La constante de Khintchine

Nicolas Mascot

TNT HD

23 octobre 2012

Fractions continuées

Nous allons parler de *fractions continuées*.

Voici une fraction continuée :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \qquad (a_i \in \mathbb{N}^*)$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée.

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1941}{6842}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\ 625}{6\ 842} = 2 + \frac{1}{\frac{6842}{1941}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\ 625}{6\ 842} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1\ 019}{1\ 941}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\ 625}{6\ 842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1\ 019}{1\ 941}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{922}{1\ 019}}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\ 625}{6\ 842} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1\ 019}{1\ 941}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{922}{1\ 019}}} = \cdots$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{48}}}}}}}.$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}.$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\begin{array}{rcl} \pi_0 & = & 3 = 3 \\ & & \pi = 3.14159265358979\cdots \end{array}$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\begin{aligned} \pi_1 = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} &= \color{red}{3.14}\color{black}{285714285714} \\ \pi &= \color{red}{3.14}\color{black}{159265358979}\cdots \end{aligned}$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\pi_2 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3.14150943396226\cdots$$

$$\pi = 3.14159265358979\cdots$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\pi_3 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = {\color{red}3.1415929}2035398\cdots$$

$$\pi = {\color{red}3.1415926}5358979\cdots$$

Notation

Nous noterons $a_i(x)$ les coefficients du développement en fraction continuée d'un réel $x \in \mathbb{R}$:

$$x = a_0(x) + \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \ddots}}}$$

Le théorème de Khintchine

Théorème (Khintchine, 1935)

Pour presque tout réel x (au sens de Lebesgue),

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x)\cdots a_n(x)} = K, \text{ où}$$

$$K = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2.685452\cdots$$

est la *constante de Khintchine*.

Ergodicité

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T \colon X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Ergodicité

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T\colon X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

Ergodicité

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T\colon X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

1. $\forall E \in \mathcal{X},\ \mu\big(T^{-1}(E)\big) = \mu(E)$,

Ergodicité

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T \colon X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

1. $\forall E \in \mathcal{X}$, $\mu\big(T^{-1}(E)\big) = \mu(E)$,
2. $\forall E \in \mathcal{X}$, $T^{-1}(E) = E \Longrightarrow \mu(E) = 0$ ou 1.

Le théorème ergodique de Birkhoff

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T \colon X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Théorème (Birkhoff, 1933)

Si T est ergodique, alors pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) = \int_X \varphi(x) \mu(dx)$$

pour μ-presque tout x.

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne.

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la *mesure de Gauss-Kuzmin*

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la *mesure de Gauss-Kuzmin*

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin est

$$\begin{array}{rcl} T : X & \longrightarrow & X \\ \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} & \longmapsto & \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}} \end{array}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la *mesure de Gauss-Kuzmin*

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin est

$$T : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \{1/x\} \end{array}.$$

μ est T-invariante

$$
\begin{aligned}
T^{-1}([0;t]) &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \{1/x\} \leqslant t \right\} \\
&= \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^* : \; n \leqslant 1/x \leqslant n+t \right\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+t} \, ; \frac{1}{n} \right] \cap X
\end{aligned}
$$

μ est T-invariante

$$T^{-1}([0;t]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+t}\,;\frac{1}{n}\right] \cap X$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu\big(T^{-1}([0;t])\big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\ln 2}\int_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+t}}\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+t}{n}\,\frac{n+1}{n+t+1}\right) \\
&= \ln(1+t) = \mu([0;t]).
\end{aligned}$$

Un théorème de Lebesgue

Théorème de différentiation de Lebesgue (1910)

Soit $f \in L^1([0;1])$. Pour presque tout $x \in [0;1]$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt = f(x).$$

Un théorème de Lebesgue

Théorème de différentiation de Lebesgue (1910)

Soit $f \in L^1([0;1])$. Pour presque tout $x \in [0;1]$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt = f(x).$$

Corollaire (Théorème de densité de Lebesgue)

Soit $E \subseteq [0;1]$ une partie mesurable. Pour presque tout $x \in E$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\lambda(E \cap [x-\varepsilon; x+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$

T est ergodique

Soit $E \subset X$ telle que $T^{-1}(E) = E$, avec $\lambda(E) = d < 1$. Soit $\xi \in X$, notons $\xi_{2n-1} = \frac{p}{q}$ et $\xi_{2n} = \frac{p'}{q'}$. Soient $s = \frac{p}{q}$ et $t = \frac{p+p'}{q+q'}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t-s}\int_s^t \mathbb{1}_E(y)dy &= q'(q+q')\int_s^t \mathbb{1}_E(y)dy \\
&\underset{y=\frac{px+p'}{qx+q'}}{=} q'(q+q')\int_0^1 \mathbb{1}_E(x)\frac{dx}{(qx+q')^2} \\
&\leqslant q'(q+q')\int_0^d \frac{dx}{(qx+q')^2} \\
&= \cdots < 1.
\end{aligned}
$$

Donc $\mu(E) = 0$ d'après le théorème de densité de Lebesgue.

Le théorème de Lévy

Soit $m \in \mathbb{N}^*$; prenons $\varphi(x) = \mathbb{1}_{a_1(x)=m}$.
Alors d'après le théorème ergodique, pour presque tout x,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{a_1(T^k x)=m} &= \int_0^1 \mathbb{1}_{a_1(x)=m}\, \mu(dx) \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{a_k(x)=m} &= \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{dx}{1+x} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{m(m+2)}\right).
\end{aligned}$$

Le théorème de Lévy

Théorème (Lévy, 1937)

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la proportion de m dans le développement en fraction continuée de presque tout réel x est $\frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{m(m+2)}\right)$.

Le théorème de Lévy

$$\mathbb{P}(a_k(x) = m) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{m(m+2)}\right)$$

Valeur de m	Fréquence
1	$41,5\,\%$
2	$17,0\,\%$
3	$9,3\,\%$
4	$5,9\,\%$
5	$4,1\,\%$
10	$1,2\,\%$
42	$0,078\,\%$
100	$0,014\,\%$
> 100	$1,4\,\%$

Le théorème de Khintchine

À présent, prenons $\varphi(x) = \ln a_1(x)$. Nous obtenons pour presque tout x

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k(x) &= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \ln a_1(x)\frac{dx}{1+x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln 2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à l'exponentielle.

Le théorème de Khintchine

Théorème (Khintchine, 1935)

Pour presque tout réel x,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x)\cdots a_n(x)} = K, \text{ où}$$

$$K = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2.685452\cdots$$