Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Priv. Doz. Dr. Katrin Leschke
Christoph Tinkl
SS 2007

Lineare Algebra II, Blatt 10

(Jordan-Normalform)

Abgabe: bis Montag, den 9. 7., 10:00 Uhr.

Dies ist das letzte Übungsblatt in diesem Semester. Die Klausur findet am 14.7., 10-12, Uhr statt. Die Anmeldung zur Klausur erfolgt in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $(2-\lambda)^6(3-\lambda)^2$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von A.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Finden Sie eine invertierbare Matrix P, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, so dass
$$A = P(D+N)P^{-1}, \quad \text{sowie} \quad DN = ND\,.$$
- Berechnen Sie A^{50}.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

1. Zeigen Sie für $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit $AB = BA$, dass
$$e^{A+B} = e^A e^B$$
gilt.
2. Zeigen Sie: Ist A trigonalisierbar, so gilt
$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$$
3. Zeigen Sie: Für beliebiges $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt
$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $V = \{p \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, a_i \in \mathbb{R}, n \leq 4\}$ der Vektorraum der Polynome höchstens vierten Grades, sowie $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ die lineare Abbildung

$$D(p) = p'\,.$$

Bestimmen Sie die Jordannormalform von D.