Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise, Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & \beta+2 \\ \alpha x_1 & + & 2\alpha x_2 & + & (\alpha+2)x_3 & + & (2\alpha+2)x_4 & = & \alpha+4 \end{array}$$

Für die ermittelten Werte berechne man jeweils die Lösungsmenge.

Lösung 1. Man wendet den Algorithmus von Gauss an. Die dem Gleichungssystem entsprechende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \beta+2 \\ \alpha & 2\alpha & \alpha+2 & 2\alpha+2 & \alpha+4 \end{pmatrix}$$

wird durch die den folgenden Matrizen entsprechenden Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt gebracht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta-\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha & (4-\alpha)\beta-2 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha \neq 4$ hat man eine eindeutige Lösung, nämlich

$$x = \begin{pmatrix} \frac{-4+\alpha\beta+2\alpha-4\beta}{4-\alpha} \\ \frac{2}{4-\alpha} \\ \frac{10+\alpha\beta-3\alpha-4\beta}{4-\alpha} \\ \frac{-2-\alpha\beta+4\beta}{4-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 4$ wird die letzte Zeile zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man zeige, dass die $n \times n$ Permutationsmatrizen bezüglich der Matrixmultiplikation eine Untergruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen bilden.

(Hinweis:
Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ ist genau dann eine Permutationsmatrix, wenn gilt:

$$\begin{array}{l} \forall i,j = 1,\dots,n:\ a_{i,j} \in \{0,1\} \\ \forall j = 1,\dots,n:\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1 \\ \forall i = 1,\dots,n:\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \end{array} \quad)$$

Lösung 2. Offensichtlich sind alle Permutationsmatrizen invertierbar (haben vollen Rang, siehe Aufgabe 3) und die Einheitsmatrix ist eine Permutationsmatrix.

Hat man 2 Permutationsmatrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ und setzt $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = A * B$, so ist $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \in \mathbb{N}_0$ für alle $i,j = 1,\dots,n$.
Außerdem ist für ein beliebiges $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \\ &= 1, \end{aligned}$$

womit dann auch $c_{i,j} \in \{0,1\}$ für alle $i,j = 1,\dots,n$ folgt.
Für beliebiges $i \in \{1,\dots,n\}$ erhält man analog $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{i,j} = 1$, C ist also eine Permutationsmatrix.

Bleibt zu zeigen, dass die Inverse einer Permutationsmatrix A eine Permutationsmatrix ist:
Da es nur endlich viele $n \times n$ Permutationsmatrizen gibt (da alle Einträge nur 0 oder 1 sein dürfen gibt es höchstens 2^{n^2} Permutationsmatrizen), ist die Menge $\{A^k \mid k = 1,2,\dots\}$ endlich. Es gibt also k,l mit $k < l$ und $A^k = A^l$. Multiplikation mit A^{-k} liefert dann $A * A^{l-k-1} = E_n$. Also gilt $A^{-1} = A^{l-k-1}$, womit A^{-1} als Produkt von Permutationsmatrizen selber eine Permutationsmatrix ist.

Aufgabe 3.

- Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rank} A = n$ ist.

- Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(5 \times 5), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(4 \times 4), \quad rankB = 3, \text{ also ist B nicht invertierbar}$$

$$C = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i & 0 \\ i & -1 & 2i & 1 \\ i & -1+i & i & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1-i & -1_i & 2+i \\ 1 & -1+i & 1-i & -i \\ 1 & -1-i & 1+i & -i \\ 1-i & -2+2i & 4-2i & -1-3i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(4 \times 4)$$

Lösung 3. Sei $r = rankA$. Ist $r < n$, so gilt kann man mittels Gaussalgorithmus $(A|e_{r+1})$ in $(\tilde{A}|e_{r+1})$ umformen, wobei $\tilde{A}$ nun in Zeilenstufenform ist. Laut Vorlesung gibt es genau dann eine

Lösung der Gleichung $Ax = e_{r+1}$, wenn die Komponenten von e_{r+1} für $k > r$ verschwinden. Also gibt es keine Lösung von $Ax = e_{r+1}$ und daher ist A nicht invertierbar. (Sonst wäre $x = A^{-1}e_{r+1}$ eine Lösung).
Sei umgekehrt $r = n$. Dann gilt

$$\tilde{A}_{ii} \neq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

für die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ von A. Laut Vorlesung kann man damit $\tilde{A}$ durch Zeilenumformung auf die Einheitsmatrix bringen. Die Zeilenumformungen sind aber gegeben durch Multiplikation von Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_m$, so dass für $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1$ gilt:

$$BA = I$$

.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie: Gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, so ist $A - I$ invertierbar. Finden Sie in diesem Fall die Inverse.

(Hinweis: Zeigen Sie

$$I - A^m = (I - A)\left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i\right)(I - A)\,,$$

wobei $A^0 = I$ und $A^m = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ mal}}$).

Lösung 4.

$$(I - A)\left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} A^i - \sum_{i=1}^{m} A^i = I - A^m$$

und genauso für die zweite Gleichung. Gilt also $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ so gilt für

$$B = \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i\right)$$

aber

$$(I - A)B = B(I - A) = I - A^m = I\,.$$

also ist $-B = (A - I)^{-1}$.