Billard (n. m.) : ensemble de billes arrondissant le nombre π.

Victoria
LEBED

1 Quelques anecdotes

Origines du nom :

① Version fausse mais jolie : ← "Bill's yard", où :

- Bill = un tailleur anglais (Londres, 1560),
- yard = le mètre de couturier à l'aide duquel il poussait des billes sur son comptoir.

② Vraie version : ← "bille" (dans le sens "pièce de bois", et pas "petite boule" !), XIV s.

Origines du jeu :

① "Croquet du mauvais temps".

② Première table : Louis XI, souffrant de douleur de dos, a commandé une table de croquet à hauteur d'homme (XV s.)

③ Pousser les billes avec l'extrémité du manche et plus avec la tête des cannes.

Adeptes :

Mozart, Louis XIV, Marie Antoinette, Kant, Napoleon, George Washington, Lewis Carroll.

(2) Billard dans les mathématiques

- Premier livre : Coriolis, 1835, "Théorie mathématique des effets du jeu de billard", utilisant les probas, les limites ; mal reçu.

- 1898-... : systèmes dynamiques, théorie ergodique, théorie du chaos.

- Physique : → cinématique,
  → optique.

- Principe général : forme de table ↝ étude des trajectoires des billes.

(3) Un jeu chaotique : trombinoscope

(1) Billard de Hadamard, 1898 : surface de courbure négative constante

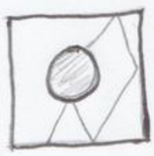
1er exemple du chaos déterministe, i.e.

pt initial + direction ⟼ trajectoire déterministe
petite perturbation ⟼ changement important ← "effet papillon"

(2) Billard d'Artin, 1924 : $\mathbb{H}/\Gamma$ ↝ système fortement mélangeant

$\mathbb{H}$: demi-plan supérieur, métrique de Poincaré
Γ : $PSL(2, \mathbb{Z})$, groupe modulaire

(3) Billard de Sinaï, 1963 :



- ergodique, chaotique
- modèle du "gaz de sphères dures" de Lorentz avec 2 atomes + élimination du barycentre dans une variable de configurat°"

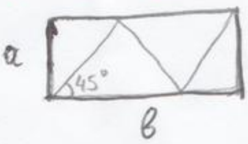
(4) Stade de Bunimovitch, 1974 ↝ 1er exemple de billiard chaotique convexe

4 De l'ordre dans le jeu

5 Billard elliptique:

- billard régulier
- ellipse duaux
- théorème de Poincelet

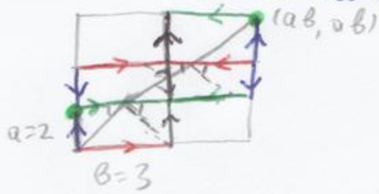
6 Billard rectangle



- billard régulier
- th. de Steinhaus-Gardner:

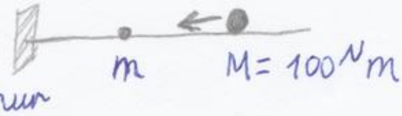
$a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1 \Rightarrow$ nb des rebonds $= a+b-2$

preuve: "méthode de revêtements"



⑤ Calculer le nombre π en jouant au billard (Galperin, ~2000)

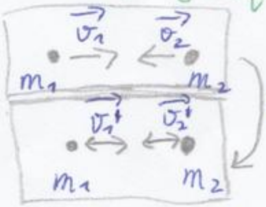
— Configuration:



Th.: $\Pi(N)$:= nb de collisions (bille-bille ou bille-mur) est fini, a $N+1$ chiffres et commence par les N premiers chiffres du nombre π.

Exemple: $\Pi(0) = 3$.

— La physique derrière:



Lois de conservation
→ de la quantité de mouvement
→ de l'énergie

$$(*)\begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 & (1) \\ m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 & (2) \end{cases}$$

⇓

exactement une solution différente de $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$

Exemple: $m_1 = m_2$;

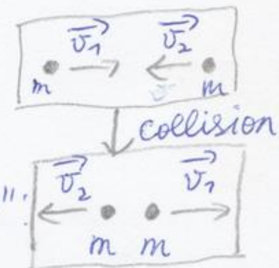
on fixe $v_1 + v_2$ et $v_1^2 + v_2^2$

⇓

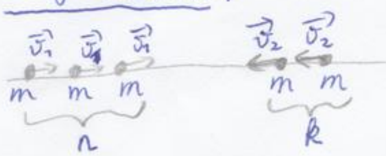
on fixe $\{v_1, v_2\}$.

⇓

$v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$, i.e. "les billes passent une à travers l'autre".

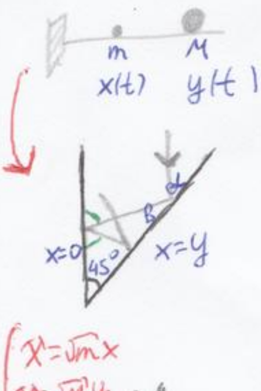


Digression:



$\mapsto$ $n \cdot k$ collisions

— Idée clé: changement de table.



"presque billard": $\alpha \neq \beta$

Comment rectifier cette table?
Réinterprétons $(*)$:
(1) $\vec{v} \cdot \vec{m} = \text{const}_1$
(2) "$\|\vec{v}\|^2$" $= \text{const}_2$,
où $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{m} = (m, M)$.
But: obtenir la vraie norme dans (2).
Moyen: dilatation.

$\varphi = \arctan\sqrt{\frac{m}{M}} = \arctan(10^{-N})$

$\vec{\mu} = (\sqrt{m}, \sqrt{M})$

(∗) devient

$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{u} = const_1 \\ \|\vec{v}\|^2 = const_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$ dans , car  (réflexion % $\vec{u}$)

"Billard angulaire"

- On commence parallèlement à $x=0$.
- <u>Lemme</u>: $N \geq 1 \Rightarrow \arctan(10^{-N}) \notin \mathbb{Q}\pi$.

$\Downarrow$ $\left[\frac{\pi}{\arctan(10^{-N})}\right]$ collisions.

Calcul délicat:

$\left[\frac{\pi}{\arctan(10^{-N})}\right] \approx [\pi\cdot 10^N]$,

plus précisément: $= [\pi\cdot 10^N]$ ou $[\pi\cdot 10^N]+1$.

<u>Conjecture</u>: $= [\pi\cdot 10^N]$.

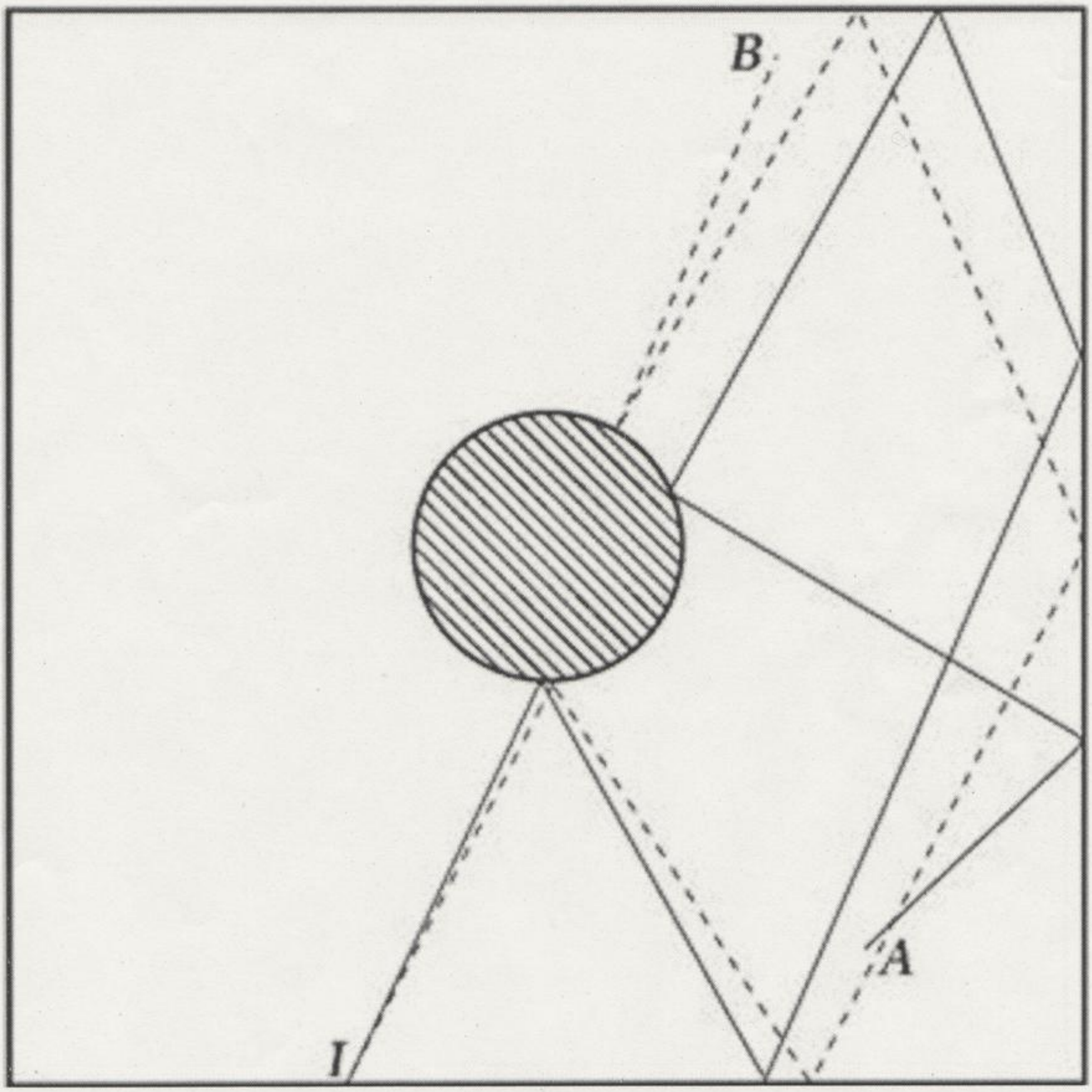
<u>Rmq</u>: vraie du pt de vue physique, car l'univers contient $< 10^{200}$ atomes, donc $\frac{M}{m} = 100^N$ n'a pas de sens pour $N > 100$, et la conjecture est vérifiée pour $N \leq 100$.

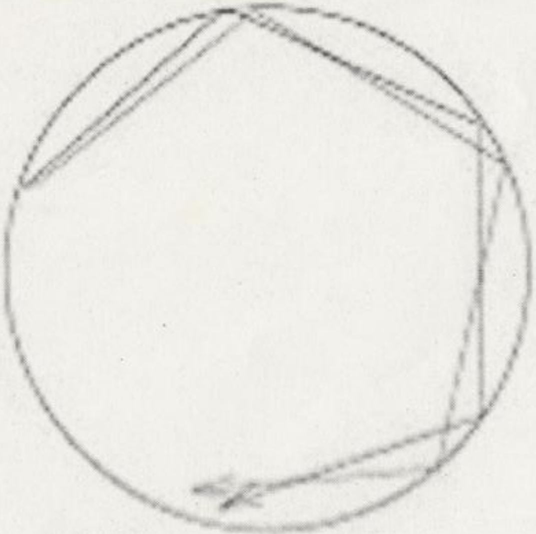
<u>Pb</u> dans le cas $[\pi\cdot 10^N]+1$:

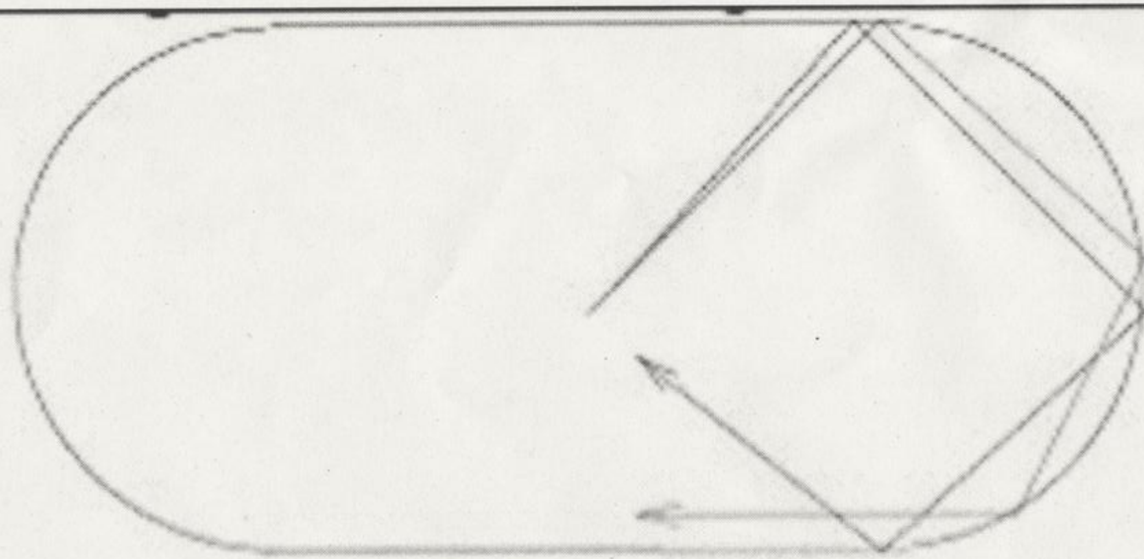
$[\pi\cdot 10^N]$ peut terminer en $99\ldots9$.

→ très rare (proba)

→ dans $[\pi\cdot 10^{10^8}]$ il n'y a pas de 9 chiffres "9" consécutifs !


B
A
I





Billard régulier

Billard chaotique