Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise, Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Zeigen Sie:

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv}$$

Lösung 1. "$\Rightarrow$": Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und f injektiv, so sind $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \overset{f \text{linear}}{=} f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) \overset{f \text{inj}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \overset{v_i \text{l.u}}{\Rightarrow} \forall i = 1, \dots, n: \ \lambda_i = 0\,,$$

bilden also eine Basis von W. Damit ist f surjektiv.

"$\Leftarrow$": Sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W und $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V (wie oben) und für $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \mathrm{Kern}(f)$ ergibt sich

$$0 = f(v) \overset{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i\,,$$

also $v = 0$, da w_i linear unabhängig sind. Daher ist f injektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen, $\pi \in \mathcal{S}_n$, $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ und $R_\pi = (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \pi(j),\ j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dabei heißt R_π Permutationsmatrix zur Permutation π.)
Zeigen Sie:

a) $R_\pi A$ entsteht aus A durch Zeilenvertauschung.
(genauer: Die i-te Zeile von A ist die $\pi(i)$-te Zeile von $R_\pi A$.)
Was erhält man für die Spalten von BR_π mit $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$?

b) $R_\pi^{-1} = R_{\pi^{-1}} = {}^tR_\pi$

Lösung 2. a) Setze $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $R_\pi = (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $R_\pi A = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ und $BR_\pi = (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$.
Dann ist $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} r_{i,k} a_{k,j} = a_{\pi^{-1}(i),j}$, also ist $c_{\pi(i),j} = a_{i,j}$ für $j = 1, \dots, m$, d.h. die i-te Zeile von A und die $\pi(i)$-te Zeile von $R_\pi A$ sind identisch.
Analog ergibt sich $d_{i,j} = b_{i,\pi(j)}$, d.h. die j-te Spalte von B und die $\pi^{-1}(j)$-te Spalte von BR_π sind identisch.

b) Setze $R_{\pi^{-1}} = (s_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $R_\pi = (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $R_\pi R_{\pi^{-1}} = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ und $R_\pi\, {}^tR_\pi = (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Damit ergibt sich:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} s_{k,j} = s_{\pi^{-1}(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi^{-1}(i) = \pi^{-1}(j), \text{ d.h. } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r_{j,k} = r_{j,\pi^{-1}(i)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \pi(\pi^{-1}(i)) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt $R_{\pi^{-1}} = R_\pi^{-1} = {}^tR_\pi$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$.
Zeigen Sie:
a) ${}^t(\varphi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\varphi$
b) Ist φ invertierbar, so gilt ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$

Lösung 3. a) Sei $w^* \in W^*$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} {}^t(\varphi \circ \psi)(w^*) &= w^* \circ (\varphi \circ \psi) = w^* \circ \varphi \circ \psi = (w^* \circ \varphi) \circ \psi \\ &= {}^t\varphi(w^*) \circ \psi = {}^t\psi({}^t\varphi(w^*)) = ({}^t\psi \circ {}^t\varphi)(w^*). \end{aligned}$$

Also ist ${}^t(\varphi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\varphi$.

b) Nach a) gilt ${}^t(\varphi^{-1})\, {}^t\varphi = {}^t(\varphi \circ \varphi^{-1}) = {}^t(id_W) = id_{W^*}$, also gilt ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Die kanonische Abbildung zwischen V und dem Bidualraum V^{**} ist gegeben durch

$$\iota : V \to V^{**},\ v \mapsto v^{**} \text{ mit } v^{**}(\varphi) = \varphi(v).$$

Zeigen Sie: ι ist ein K-Vektorraumisomorphismus.

Lösung 4. Als erstes sollte man sich klarmachen, dass $\iota(v) = v^{**}$ wirklich in V^{**} liegt, d.h. dass v^{**} eine lineare Abbildung von V^* nach K ist.

$$v^{**}(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)(v) = \lambda\varphi(v) + \psi(v) = \lambda v^{**}(\varphi) + v^{**}(\psi)$$

ι ist linear, da für $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in K$ und $\varphi \in V^*$ gilt:

$$(\iota(\lambda v_1 + v_2))(\varphi) = \varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = (\lambda\iota(v_1)(\varphi)) + (\iota(v_2)(\varphi)).$$

Wegen $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V) < \infty$ genügt es nun nach Aufgabe 1 Injektivität oder Surjektivität zu zeigen.

Wir zeigen hier Injektivität. Sei dazu $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Ist nun $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \in \mathrm{Kern}(\iota)$, so ist

$$0 = \iota(v)(v_i^*) = v_i^*(v) \overset{v_i^* \text{ lin}}{=} \sum_k \lambda_k v_i^*(v_k) = \lambda_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

also $v = 0$. Damit ist ι injektiv, also bijektiv.
Insgesamt hat man gezeigt, dass ι ein K-Vektorraumisomorphismus ist.