Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 5

(Determinanten)

Abgabe: bis Montag, den 4. 6., 10:00 Uhr.

Achtung: Die Vorlesung entfällt am Pfingstmontag, dem 28.5., daher ist die Abgabe am darauf folgenden Montag! Die Übungsgruppen finden wie gewohnt statt.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det(A) = 1\},$$

und

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0, A^{-1} = {}^tA\}\,.$$

Zeigen Sie:

1. Ist $A \in O_n(\mathbb{R})$, dann ist $\det A \in \{1, -1\}$.
2. $SL_n(\mathbb{R})$ und $O_n(\mathbb{R})$ sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation.
3. Die Menge

$$SO_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A = 1, A^{-1} = {}^tA\}$$

   ist bezüglich der Matrixmultiplikation ebenfalls eine Gruppe.

Bemerkung: $SL_n(\mathbb{R})$ heißt die *spezielle lineare Gruppe*, $O_n(\mathbb{R})$ die *orthogonale Gruppe* und $SO_n(\mathbb{R})$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\mathcal{B} = (v_i)$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass

$$\det F := \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ist, d.h., falls $\mathcal{A}$ eine weitere Basis von V ist, dann ist

$$\det M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F) = \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\,.$$

Hinweis: überlegen Sie, wie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ miteinander zusammenhängen.

Aufgabe 3. Sei $A : (a, b) \to GL_n(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in die Menge der invertierbaren Matrizen, d.h., falls $A(t)$ die Matrix mit Koeffizienten $(A(t))_{ij} = a_{ij}(t)$ ist, dann sind die Abbildungen $a_{ij} : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$A^{-1} : (a, b) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), t \mapsto (A(t))^{-1}$$

ist stetig.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Matrix $M_n \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gegeben durch

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det(M_n)$.

(Hinweis: Induktion über n, entwickeln Sie dabei nach der ersten Zeile oder Spalte. Im Induktionsschritt wird die Induktionsannahme für n und $n-1$ benötigt.)

****

Die Bearbeitung der Zusatzaufgaben ist freiwillig. Die Punkte, die man auf Zusatzaufgaben erreicht, werden gutgeschrieben und können fehlende Punkte in der Gesamtwertung ersetzen.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte). Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n).$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A_n
b) Bestimmen Sie die Determinante von A_n

(Hinweis: a) Zur Bestimmung des Ranges von A_n untersuche man die Spalten von A_n auf lineare Unabhängigkeit.

b) Die Determinante bestimmt man mittels Induktion über n. Dazu bringt man zuerst mittels Zeilenumformungen die erste Spalte von A_n auf ${}^t(1, 0, \dots, 0)$. Dann entwickelt man nach der ersten Spalte und verwendet die Linearität in den Zeilen um die erste Spalte der übriggebliebenen Matrix wieder auf ${}^t(1, \dots, 1)$ zubringen. Danach kann man diese Matrix mit Spaltenumformungen auf die Form von A_{n-1} bringen und kann dafür die Induktionsannahme, die man durch Betrachtung der im Induktionsschritt aufgetretenen Vorfaktoren und/oder durch Berechnen von $\det(A_n)$ für kleine n erhält, einsetzen.)