Oublier la loi du groupe pour obtenir un invariant universel faible des nœuds

Victoria
LEBED

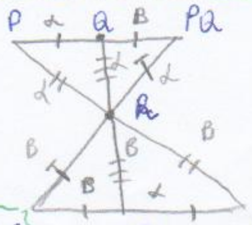
version 1h

Plan :

- ⧖) Motivations algébriques
- ◁) Exemples
-) L'invariant
- ⅓) Plus de topologie : tresses
- ≥) L'ordre de Dehornoy sur les tresses

X) Motivations algébriques

Wraith, collège : 2 exemples

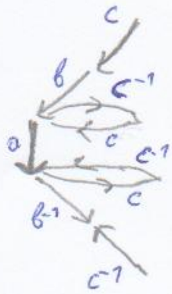
1) 

$\boxed{(PQ)R = (PR)(QR)}$

2) $a, b, c \in S_5$

$a * b = b^{-1} a b$

$\boxed{(a*b)*c = (a*c)*(b*c)}$



Wraith & Conway, 59 :

- système auto-distributif (SAD) : ensemble A + ($\triangleleft : A \times A \to A$) ("triangle")
  qui satisfont

R3	$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$	$\forall a, b, c \in A$
R2	$(a \tilde{\triangleleft} b) \triangleleft b = a = (a \triangleleft b) \tilde{\triangleleft} b$	$\forall a, b \in A$
R1	$a \triangleleft a = a$	$\forall a \in A$

- (w)rack = SAD + ($\tilde{\triangleleft} : A \times A \to A$) + R2
  "wracks & ruins of a group" + référence à Wraith

Joyce, 82 :

- quandle = rack + R1
  un mot qui ne veut rien dire

Rmq : Cette terminologie est loin d'être unique.

$\lhd$1) Exemples des quandles

(0) trivial: $a \lhd b = a = a \tilde{\lhd} b$

(1) linéaire: A est k-e.v., $\alpha \in k^*$, $a \lhd b = \alpha a + (1-\alpha) b$, $a \tilde{\lhd} b = \frac{1}{\alpha} a + (1-\frac{1}{\alpha}) b$ Exo: exemple 1 de Wraith.

(a) dihédral: $k = \mathbb{F}_p$, $R_p = (\mathbb{F}_p, a \lhd b = a \tilde{\lhd} b = 2b - a)$

(b) d'Alexander: $k = \mathbb{Q}(T)$, A est k-e.v., $Al(A) = (A, a \lhd b = Ta + (1-T) b)$.

(2) conjugaison: $Conj_n(\underset{\text{grpe}}{G}) = (G, a \lhd b = b^{-n} a b^{n}, a \tilde{\lhd} b = b^{n} a b^{-n})$.

Rmq: $\underset{\text{quandle libre}}{FQ_X}$ est un sous-quandle de $Conj(\underset{\text{grpe libre}}{FG_X})$ $\Rightarrow$ un exemple crucial.

Le groupe enveloppant du quandle Q: $G(Q) \overset{\text{déf}}{=} FG_Q / b^{-1} a b = a \lhd b$.

Rmq: $G(FQ_X) \simeq Conj(FG_X)$.

(3) $\underset{\text{lacets}}{Core}(\underset{\text{grpe}}{G}) = (G, a \lhd b = b a^{-1} b = a \tilde{\lhd} b)$.

(4) Coxeter: $V \simeq k^n$, muni d'une forme · bilin. · sym. · non-dég. $\rightsquigarrow C(V) = (V \setminus \{0\}, a \lhd b = a - 2 \frac{(a,b)}{(b,b)} b)$.

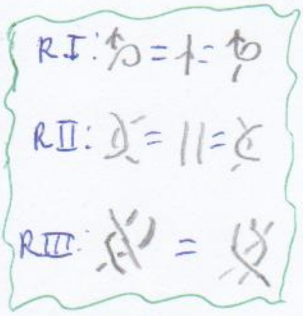
R2 & R3, mais pas R1: $a \lhd a = -a$.

(5) Booléen: $(A, *)$ satisfont $a * b = b * a$, $a * a = a \rightsquigarrow (A, a \lhd b = a * b)$.

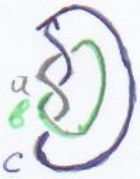
R1 & R3, mais pas R2.

§3 Le quandle d'un noeud

<u>Th. (Reidemeister, 20')</u> :
"noeuds = diagrammes / RIII, RII, RI"



<u>Ex</u> : noeud de trèfle



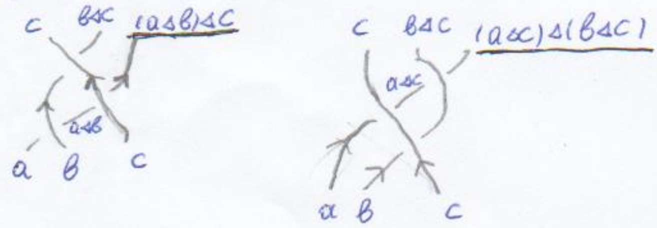
$Q(\text{trèfle}) = Q(D) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quandle} \\ \text{libre}}}{FQ}\langle a, b, c\rangle \Big/ \begin{matrix} a = c \triangleleft b \\ c = b \triangleleft a \\ b = a \triangleleft c \end{matrix}$

$\simeq FQ\langle a, b\rangle \Big/ \begin{matrix} a = (b \triangleleft a) \triangleleft b \\ b = a \triangleleft (b \triangleleft a) \end{matrix}$

$K \rightsquigarrow D_K \rightsquigarrow$ quandle $Q(D_K)$ $=: Q(K)$, avec :
- 1 générateur par arc
- 1 relation par croisement :  $\rightsquigarrow c = a \triangleleft b$.

<u>Prop.</u> : $Q(D_K)$ ne dépend que de K.

◁ RIII :



$\rightsquigarrow$ R3

RII $\rightsquigarrow$ R2

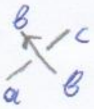
RI $\rightsquigarrow$ R1 ▷.

<u>Th. (Joyce, Matveev, 82)</u> : On obtient un <u>invariant faible des noeuds</u>.
i.e. $Q(K_1) \simeq Q(K_2) \Rightarrow K_1 = K_2$ ou $K_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{orientation opposée}}}{-}K_2^{*}$ ← image miroir

[<u>Rmq</u> : Cet invariant précise le gpe fondamental du noeud : $\underbrace{G(Q(K)) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)}_{\text{rep. de Wirtinger}}$]

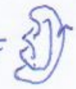
<u>Pb</u> : Les quandles sont difficiles à comparer.

<u>Solution</u> : Regarder $\underset{\substack{\text{déf} \,/\!/ \\ A\text{-coloriages de } K}}{\underline{\mathrm{Hom}_{\text{quandles}}(Q(K), A)}}$, e.g. $\mathcal{M}_{K,A} := \#\mathrm{Hom}_{qu.}(Q(K), A)$ pour A fini.
(A ← bien étudié ; $\mathcal{M}_{K,A}$ ← invariants de comptage des coloriages)

<u>Ex</u> : (1)(a)  $c = a \triangleleft b = \underset{(\mathrm{mod}\, p)}{2b - a}$, i.e. $2b = c + a$

$\mathcal{M}_{K, R_p} = \#(p\text{-coloriages de } K)$

$n = 3$: soit $a = b = c$, soit $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$ $\rightsquigarrow$ Fox, 50'

<u>application</u> : $\mathcal{M}_{O, R_3} = 3$, $\mathcal{M}_{\text{trèfle}, R_3} = 3 + 3! = 9 \neq 3 \Rightarrow O \neq$ 

$\frac{11}{11}$) Plus de topologie : tresses

Groupes de tresses : $B_n = \{\text{tresses à } n \text{ brins}\}/\text{isotopie}$

$\boxed{t} \cdot \boxed{t'} = \begin{matrix}\boxed{t}\\ \boxed{t'}\end{matrix}$

"$B_n = \underset{\text{diagrammes}}{\mathcal{D}_n}/_{R\text{II}, R\text{III}}$"

"$B_n^+ = \mathcal{D}_n^+/_{R\text{III}}$" - tresses positives

$\boxed{\times > 0}\ \boxed{\times < 0}$
interdit !

$t \in B_n^+ \rightsquigarrow \mathcal{D}_t \in \mathcal{D}_n^+ \rightsquigarrow SAD(\mathcal{D}_t) = SAD(t)$ $\quad$ $\begin{matrix} e_1(\bar a) \dots e_4(\bar a) \\ \boxed{t} \\ a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \end{matrix}$ $\xrightarrow{A\text{-SAD gen}} \theta(t, A) \in End(A^{\times n}) : \bar a \mapsto \bar e(\bar a)$

$t \in B_n \rightsquigarrow \mathcal{D}_t \in \mathcal{D}_n \rightsquigarrow \underset{}{\overset{\text{rack}}{R}}(\mathcal{D}_t) = R(t)$ $\xrightarrow{A\text{-rack gen}} \theta(t, A) \in End(A^{\times n})$

Prop. : $B_n^+ \curvearrowright A^{\times n}$ $\forall$ SAD A,
$B_n \curvearrowright A^{\times n}$ $\forall$ rack A.

Ex. : 1) b) $A = \mathbb{Q}(T)$, $a \triangleleft b = Ta + (1-T)b$
$a \,\hat{\triangleleft}\, b = T^{-1}a + (1-T^{-1})b$

$B_n \curvearrowright \mathbb{Q}(T)^{\oplus n}$
$B_n \to GL_n(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}])$
représent^n de Burau

2) Dehornoy, 91 : B_n est ordonnable

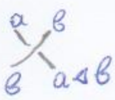
déf. 1 (utilisable) : admet un ordre total invar. par mult^n à gauche
déf. 2 (vérifiable) : $B_n = (B_n)_+ \sqcup \{1\} \sqcup (B_n)_+^{-1}$, avec $(B_n)_+^2 \subseteq (B_n)_+$. $\quad$ $a < b \Leftrightarrow a^{-1}b \in (B_n)_+$

exo

$\mathcal{D}_1 :=$ SAD libre engendré par 1 él^{nt}
ordre : $a < b \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} b = c \triangleleft a$

Prop. : cet ordre est total & strict.

$B_n^+ \curvearrowright \mathcal{D}_1^{\times n}$ $\quad$ idée : éteindre cette action à une partie de $B_n \times \mathcal{D}_1^n$, e.g. :



$(B_n)_+ := \{ w \in B_n \mid \exists\, \bar a \in \mathcal{D}_1^n \text{ avec } w\bar a \text{ défini } \& \ w\bar a > \bar a \}$
l'ordre lexicographique engendré par celui de $\mathcal{D}_1$