Rayon de convergence 1

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 z^n$?

Rayon de convergence 2

Déterminer le rayon de convergence et étudier la convergence au bord de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Rayon de convergence 3

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (non nécessairement convergente). On pose

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k.$$

   Montrer que ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Donner des exemples. A quelle condition a-t-on $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$?

2. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Démontrer que

$$R = \liminf_{n\to+\infty} |a_n|^{-1/n}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n \sin n} z^n.$$

Calcul de $\zeta(2)$

1. Démontrer que la série de fonctions

$$t \longmapsto \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$

   converge normalement vers l'identité sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

2. En intégrant, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Quelques calculs de sommes

Après avoir déterminé leur rayon de convergence, sommer les séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!} x^n,\ \theta \in \mathbb{R}.$

Quelques développements

Démontrer que les applications suivantes sont somme d'une série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de cette série :

1. $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (\arcsin x)^2$
2. $f\colon]0,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

Série lacunaire

Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(6n+1)!}$. On pourra exprimer, pour tous $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in [\![0, a[\![$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{an+b}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

Prescription des dérivées : théorème de Borel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'importe quelle suite complexe. L'obectif de cet exercice est la construction d'une application $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = a_n,$$

sans aucune réserve sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Expliquer comment construire une application $\chi\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, valant identiquement 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et nulle hors de $[-1,1]$ (De telles choses s'appellent *fonctions plateau*).
2. Construire f en utilisant χ.

Formule de Cauchy et théorème de Liouville

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Montrer qu'on peut récupérer les coefficients a_n grâce à la *formule de Cauchy* :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0, R[, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

2. Dans cette question, on suppose que $R = +\infty$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante (C'est le théorème de Liouville). Que dire du sinus sur $\mathbb{C}$?
3. Dans cette question, on suppose à nouveau que $R = +\infty$. Montrer que s'il existe un entier m tel que $f = O(|z|^m)$ lorsque $z \to \infty$, alors f est un polynôme, de degré au plus m.
4. Dans cette question, on suppose que $R \geqslant 1$, et on suppose en outre que les coefficients a_n sont tous entiers (relatifs). Montrer que si f est bornée sur le disque unité ouvert, alors f est un polynôme.

Théorème d'Abel

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence au moins 1 telle que $\sum a_n$ converge. Montrer le *théorème d'Abel* :

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

   Que dire si $\sum a_n$ converge absolument ?
2. La réciproque du théorème d'Abel est elle vraie ?
3. (Application) Evaluer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

Bieberbach réel

Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence au moins 1, *à coefficients réels*, et injective sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Soit $|z| < 1$. Montrer que $f(z)$ est réel si et seulement si z l'est. En déduire que $\Im f(z)$ a le même signe que $\Im z$.
2. Montrer la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin nx| \leqslant n|\sin x|$. En calculant $\int_0^\pi \Im f(re^{it}) \sin nt dt$ pour $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que $|a_n| \leqslant n$ pour tout n.
3. Cette inégalité est-elle optimale ?

Equivalent au bord

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que $\sum b_n$ diverge. On pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

et on suppose que le rayon de convergence des séries entières définissant a et b ont toutes deux un rayon de convergence supérieur à 1.

1. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, alors
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a(x)}{b(x)} = \ell.$$
2. Montrer que si on suppose seulement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell$, alors on a encore
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a(x)}{b(x)} = \ell.$$
3. (Application) Montrer que lorsque $x \to 1^-$, on a les équivalents
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} \sim -\frac{\ln(1-x)}{\ln a}\ (a \in \mathbb{N},\ a \geqslant 2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Faites de la monnaie

1. De combien de façons différentes peut-on former la somme d'un million d'euro avec des pièces de 1, de 2 et de 5 ?
2. Plus généralement, imaginons un lointain pays où les r différentes pièces de monnaie ont pour valeur respective $v_1, \cdots, v_r$. Naturellement, dans ce lointain pays, les v_i sont premiers entre eux dans leur ensemble (pourquoi est-ce forcément le cas ?). On note N_n le nombre de façons de former la somme n (en la monnaie locale). Donner alors un équivalent des N_n.
3. Montrer que tout entier naturel n s'écrit exactement d'autant de façons sous forme de somme d'entiers impairs que comme somme d'entiers distincts.

Partitions de $\mathbb{N}$

1. Est-il possible de partitionner $\mathbb{N}$ en un nombre fini (mais supérieur ou égal à deux) de progressions arithmétiques de raisons toutes distinctes ?
2. Existe-t-il une partition de $\mathbb{N}$ en deux ensembles A et B telle que tout entier naturel n s'écrive d'autant de façons comme somme de deux éléments distincts de A à l'ordre près que comme somme de deux éléments distincts de B à l'ordre près ?

Connexité par arcs dans un groupe topologique

Soit G un groupe topologique, c'est-à-dire un groupe qui est aussi un espace métrique de sorte que la multiplication et l'inversion du groupe soient continues. Montrer que la composante connexe par arc du neutre de G est un sous-groupe distingué.

Il y bien un chemin quelquepart...

1. Une partie codénombrable de $\mathbb{R}^2$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?
2. Montrer que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, le complémentaire de tout compact est connexe par arcs. Est-ce encore vrai en dimension finie ?