



Lineare Algebra II, Blatt 1

(Matrizenmultiplikation, Gaußalgorithmus, Inverse)

Abgabe: bis Montag, den 30. 4., 10:30 Uhr.

Achtung: Die Einteilung in die Übungsgruppen ist abgeschlossen, die Liste finden Sie online und am Schwarzen Brett des Lehrstuhls Analysis und Geometrie.

Gehen Sie bitte nur in die Übung, für die Sie eingeteilt sind! Falls Ihre Matrikelnummer nicht auf dem Aushang ist, wenden Sie sich bitte an K. Leschke, L1 2020.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & \beta + 2 \\ \alpha x_1 & + & 2\alpha x_2 & + & (\alpha + 2)x_3 & + & (2\alpha + 2)x_4 & = & \alpha + 4 \end{array}$$

Für die ermittelten Werte berechne man jeweils die Lösungsmenge.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man zeige, dass die $n \times n$ Permutationsmatrizen bezüglich der Matrixmultiplikation eine Untergruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen bilden.

(Hinweis:

Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ ist genau dann eine Permutationsmatrix, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \forall i, j = 1, \dots, n : a_{i,j} &\in \{0, 1\} \\ \forall j = 1, \dots, n : \sum_{i=1}^n a_{i,j} &= 1 \\ \forall i = 1, \dots, n : \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 \end{aligned} \quad)$$

Aufgabe 3. • Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\text{rank } A = n$ ist.

• Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(5 \times 5), & B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(4 \times 4), \\ C &= \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i & 0 \\ i & -1 & 2i & 1 \\ i & -1+i & i & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(4 \times 4) \end{aligned}$$

bitte wenden!

Aufgabe 4. Sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$. Zeigen Sie: Gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, so ist $A - I$ invertierbar. Finden Sie in diesem Fall die Inverse.

(Hinweis: Zeigen Sie

$$I - A^m = (I - A) \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i \right) (I - A),$$

wobei $A^0 = I$ und $A^m = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ mal}}$).