Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Lösungshinweise Blatt 10

(Jordan-Normalform)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $(2-\lambda)^6(3-\lambda)^2$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von A.

Lösung 1. 1. $P(x) = (2-x)^6(3-x)^2$

2. Die einzigen Eigenwerte sind offenbar $\lambda = 2, 3$.

3. Der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$ ist gegeben durch

$$W_{\lambda=3} = \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Span}\,\mathcal{B}_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

Der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 2$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W_{\lambda=2} &= \ker(A - 2\,\mathrm{Id})^6 = \mathrm{Span}\,\mathcal{B}_2 = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\ &= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2\\-2\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

4. Sei φ die Abbildung $x \mapsto Ax$. Betrachte die auf die verallgemeinerten Eigenräume eingeschränkten Abbildungen $\varphi_1 = \varphi|_{W_{\lambda=3}}, \varphi_2 = \varphi|_{W_{\lambda=2}}$. Da die verallgemeinerten Eigenräume φ–invariant sind, reicht es dann, diese in Jordannormalform zu bringen.

Vorteil: Man kann dann mit kleinen Blöcken rechnen. Und man weiß die Grösse des größten Blocks: ist $(A - \lambda \operatorname{Id})^m \neq 0$, $(A - \lambda \operatorname{Id})^{m+1} = 0$, dann ist der größte Block zum Eigenwert λ gerade von der Größe $m + 1$.

Nachteil: Man muß diese Einschränkungen erst einmal ausrechnen!

Also. Bestimme die Matrix A_1 von φ_1 bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ von $W_{\lambda=3}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Glück gehabt, dies ist bereits in Jordannormalform!

Bestimme die Matrix A_2 von φ_2 bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ von $W_{\lambda=2}$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Da wir A_1 bereits in Jordannormalform vorliegen haben, brauchen wir nur noch mit A_2 fortzufahren.

   Finde den Eigenraum von A_2:

$$\ker(A_2 - 2 \operatorname{Id}) = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Berechne B^m für $B = (A_2 - 2 \operatorname{Id})$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = 0$$

7. Finde Basis von $U_3 = W_{\lambda=2} \cap \operatorname{im} B^3$:

$$\mathcal{A}_3 = \{w_1^0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8. Finde Basis $\mathcal{A}_2$ von $U_2 = W_{\lambda=2} \cap \operatorname{im} B^2$ mit $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

9. Finde Basis $\mathcal{A}_1$ von $U_1 = W_{\lambda=2} \cap \operatorname{im} B$ mit $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A}_1 = \{w_2^0, w_1^0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

10. Finde w_j^i mit $Bw_j^i = w_j^{i-1}$:

$$w_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad w_2^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11. Jetzt muß man nur noch alles zusammenfassen!!!

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \cup \{v_2, v_4 + v_6, -v_1 - v_3 - v_4 - v_6, v_1 + 2v_4, v_1 + v_3 + v_5, -v_1 - v_3\}$$

ist eine Jordanbasis von A.

12. Die Jordannormalform ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Für eventuelle Tippfehler in diesen Rechnungen übernehmen wir keine Gewähr!!!

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Finden Sie eine invertierbare Matrix P, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, so dass

$$A = P(D + N)P^{-1}, \quad \text{sowie} \quad DN = ND\,.$$

- Berechnen Sie A^{50}.

Lösung 2. Das charakteristische Polynom ist $P(x) = (2-x)^3$, also ist der einzige Eigenwert $\lambda = 2$. Der Eigenraum ist

$$\ker(A-2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} w_1^0 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Da nur ein Eigenvektor existiert, kann die Jordannormalform nur aus einem Block bestehen, also

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N} .$$

Da D ein Vielfaches der Identität ist, kommutieren D und N, und N ist nilpotent, weil $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sowie $N^3 = 0$,
Die Jordanbasis $\mathcal{B} = (w_1^0, w_1^1, w_1^2)$ erhält man durch $(A-2)w_1^i = w_1^{i-1}$, also

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Damit ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{50} &= P(\sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} D^{50-k} N^k) P^{-1} = P(D^{50} + 50D^{49}N + 1225D^{48}N^2)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} & 1225 \cdot 2^{48} \\ 0 & 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 0 & 2^{50} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). 1. Zeigen Sie für $A, B \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit $AB = BA$, dass

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

gilt.

2. Zeigen Sie: Ist A trigonalisierbar, so gilt

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$$

3. Zeigen Sie: Für beliebiges $A \in \operatorname{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A} .$$

Lösung 3. Das Cauchy-Produkt von unendlichen Reihen gibt

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{n-k} B^k}{(n-k)!k!}$$

Daher ist (siehe Übung, hier geht $AB = BA$ ein)

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = e^A e^B \,.$$

Ist A trigonalisierbar, dann gibt es eine invertierbare Matrix P, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente, obere Dreiecksmatrix N, so dass $DN = ND$ und $A = P(D+N)P^{-1}$. Also ist

$$\det e^A = \det e^{P(D+N)P^{-1}} = \det(Pe^{D+N}P^{-1}) = \det e^{D+N} = \det e^D \,.$$

Andererseits $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(D+N) = \operatorname{tr} D$. Wie schon auf dem 7. Übungsblatt gezeigt, folgt daraus die Behauptung.

Ist $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, dann können wir A auch als komplexe Matrix auffassen $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Da das charakteristische Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt, ist A über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar. Die gleichen Argumente wie eben zeigen dann die Behauptung.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $V = \{p \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, a_i \in \mathbb{R}, n \leq 4\}$ der Vektorraum der Polynome höchstens vierten Grades, sowie $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ die lineare Abbildung

$$D(p) = p' \,.$$

Bestimmen Sie die Jordannormalform von D.

Lösung 4. Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ die Standardbasis für V. Da $D1 = 0$, $Dx = 1$, $Dx^2 = 2x$, $Dx^3 = 3x^2$, $Dx^4 = 4x^3$, hat D bezüglich $\mathcal{B}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A hat offensichtlich 0 als einzigen Eigenwert (obere Δ–Matrix) mit einzigem Eigenvektor $v = {}^t(1,0,0,0,0)$, also kann nur ein Block in der Jordannormalform erscheinen:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(Die Jordanbasis ist $\mathcal{A} = \{1, x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3, \frac{1}{24}x^4\}$)