Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 4

(Determinanten)

Abgabe: bis Montag, den 21. 5., 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien die Matrizen $D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gegeben und 0 die Nullmatrix in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m) \to \mathbb{R},\ F \mapsto \det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

alternierend und linear in jeder Spalte ist.

b) Zeigen Sie: $\det \begin{pmatrix} F & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(F)\det(C)$ für alle $F \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m)$.

c) Bestimmen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 12 & 8 \\ 5 & 3 & 5 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

1. Seien $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\}$ und $CA = AC$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$\det \left(\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right).$$

2. Geben Sie analoge Aussagen für a) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $BA = AB$, b) $D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $CD = DC$ und c) $D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $BD = DB$ an.

3. Bestimmen Sie die Determinante von

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w \end{pmatrix} = xyzw\,.$$

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\det(x, y, z) =< x \times y, z >$$

wobei

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

und $< ., . >$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet:

$$< a, b >= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

für alle $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

****

Die Bearbeitung der Zusatzaufgaben ist freiwillig. Die Punkte, die man auf Zusatzaufgaben erreicht, werden gutgeschrieben und können fehlende Punkte in der Gesamtwertung ersetzen.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte)**.** Folgern Sie aus Aufgabe 4, dass $|\det(x, y, z)|$ das Volumen des von x, y, z aufgespannten Parallelepipeds ist.