Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 2

(affine Räume, Dualraum)

Abgabe: bis Montag, den 7. 5., 10:00 Uhr.

Abgabe jetzt um 10:00 Uhr!

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum und L ein affiner Unterraum von V, sowie $y_0, \ldots, y_n \in L$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Ist $\tilde{L} \subset L$ ein affiner Unterraum von V der Dimension $\dim \tilde{L} \leq n-1$, so existiert ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ mit $y_i \notin \tilde{L}$.
- $(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0)$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Für alle $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt $AB = BA$.
- Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A = \lambda I$.

(Hinweis: Man betrachte die Matrizen E_{kl} mit $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$).

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien E, F affine Unterräume des K-Vektorraums V. Zeigen Sie die Dimensionsformel

$$\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \dim < E, F >$$

für affine Unterräume $E, F \subset V$, wobei $E \cap F \neq \emptyset$ und

$$< E >= \{P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0) \mid P_i \in E, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K\}\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen von V, sowie $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ die dazu gehörigen dualen Basen. Zeigen Sie, dass für die Transformationsmatrizen gilt

$$T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ({}^t(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}))^{-1}\,.$$

(Hinweis: Betrachten Sie $v_j^*(v_k)$, wobei $\mathcal{A} = (v_i)_{i=1,\ldots,n}$).