Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 3

(lineare Abbildungen, Permutationsmatrizen, Dualraum)

Abgabe: bis Montag, den 14. 5., 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Zeigen Sie:

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen, $\pi \in \mathcal{S}_n$, $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ und $R_\pi = (r_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \pi(j),\ j = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dabei heißt R_π Permutationsmatrix zur Permutation π.)
Zeigen Sie:

a) $R_\pi A$ entsteht aus A durch Zeilenvertauschung.
(genauer: Die i-te Zeile von A ist die $\pi(i)$-te Zeile von $R_\pi A$.)
Was erhält man für die Spalten von BR_π mit $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$?

b) $R_\pi^{-1} = R_{\pi^{-1}} = {}^tR_\pi$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(U, V)$.
Zeigen Sie:

a) ${}^t(\varphi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\varphi$

b) Ist φ invertierbar, so gilt ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Die kanonische Abbildung zwischen V und dem Bidualraum V^{**} ist gegeben durch

$$\iota : V \to V^{**},\ v \mapsto v^{**} \text{ mit } v^{**}(\varphi) = \varphi(v).$$

Zeigen Sie: ι ist ein K-Vektorraumisomorphismus.