Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise, Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum und L ein affiner Unterraum von V, sowie $y_0, \ldots, y_n \in L$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Ist $\tilde{L} \subset L$ ein affiner Unterraum von V der Dimension $\dim \tilde{L} \leq n-1$, so existiert ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ mit $y_i \notin \tilde{L}$.
- $(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0)$ sind linear unabhängig.

Lösung 1. "$\Longrightarrow$": Sei

$$\tilde{L} = y_0 + \operatorname{Span}(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0)\,.$$

Dann ist $\tilde{L}$ ein affiner Unterraum der Dimension $\dim \tilde{L} = \dim \operatorname{Span}(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0)$. Wäre $\dim \tilde{L} \leq n-1$, so existiert nach Voraussetzung ein $j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $y_j \notin \tilde{L}$. Widerspruch! (Da $y_i = y_0 + (y_i - y_0) \in \tilde{L}$ für alle i). Also ist $\dim \tilde{L} = n$, und $(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0)$ sind linear unabhängig.

"$\Longleftarrow$": Sei $\tilde{L} \subset L$ ein affiner Unterraum von V der Dimension $\dim \tilde{L} \leq n-1$. Angenommen, $y_i \in \tilde{L}$ für alle i. Dann ist

$$\tilde{L} \supset y_0 + \operatorname{Span}(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0).$$

Widerspruch, da dann nach Voraussetzung $\dim \tilde{L} \geq \dim \operatorname{Span}(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0) = n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $A \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Für alle $B \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt $AB = BA$.
- Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A = \lambda I$.

(Hinweis: Man betrachte die Matrizen E_{kl} mit $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ni}\delta_{mj}$).

Lösung 2. "$\Longrightarrow$": Angenommen $AB = BA$ für alle $B \in \operatorname{Mat}(n \times n)$. Insbesondere für $B = E_{kl}$ gilt:

$$(AE_{kl})_{ij} = \sum_m A_{im}(E_{kl})_{mj} = \sum_m A_{im}\delta_{km}\delta_{lj} = A_{ik}\delta_{lj} = \begin{cases} 0 & l \neq j \\ A_{ik} & l = j \end{cases}$$

sowie

$$(E_{kl}A)_{ij} = \sum_m (E_{kl})_{im}A_{mj} = \sum_m \delta_{ki}\delta_{lm}A_{mj} = \delta_{ki}A_{lj} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ A_{lj} & k = i \end{cases}.$$

Somit impliziert $(AE_{kl})_{ij} = (E_{kl}A)_{ij}$, dass

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_{ii} = A_{kk} & i = k \end{cases}.$$

Daher ist $A = \lambda I$ mit $\lambda = A_{ii}$ für alle i.

"$\Longleftarrow$": ist klar, da $(\lambda I)A = \lambda(IA) = \lambda A = A\lambda = A\lambda I$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien E, F affine Unterräume des K-Vektorraums V. Zeigen Sie die Dimensionsformel

$$\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \dim < E, F >$$

für affine Unterräume $E, F \subset V$, wobei $E \cap F \neq \emptyset$ und

$$< E >= \{P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0) \mid P_i \in E, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K\} .$$

Lösung 3. Wenn $E \cap F \neq \emptyset$, dann existiert ein $P \in E \cap F$. Damit ist

$$E = P + E', F = P + F', E \cap F = P + (E' \cap F'), < E, F >= P + (E' + F')$$

wobei E', F' Untervektorräume sind. Daher ist

$$\dim E = \dim E', \dim F = \dim F', \dim E \cap F = \dim E' \cap F', \dim < E, F >= \dim(E' + F')$$

und die Dimensionsformel folgt aus der Dimensionsformel für Untervektorräume.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen von V, sowie $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ die dazu gehörigen dualen Basen. Zeigen Sie, dass für die Transformationsmatrizen gilt

$$T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ({}^t(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}))^{-1} .$$

(Hinweis: Betrachten Sie $v_j^*(v_k)$).

Lösung 4. Erinnerung: Wenn $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ dann ist

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (t_{ij})_{ij}$$

mit $v_j = \sum t_{ij} w_i$. Die Transponierte ist dann also

$$({}^t T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{ij} = t_{ji}$$

Sei $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = (s_{ij})$, also

$$v_j^* = \sum s_{ij} w_i^* .$$

Daher

$$\begin{aligned}
\delta_{jk} &= v_j^*(v_k) = v_j^*(\sum t_{ik} w_i) \\
&= \sum_i t_{ik} v_j^*(w_i) \\
&= \sum_i t_{ik} \sum_m s_{mj} w_m^*(w_i) \\
&= \sum_i t_{ik} \sum_m s_{mj} \delta_{im} \\
&= \sum_i t_{ik} s_{ij} \\
&= \sum_i ({}^t T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{ki} s_{ij} \\
&= ({}^t T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})_{kj}
\end{aligned}$$

Also ist $({}^t T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}) = I$ und ${}^t T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^{-1}$.