - \det \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{\in \operatorname{Mat} \mathbb{R}(n \times n)} \\
&= 2\det(M_n) - \det(M_{n-1}) = 2(n+1) - n = n + 2.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde beim zweiten Mal nach der ersten Spalte entwickelt.

Insgesamt ist $\det(M_n) = n + 1$ gezeigt.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte). Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und

$$
A_n := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n).
$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A_n
b) Bestimmen Sie die Determinante von A_n

(Hinweis: a) Zur Bestimmung des Ranges von A_n untersuche man die Spalten von A_n auf lineare Unabhängigkeit.

b) Die Determinante bestimmt man mittels Induktion über n. Dazu bringt man zuerst mittels Zeilenumformungen die erste Spalte von A_n auf ${}^t(1, 0, \dots, 0)$. Dann entwickelt man nach der ersten Spalte und verwendet die Linearität in den Zeilen um die erste Spalte der übriggebliebenen Matrix wieder auf ${}^t(1, \dots, 1)$ zubringen. Danach kann man diese Matrix mit Spaltenumformungen auf die Form von A_{n-1} bringen und kann dafür die Induktionsannahme, die man durch Betrachtung der im Induktionsschritt aufgetretenen Vorfaktoren und/oder durch Berechnen von $\det(A_n)$ für kleine n erhält, einsetzen.)

Lösung 5. a) Die k-te Spalte von A_n ist $a_k := {}^t(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$.
Ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} a_k = 0$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_i^k = 0 \; \forall i = 1, \dots, n$.
Das Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$ hat also n Nullstellen, nämlich $x_1, \dots, x_n$. Also ist $p(x) = 0$, also

$\lambda_k = 0 \; \forall k = 0, 1, \ldots, n-1$, also sind die Spalten von A_n linear unabhängig, also hat A_n Rang n.

b) Man geht wie im Hinweis beschrieben vor. Dazu zieht man zuerst von den Zeilen 2 bis n jeweils die erste Zeile ab.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert dann

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 & \ldots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nun dividiert man die i-te Zeile der enstandenen Matrix durch $x_{i+1} - x_1 \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$.

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 & \ldots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_2^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_2^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_2^{n-2-k} \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_3^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_3^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_3^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_n^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_n^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_n^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A_n) = \left(\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)\right) \det \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_2^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_2^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_2^{n-2-k} \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_3^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_3^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_3^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_n^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_n^{2-k} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_n^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

Dann zieht man nacheinander in der angegebenen Reihenfolge von der $(n-1)$-ten Spalte x_1 mal die $(n-2)$-te Spalte, von der $(n-2)$-ten Spalte x_1 mal die $(n-3)$-te Spalte, ..., von der 3-ten Spalte x_1 mal die 2-te Spalte ab und von der 2-ten Spalte x_1 mal die erste Spalte ab.

Dabei ist der $(i-1)$-te Eintrag $(i = 2, \ldots, n)$, wenn man von der j-ten Spalte $(j = 2, \ldots, n-1)$ x_1 mal die $(j-1)$-te Spalte abzieht, gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{j-1} x_1^k x_i^{j-1-k} - x_1 \sum_{k=0}^{j-2} x_1^k x_i^{j-2-k} &= \sum_{k=0}^{j-1} x_1^k x_i^{j-1-k} - \sum_{k=0}^{j-2} x_1^{k+1} x_i^{j-2-k} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} x_1^k x_i^{j-1-k} - \sum_{k=1}^{j-1} x_1^k x_i^{j-2-(k-1)} \\ &= x_i^{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} x_1^k x_i^{j-1-k} - \sum_{k=1}^{j-1} x_1^k x_i^{j-1-k} \\ &= x_i^{j-1}. \end{aligned}$$

Man hat also

$$\begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_2^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_2^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_2^{n-2-k} \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_3^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_3^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_3^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_n^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_n^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_1^k x_n^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_2^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_2^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-3} x_1^k x_2^{n-3-k} & x_2^{n-2} \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_3^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_3^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-3} x_1^k x_3^{n-3-k} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \sum\limits_{k=0}^{1} x_1^k x_n^{1-k} & \sum\limits_{k=0}^{2} x_1^k x_n^{2-k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{n-3} x_1^k x_n^{n-3-k} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Dies ist bis auf die Indexverschiebung bei den x_i gerade A_{n-1}. Unter Berücksichtigung des erhaltenen Faktors $\prod\limits_{i=2}^{n}(x_i - x_1)$ erhält man die Induktionsannahme

$$\det(A_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n-1} (x_i - x_j).$$

Unter dieser Induktionsannahme wäre

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{j=2}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j),$$

also

$$\det(A_n) = \prod_{j=2}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j).$$

Bleibt also nur noch der Induktionsanfang:
$A_1 = (1)$
$(A_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix})$

$$\det(A_1) = 1 =: \prod_{j=1}^{0} \prod_{i=j+1}^{1} (x_i - x_j)$$

$$\left(\begin{array}{lcl}
\det(A_2) & = & x_2 - x_1 \\
\det(A_3) & = & x_2x_3^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_1^2x_2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 \\
 & = & x_2x_3^2 - x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 - x_1^2x_2 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_1x_2^2 \\
 & = & (x_3 - x_1)(x_2x_3 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2^2) \\
 & = & (x_3 - x_1)(x_2x_3 - x_1x_3 - x_2^2 + x_1x_2) \\
 & = & (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)
\end{array}\right)$$