Racines carrées de matrices

Calculer une racine carrée dans $M_2(\mathbb{C})$ de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quant à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y admet-elle une racine carrée ?

Chemins sur un cube

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un cube, dont on choisit deux sommets A et B éventuellement confondus. Calculer le nombre de chemins joignant A à B et formés de n arêtes de ce cube.

Représentation de groupes finis

Soit G un groupe fini. On appelle *représentation de* G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et ρ un morphisme (pas forcément injectif ni surjectif) de G dans $GL(V)$. On dit que V est *irréductible* si les seuls sous-espaces de V stable par tous les $\rho(g)$ sont $\{0\}$ et V lui-même.

1. (Exemple) Construire une représentation non-triviale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Est-elle irréductible ?
2. Pour toute représentation (V, ρ) de G, on note
$$V^G = \{x \in V | \forall g \in G, \rho(g)(x) = x\}.$$
Que dire de V^G ? Montrer que l'endomorphisme $\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ est un projecteur d'image V^G. En déduire que
$$dim\, V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr\, \rho(g).$$
3. Étant données deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) d'un même groupe G, on appelle *morphisme de représentations* toute application linéaire $\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$ telle que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$. Montrer que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors φ est soit nulle, soit bijective, puis montrer que si $(V_1, \rho_1) = (V_2, \rho_2)$ est irréductible, alors φ est une homothétie.
4. On suppose que G est fini et abélien. Montrer que les éléments de $Im\, \rho$ sont alors codiagonalisables.

Déterminant circulant

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n nombres complexes. On considère la *matrice circulante*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Réduire A, et en déduire $\det A$. On pourra exprimer A en fonction de

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Le polynôme minimal est caché quelque part

Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $\mu_f \in K[X]$ le polynôme minimal de f, et, pour tout $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire de $K[X]$ de plus bas degré tel que $P_x(f)(x) = 0$, et $E_x = \{P(f)(x), P \in K[X]\}$.

1. Montrer que P_x est toujours bien défini et qu'il divise toujours μ_f.
2. Montrer que E_x est un sous-espace vectriel de E. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que si $E_x \cap E_y = \{0\}$, alors $P_{x+y} = P_x \vee P_y$. Généraliser au cas de plusieurs vecteurs $x_1, \cdots, x_k$.
4. Montrer que si $P_x \wedge P_y = 1$, alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser au cas de plusieurs vecteurs.
5. Soit Π un facteur irréductible de μ_f, de multiplicité α. Montrer qu'il existe $x \in \operatorname{Ker} \Pi^\alpha(f)$ tel que $P_x = \Pi^\alpha$.
6. Que peut-on en déduire ?

Réduction et topologie

1. Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. Que dire de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\Gamma_M = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si Γ_M est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. Quel est l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$?

Une identité sur le polynôme caractéristique

Soit K un corps commutatif. Si A est une matrice de $M_n(K)$, on note $\chi_A \in K[X]$ son polynôme caractéristique. Soient $A, B \in M_n(K)$.

1. On suppose dans cette question que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Montrer que c'est encore vrai si le corps K est infini.
3. Est-ce toujours vrai si K est fini ?

Décomposition de Dunford

Soit K un corps commutatif, et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Si f est un endomorphisme de E, on note $\chi_f \in K[X]$ son polynôme caractéristique. On veut montrer que, sous certaines réserves, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit *de manière unique* $f = d+n$, où $d \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, $n \in \mathcal{L}(E)$ est nipotent, et n et d commutent.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $F \in K[X]$ un polynôme annulateur de f, se factorisant dans $K[X]$ en
$$F = \prod_{i=1}^{s} F_i^{\alpha_i},$$
les F_i étant distincts et irréductibles sur $K[X]$. Pour chaque i, on définit le *sous-espace caractéristique*
$$N_i = \text{Ker } F_i^{\alpha_i}(f).$$
Pourquoi a-t-on
$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i \text{ ?}$$
Soit p_i le projecteur de E sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$. Quelle relation a-t-on entre les p_i ?

2. En considérant les polynômes

$$Q_i = \prod_{j \neq i} F_j^{\alpha_j} ,$$

montrer que les $p_i = P_i(f)$ sont des polynômes en f.

3. On suppose dorénavant que χ_f est scindé sur K. Montrer que f s'écrit $f = d + n$ avec d et n comme dans l'énoncé.
4. En considérant $\frac{1}{\chi_f} \in K(X)$, donner un moyen de calcul pratique des polynômes P_i tels que $p_i = P_i(f)$.
5. Démontrer la clause d'unicité.
6. On suppose à présent que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on définit l'*exponentielle de matrice* par

$$\forall A \in M_n(K), \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in M_n(K).$$

Comment calcule-t-on l'exponentielle d'une matrice si celle-ci est diagonalisable ? Expliquer en détail comment la décomposition de Dunford vient à notre secours lorsque ce n'est pas le cas.

7. Calculer l'exponentielle de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Théorème de Perron-Frobenius et *PageRank* de Google

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On note $A \geqslant 0$ si $\forall i, j, a_{i,j} \geqslant 0$; $A > 0$ si $A \geqslant 0$ et $A \neq 0$; et enfin $A \gg 0$ si $\forall i, j, a_{i,j} > 0$. On définit les mêmes notations pour les vecteurs $X \in R^n$, et on écrira $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$, *etc.*

On se donne une matrice $A \gg 0$.

1. On pose
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : X \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$
et on définit $\Lambda_A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists X \in \mathcal{S} \colon AX \geqslant \lambda X\}$. Montrer que Λ_A est majoré et que son supremum λ_0 est une valeur propre de A, associée à un vecteur propre $X_0 \gg 0$. Montrer que le sous-espace propre associé à λ_0 est une droite vectorielle.
2. Montrer qu'une éventuelle autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda_0$ de A vérifie $|\lambda| < \lambda_0$.
3. Proposer une méthode restant efficace même si n est très grand pour approximer X_0.