



Universität Augsburg

Institut für
Mathematik

PROF. DR. KATRIN WENDLAND
PRIV. DOZ. DR. KATRIN LESCHKE
CHRISTOPH TINKL
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungsvorschläge zum Zusatzblatt (Rückblick)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Invertieren Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(5 \times 5)$$

Lösung 1. Die Inverse ist

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 31 & 21 & -55 & -40 & 58 \\ -16 & -12 & 28 & 22 & -28 \\ 16 & 12 & -22 & -22 & 22 \\ 18 & 12 & -30 & -24 & 30 \\ -5 & -3 & 11 & 8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). • Sei $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\dots,n} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit

$$a_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j = 1, \dots, n \\ 1 & \text{falls } i \neq j, i, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Determinante von A_n .

• Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie A^{-1} mit Hilfe von Streichungsmatrizen.

Lösung 2. Bestimmt man die Determinanten für $n = 1, 2, 3, 4$ so erhält man $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) = -1$, $\det(A_3) = 2$ und $\det(A_4) = -3$, was zur Vermutung

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

führt.

Dies versucht man mittels Induktion zu beweisen. Da sich die Determinante nicht ändert, wenn man von den Zeilen 1 bis $n-1$ jeweils die n -te Zeile abzieht, gilt

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entwickelt man nun nach der ersten Zeile, so erhält man vom Eintrag $(1, 1)$ den Beitrag $-\det(A_{n-1})$ und vom Eintrag $(1, n)$ die Determinante

$$(-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)^n \det(-I_{n-2}) = (-1)^{n-1},$$

wobei hier noch nach der ersten Spalte entwickelt wurde. Einsetzen der Induktionsannahme liefert dann

$$\det(A_n) = -(-1)^{n-2}(n-2) + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Erinnerung $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C$, wobei

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}.$$

Also:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$A^{-1} = \frac{1}{6-2-2+2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ ist.
2. Finden Sie die duale Basis von $\mathcal{B}$.

Lösung 3.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} = -1,$$

also ist $\mathcal{B}$ eine Basis. Die duale Basis erhält man als die Zeilen der inversen Matrix A^{-1} . Man berechnet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ -1 & 2 & i \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

also ist die duale Basis

$$\mathcal{B}^* = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(-i, i, 0), (-1, 2, i), (1, -1, -i)\},$$

wobei wir $w_i \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(1 \times 3) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}) = (\mathbb{C}^3)^*$ als lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^3$ nach $\mathbb{C}$ betrachten.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $V = \{p \mid p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades, sowie $F \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ die lineare Abbildung

$$F(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + 2a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1 + a_2).$$

Bestimmen Sie die Jordannormalform von F .

Lösung 4. Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ die Standardbasis von V . Dann ist die Matrix von F bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$p(x) = -x(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2})),$$

also sind die Eigenwerte $\lambda = 0, \lambda = 2 - \sqrt{2}, \lambda = 2 + \sqrt{2}$. Daher ist A diagonalisierbar, und die Jordannormalform von F ist

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Damit sind wir fertig!

Zur Übung berechnen wir auch noch die Jordanbasis, in diesem Falle also die Basis aus Eigenvektoren von F : Der Eigenraum von $\lambda = 0$ ist

$$\ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Eigenraum von $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ ist

$$\ker(A - (2 - \sqrt{2})) = \ker \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Eigenraum von $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ ist

$$\ker(A - (2 + \sqrt{2})) = \ker \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit haben wir eine Basis von Eigenvektoren von A . Umrechnen in eine Basis von V ergibt die Jordanbasis von F :

$$\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\} = \{-1 + x^2, 1 - \sqrt{2}x + x^2, 1 + \sqrt{2}x + x^2\}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass tatsächlich

$$F(p_1) = 0, F(p_2) = (2 - \sqrt{2})p_2, F(p_3) = (2 + \sqrt{2})p_3$$

gilt.