Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 2

(Determinanten)

Abgabe: bis Montag, den 21. 5., 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien die Matrizen $D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gegeben und 0 die Nullmatrix in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m) \to \mathbb{R},\ F \mapsto \det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

alternierend und linear in jeder Spalte ist.

b) Zeigen Sie: $\det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(F)\det(C)$ für alle $F \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m)$.

c) Bestimmen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 12 & 8 \\ 5 & 3 & 5 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung 1. a) d ist multilinear in jeder Spalte: Eine Linearkombination $\lambda v_1 + v_2$ in einer Spalte von F wird durch Anhängen von $0 \in \mathbb{R}^n$ zu einer Linearkombination $\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der selben Spalte von $\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Ist dabei der Rest von F unverändert, so bleibt auch der Rest von $\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ unverändert und aus der Linearität von $\det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ in jeder Spalte von $\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ folgt die Linearität von $d(F)$ in jeder Spalte von F.

Ist der Spaltenrang von F kleiner als m, so ist auch der Spaltenrang von $\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ kleiner als $m+n$, da die Spalten von $\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind. Also ist $d(F) = \det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = 0$.

d ist also multilinear und alternierend.

b) $\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ lässt sich als $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ schreiben (Dabei ist I_k die $k \times k$ Einheitsmatrix). Analog zu a) ist die Abbildung $\tilde{d} : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \to \mathbb{R},\ C \mapsto \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ alternierend und multiliniear in den Spalten von C und wegen $\tilde{d}(I) = \det(I_{m+n}) = 1$ und der Eindeutigkeit der Determinante als Abbildung mit diesen Eigenschaften ist $\tilde{d}(C) = \det(C)$. Im Fall $C = I_n$ ist $d_{I_n}(I_m) = \det \begin{pmatrix} I_m & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1$ (Determinante einer oberen Dreiecksmatrix), also wegen der Eindeutigkeit der Determinante $d_{I_n}(F) = \det(F)$. Allgemeines $C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ kann man wegen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ auf $C = I_n$ zurückführen. Man erhält $d_C(F) = \tilde{d}(C) d_{I_n}(F) = \det(C)\det(F)$.

c) Anwendung von b) liefert:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 12 & 8 \\ 5 & 3 & 5 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). 1. Seien $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\}$ und $CA = AC$, so gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$\det\left(\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right).$$

2. Geben Sie analoge Aussagen für a) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $BA = AB$, b) $D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $CD = DC$ und c) $D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $BD = DB$ an.

3. Bestimmen Sie die Determinante von

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Bestimmt man die Determinanten der beteiligten Matrizen, so erhält man wegen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\det(A^{-1})\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CA^{-1}B).$$

Wegen

$$D - CA^{-1}B = A^{-1}(AD - ACA^{-1}B) = A^{-1}(AD - CAA^{-1}B) = A^{-1}(AD - CB)$$

ist $\det(D - CA^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(AD - CB)$ und man erhält die Behauptung.

Im Fall $AB = BA$ ist stattdessen $D - CA^{-1}B = (DA - CA^{-1}BA)A^{-1} = (DA - CB)A^{-1}$ und man erhält

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(DA - CB).$$

Bei b) erhält man analog $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ und in c) $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$.

Berechnung von $\det(E)$: Setze $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $\det A_1 = 1 \neq 0$, also A_1 invertierbar, und offensichtlich $A_1C_1 = C_1A_1$, also gilt:

$$\det(E) = \det(A_1D_1 - C_1B_1) = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = -8$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w\end{pmatrix} = xyzw\,.$$

Lösung 3. det is linear in jeder Spalte, also ist

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w\end{pmatrix} \overset{i.-1.Spalte}{=} \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & x & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & y & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & z & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & w\end{pmatrix}$$

Da $\det A = \det {}^t A$ und die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonalelemente geben ist, folgt die Aussage.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\det(x, y, z) = < x \times y, z >$$

wobei

$$x \times y = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\ x_3y_1 - x_1y_3\\ x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}$$

und $< ., . >$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet:

$$< a, b > = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

für alle $a = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Lösung 4.

$$< x \times y, z > = z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2 + z_2x_3y_1 - z_2x_1y_3 + z_3x_1y_2 - z_3x_3y_1$$

Also gilt die Aussage mit der Sarrus-Regel:

$$\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1$$

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte)**.** Folgern Sie aus Aufgabe 4, dass $|\det(x, y, z)|$ das Volumen des von x, y, z aufgespannten Parallelepipeds ist.

Lösung 5. Das Volumen eines Parallelepipeds ist gegeben durch

$$V = Gh$$

mit

$$G = ||x \times y||, h = \cos\alpha ||z||$$

wobei α der Winkel zwischen z und dem Normalenvektor zur von x, y aufgespannten Ebene ist. Da aber $< a, b > = ||a|| ||b|| \cos\angle(a, b)$ ist, folgt die Aussage.