## Tout d'abord, une intégrale

Que pensez vous de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \quad ?$$

## Ensuite, quelques séries

Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ , où $\theta \in \mathbb{C}$ ,
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ ,
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ .

## Une autre intégrale

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

## Puis une autre série !

Nature et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$.

## Encore plus de séries !

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$, où $\alpha > 0$ ;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{in\varphi}}$, où $\theta$, $\varphi \in \mathbb{R}$ ;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha + e^{in\varphi}}$, où $\theta$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

## Séries de Hardy

Soit $\alpha$ un réel. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\alpha \leqslant 0$,
2. $\alpha > 1$,
3. $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$,
4. $\alpha = \frac{1}{2}$, *en effectuant un développement asymptotique de* $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$,
5. $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

## Série lentement convergente

1. Soit $f\colon [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et soit non nulle. Etablir, pour tout $t > 0$, la convergence de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)\ ,$$
et donner un équivalent de sa somme lorsque $t \to 0^+$.
2. En déduire un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de
$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$
*On admettra que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## Estimation d'une somme partielle

Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n^{2/3}}$.

## Patatras

On dispose d'une infinité de morceaux de sucre identiques (Chouette !). On en empile quelques uns en décalant légèrement chaque morceau par rapport au précédent, toujours dans le même sens. Quelle portée latérale maximale peut-on atteindre ainsi ?

## Deux équivalents

1. (*Formule de Stirling*) Soit $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. En considérant la série de terme général $\log(u_{n+1}/u_n)$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, lorsque $n \to +\infty$,

$$n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

2. En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$.

## Un peu d'arithmétique

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

## Un nombre de Pisot et son collègue transcendant

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$,
2. $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi e n!\right)$.

## Somme de sommes

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ diverge, et on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

2. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ converge, et on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

**Pour se remettre dans le bain**

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)(\log\log x)}$ ?

**Zone d'importance 1**

On considère l'intégrale à paramètre

$$\begin{array}{rccc} I : & ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx \end{array}.$$

Vérifier qu'elle est bien définie, et en donner un équivalent lorsque $t \to 0^+$.

**Zone d'importance 2 : phase stationnaire**

Donner un équivalent lorsque $t \to +\infty$ de l'intégrale à paramètre

$$\begin{array}{rccc} I : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \cos x \; e^{it\,chx} dx \end{array}.$$

**Méthode de Laplace**

On rappelle que la *fonction gamma*, définie par

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \end{array},$$

vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ , ainsi que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Le but de ce problème est de trouver un équivalent en $+\infty$ d'intégrales à paramètre de forme

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx$$

où les fonctions $f$ et $g$ vérifient certaines conditions.

1. (Préliminaire) Soient $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et $b \in ]0,+\infty]$. On pose, pour tout $t > 0$,

$$J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta} dx.$$

Montrer que lorsque $t \to +\infty$,

$$J(t) \sim \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

Soient à présent $f$ et $g$ deux applications localement continues par morceaux de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que

(i) L'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x)|e^{g(x)}dx$ converge,

(ii) $\exists \delta_0 > 0 \colon \forall \delta \in ]0, \delta_0[, \forall x \geqslant \delta, g(x) \leqslant g(\delta)$,

(iii) On ait en $0^+$ les développements asymptotiques $f(x) \sim Ax^\alpha$ et $g(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$, avec $\alpha > 1$, $c > 0$ et $\beta > 0$.

On pose alors, pour $t \geqslant 1$,

$$I(t) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx.$$

L'objet des prochaines questions est de prouver que, lorsque $t \to +\infty$,

$$I(t) \sim \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

2. Expliquer comment on peut se ramener au cas $a = 0$ et $A = 1$.
   On fixe à présent $\varepsilon \in ]0, 1[$, et on pose, pour alléger le calcul,
$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$
3. Montrer que $\exists \delta \in ]0, \delta_0[, \exists t_1 > 0 \colon \forall t \geqslant t_1$,
$$(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t) \leqslant \int_0^\delta f(x)e^{tg(x)}dx \leqslant (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t).$$
4. Montrer que, $\delta$ et $t_1$ étant ainsi fixés, il existe aussi $t_2 > 0$ tel que
$$\forall t \geqslant t_2\,, \int_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{tg(x)}dx \leqslant \varepsilon\varphi(t),$$
   et conclure.
5. (Corollaire) Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, f étant localement continue par morceaux et $g$ étant de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant
   (i) L'intégrale $\int_a^b |f(x)|e^{g(x)}dx$ converge, et
   (ii) $g'$ ne change de signe qu'en un seul point $c \in ]a, b[$, où de plus $g$ atteint son maximum, avec $f(c) \neq 0$ et $g''(c) < 0$.
   Montrer que, lorsque $t \to +\infty$,
$$\int_a^b f(x)e^{tg(x)}dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(c)|t}}f(c)e^{tg(c)}.$$
6. (Application) Montrer la *formule de Stirling généralisée* :
   Lorsque $x \to +\infty$, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$ .
7. (Application) Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de la *transformée de Mellin*
$$\mathcal{M}\{\sin\} \colon t \longmapsto \int_0^\pi x^{t-1}\sin x\, dx.$$
8. (Application) Soit $\alpha \in ]0, 1[$. Donner un équivalent, lorsque $t \to 0^+$, de
$$I(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right)dx.$$