

Invariants d’entchevêtements avec des connexions plates dans le complémentaire

Victoria Lebed

Table des matières

1	Introduction	2
2	Invariants d’entchevêtements : une construction abstraite	3
2.1	La notion d’entchevêtement et de diagramme	4
2.2	La catégorie des entchevêtements \mathcal{E} , ses “générateurs et relations”	6
2.3	Construction des invariants : catégories s-pivotées	8
2.4	\mathcal{E} comme la catégorie s-pivotée universelle	15
2.5	$\text{Rep}\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})\text{mod}\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ comme catégories s-pivotées	16
3	Une tentative de généralisation : catégories \mathcal{R}-enrubannées	18
3.1	Catégories \mathcal{R} -tressées	18
3.2	Coloriages et invariants réguliers	21
3.3	S-pivot généralisé	22
3.4	La catégorie des diagrammes coloriés comme une catégorie \mathcal{R} -enrubannée	24
3.5	Groupes tressés : un exemple-jouet de catégorie \mathcal{R} -enrubannée	25
3.6	Catégories G -enrubannées et un exemple étoffé de catégorie \mathcal{R} -enrubannée	27
3.7	Sections d’une catégorie G -enrubannée	29
4	Entchevêtements avec des connexions plates dans le complémentaire	30
4.1	Topologie du complémentaire de l’entchevêtement	30
4.2	Groupes factorisables	33
4.3	G -entchevêtements et diagrammes G -coloriés	33
4.4	Un groupe factorisable est tressé	35
4.5	Catégories \mathcal{E}_G et \mathcal{D}_G	37
4.6	Connexions plates	39

5	Vers une catégorie GL_2-enrubannée	40
5.1	Rappels sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2	41
5.2	Rappels sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 à une racine de l'unité	44
5.3	Les trois ingrédients	46
6	Questions ouvertes	49

1 Introduction

Les premières tentatives systématiques de classification des nœuds dans les années 1920 passaient par des considérations topologiques : on étudiait le groupe fondamental du complémentaire du nœud. Le polynôme d'Alexander provient de cette époque. Dans les années 1980, suite à son travail sur les algèbres d'opérateurs, Jones découvre "par sérendipité" son fameux polynôme, ce qui bouleverse la théorie des nœuds. Plusieurs généralisations de ce polynôme ont vu le jour avant que Reshetikhin et Turaev ([19], [16]) ne trouvent une méthode systématique de construction des invariants dits quantiques d'enchevêtrements, étant donné un groupe quantique. Les polynômes ci-dessus sont les cas les plus élémentaires de cette méthode. Ces résultats sont présentés en détail dans [18], [12] et [14].

Dans un article récent [8], Kashaev et Reshetikhin proposent de généraliser encore cette dernière approche, en revenant aux idées topologiques initiales. Ils étudient les enchevêtrements dans $\mathbb{R}^2 \times I$ avec de l'information supplémentaire. Du point de vue algébrique, cette information consiste à donner une représentation du groupe fondamental du complémentaire C_E de l'enchevêtrement E dans le groupe G ; géométriquement, il s'agit d'une classe de jauge des connexions plates dans un G -fibré principal sur C_E . On appelle G -enchevêtrement, un enchevêtrement avec cette information additionnelle.

Afin de construire des invariants de G -enchevêtrements, Kashaev et Reshetikhin introduisent la notion de groupe tressé, i.e. un groupe G avec un tressage

$$(c, d) \mapsto (x_L(c, d), x_R(c, d))$$

sur $G \times G$, et la notion de catégorie G -enrubannée, i.e. une catégorie monoïdale fibrée sur un groupe tressé G , avec un "bon" relèvement du tressage de G , avec le twist et la dualité, cette dernière étant compatible avec la structure de groupe sur G . Si pour une telle G -catégorie \mathcal{C} on arrive à trouver une "bonne" famille \mathcal{A} d'objets paramétrés par G , alors on obtient un foncteur

$$F_{\mathcal{A}} : (\text{la catégorie de } G\text{-enchevêtrements}) \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Notons que pour le groupe trivial on retrouve les invariants quantiques usuels de [18].

Dans notre travail on change le point de départ. On révisé la définition d'une catégorie enrubannée, essentielle dans la construction des invariants quantiques, et on généralise la notion de tressage pour introduire la notion de catégorie \mathcal{R} -enrubannée. Comme dans le cadre des invariants quantiques, on utilise les coloriages de l'enchevêtrement par des objets d'une catégorie \mathcal{R} -enrubannée. Pour obtenir de tels coloriages, il s'avère utile d'avoir sur notre catégorie une G -structure compatible et d'étudier des G -coloriages des enchevêtrements. Ces derniers constituent précisément les structures additionnelles de Kashaev et Reshetikhin.

Suivant Kashaev et Reshetikhin, dans le dernier chapitre on étudie l'exemple où $G = GL_2$ et \mathcal{C} est une sous-catégorie de la catégorie ${}_{\mathcal{U}_\varepsilon(gl_2)}\mathbf{mod}_{\mathcal{U}_\varepsilon(gl_2)}$ de bimodules de dimension finie sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 à une racine de l'unité. L'utilisation de la catégorie de bimodules au lieu de la catégorie habituelle de modules à gauche est implicite dans [8] et [9] ; son apparition s'explique par le fait que l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_\varepsilon(gl_2)$ n'est pas quasitriangulaire, mais uniquement autoquasitriangulaire, dans le sens de [15] et [6], avec le tressage donné par la conjugaison par R . Dans le présent travail, on met en évidence un point obscur de la construction de Kashaev et Reshetikhin : leur tressage sur GL_2 n'est que partiellement défini. L'on n'offre tout de même pas de solution alternative.

On va reprendre essentiellement les idées de [8]. Outre le renversement de l'ordre d'exposition, on va clarifier, expliciter et repréciser plusieurs passages. Je tiens néanmoins à exprimer mon admiration pour l'originalité et l'accessibilité de ces articles, ainsi que ma gratitude à mon directeur de stage Marc Rosso qui a proposé ce sujet, qui m'écoutait patiemment quand j'étais bloquée dans le travail, et qui arrivait toujours à me fournir de bonnes références bibliographiques.

2 Invariants d'enchevêtrements : une construction abstraite

Commençons par un rappel assez succinct sur la théorie des nœuds et la construction des invariants quantiques d'enchevêtrements, sous la forme qui nous conviendra mieux dans la suite. Pour les détails et les démonstrations des résultats annoncés, on renvoie le lecteur aux ouvrages classiques [18] et [10], ainsi qu'à un livre plus récent et très accessible [14].

Notons que l'on va être assez flou sur les aspects topologiques de la théorie des nœuds pour éviter d'alourdir la présentation. On va travailler dans le cadre lisse, bien que la plupart des nos assertions restent vraies dans le cadre topologique ou linéaire par morceaux.

2.1 La notion d'enchevêtrement et de diagramme

Posons $I := [0, 1]$.

On se place dans le système de coordonnées standard (figure 1).

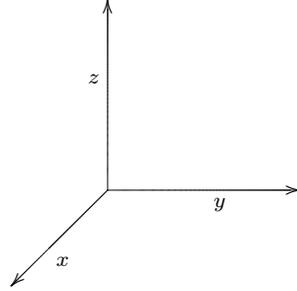


Figure 1: Coordonnées

Un enchevêtrement géométrique orienté, ou *g-enchevêtrement* E de type $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ est l'image d'un plongement lisse

$$\underbrace{I \sqcup I \dots \sqcup I}_{k \text{ fois}} \sqcup \underbrace{S^1 \sqcup S^1 \dots \sqcup S^1}_{l \text{ fois}} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

avec composants orientés, tel que

$$\partial E = \underbrace{\{(0, 1, 0), \dots, (0, m, 0)\}}_{\partial_- E} \cup \underbrace{\{(0, 1, 1), \dots, (0, n, 1)\}}_{\partial_+ E}$$

et E intersecte $\mathbb{R}^2 \times \partial I$ perpendiculairement.

On travaille ici principalement avec des objets orientés.

Voici un exemple
de *g-enchevêtrement*
de type $(3, 1)$:

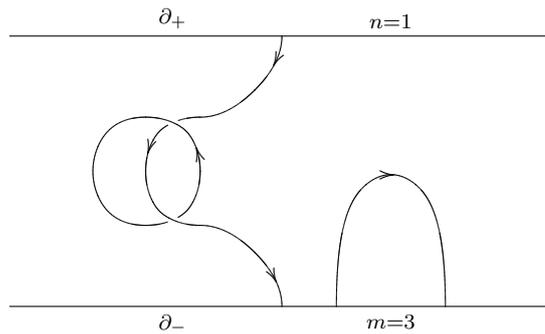


Figure 2: Un enchevêtrement

Un *enchevêtrement* est une classe d'isotopie des *g-enchevêtrements*.

Un *entrelacs* est un enchevêtrement de type $(0, 0)$, et un *nœud* est un entrelacs à un composant, i.e. une classe d'isotopie des plongements lisses du cercle.

Les entrelacs et les nœuds apparaissent plus souvent dans la pratique, mais la plupart des résultats de la théorie des nœuds se généralisent facilement dans le cadre des enchevêtrements, et d'autre part la construction des invariants de nœuds nécessite souvent ce cadre plus général.

La projection d'un g-enchevêtrement E sur le plan $y0z$ est dite *régulière* si son image est une courbe immergée générique, i.e. dont les seules singularités sont des points doubles à tangentes distinctes. Une petite déformation de E nous amène toujours dans ce cadre. Une projection régulière de E avec l'information "dessus/dessous" pour chaque point double est appelée *un diagramme* de E . Notons que chaque courbe immergée générique avec l'information "dessus/dessous" pour chaque point double est un diagramme d'un g-enchevêtrement.

Dans un diagramme on distingue, d'après "la règle de la main droite", le signe des croisements (figure 3).



Figure 3: Le signe des croisements

D'après le théorème de Reidemeister, deux diagrammes correspondent au même enchevêtrement ssi on peut obtenir l'un à partir de l'autre par l'isotopie ambiante et un nombre fini des mouvements locaux de Reidemeister (figure 4, pour toutes les orientations des brins possibles). Deux tels diagrammes sont dits *R-équivalents*. Le théorème reste vrai dans le cadre non-orienté. Si l'on n'utilise pas le mouvement de Reidemeister de type I, alors on parle de *l'isotopie régulière*.

On munit tout enchevêtrement géométrique E d'une section continue non-singulière ν de son fibré normal ; on demande que ν pointe dans la direction de l'axe x dans les points du bord ∂E . On va appeler ν *sa section*. En d'autres termes, on épaissit chaque composant de l'enchevêtrement jusqu'à obtenir une bande, de telle sorte que les vecteurs de sa section deviennent normaux pour cette bande (cf. figure 5). *Un enchevêtrement en bande* est une classe d'isotopie de tels g-enchevêtrements, compte tenu de leurs sections. Décrire un enchevêtrement en bande revient à donner son

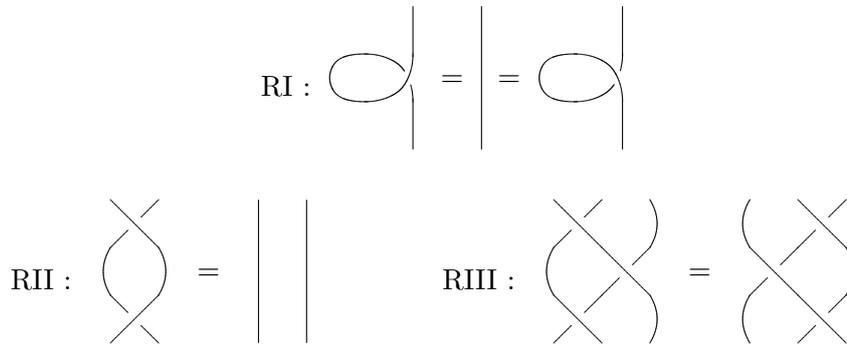


Figure 4: Mouvements de Reidemeister

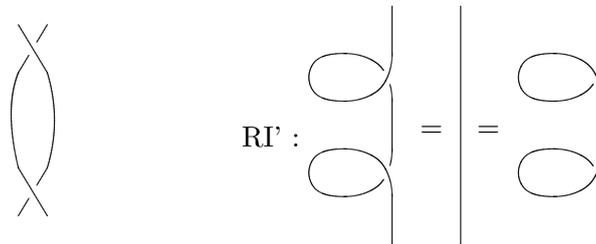


Figure 5: Enchevêtrements en bande : un exemple et le mouvement RI'

enchevêtrement sous-jacent (c.à.d. en oubliant sa section) et un nombre entier – le nombre d’auto-enlacement – pour chaque composant. Chaque enchevêtrement en bande peut être représenté par un g -enchevêtrement E dont la section est orientée dans la direction de l’axe x . On dit que de tels E sont *bien positionnés*. Le théorème de Reidemeister reste vrai pour les diagrammes d’enchevêtrements en bande bien positionnés si l’on remplace le mouvement RI par RI’ présenté dans la figure 5. Les mouvements RII et RIII correspondent aux glissements des projections de bandes dans le plan $\mathbb{R}^2 = y0z$, tandis que RI’ correspond à un retournement qui ne peut pas être réalisé dans le plan. Remarquons cependant que RI’ se réalise si l’on travaille sur la sphère $\mathbb{S}^2 \supset \mathbb{R}^2$.

Remarque 2.1. Dans la suite le mot “enchevêtrement” va sous-entendre “enchevêtrement orienté en bande”.

2.2 La catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} , ses “générateurs et relations”

Pour une bonne introduction à la théorie des catégories on renvoie le lecteur à [13].

Notons que l’on va travailler ici uniquement avec de petites catégories.

Les objets de *la catégorie des enchevêtrements* \mathcal{E} sont des suites finies de

signes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{\pm\}^k$, et les morphismes de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ vers (η_1, \dots, η_n) sont des enchevêtrements de type (m, n) , avec l'orientation du composant adjacent au bord dans le point $(0, i, 0) \in \partial_- E$ (ou $(0, i, 1) \in \partial_+ E$) déterminée par le signe ε_i (resp. η_i) d'après les règles dans la figure 6.

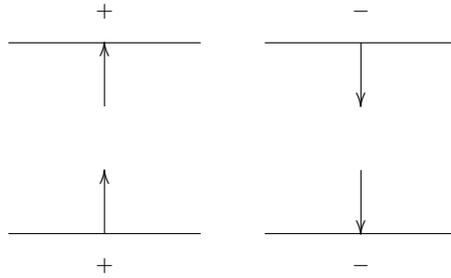


Figure 6: Compatibilité des orientations

La composition des deux morphismes s'obtient en plaçant un enchevêtrement géométrique qui représente le premier morphisme au-dessous de celui qui représente le deuxième, et en contractant le résultat pour le placer dans la bande $\mathbb{R}^2 \times I$ (cf. figure 7). La composition est bien définie : la classe d'isotopie de l'enchevêtrement obtenu ne dépend que de celles des enchevêtrements initiaux. Le morphisme identité est l'enchevêtrement trivial présenté dans la figure 7, avec l'orientation des brins déterminée par l'objet.

On définit d'une manière analogue la catégorie des enchevêtrements non-orientés $\bar{\mathcal{E}}$. Ses objets sont simplement les entiers positifs.

Remarque 2.2. D'après ce qui précède, la catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} est équivalente à la catégorie des classes d'équivalence de Reidemeister des diagrammes, définie de façon analogue. Dans la suite on va souvent passer de l'une à l'autre sans le mentionner explicitement.

La catégorie \mathcal{E} est monoïdale (stricte) : le produit tensoriel sur les objets est la concaténation des suites, avec la suite vide comme objet unité ; pour multiplier les morphismes, il suffit de placer un enchevêtrement à gauche de l'autre (cf. figure 7).



Figure 7: Composition, identité et produit tensoriel dans \mathcal{E}

Prenons un diagramme et traçons une grille de lignes horizontales. On voit facilement que chaque enchevêtrement est une composition des produits tensoriels des enchevêtrements de la figure 8 dits *élémentaires*.

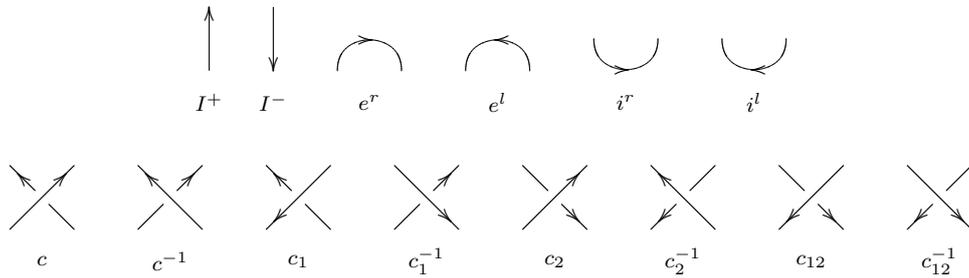


Figure 8: Enchevêtrements élémentaires

Notons que l'on a donné des noms très suggestifs aux enchevêtrements élémentaires – on en verra une interprétation plus tard.

Il y a plusieurs façons de donner un système complet de relations entre les enchevêtrements élémentaires ([18] et [10] en contiennent deux exemples). On va utiliser le système présenté dans la figure 9, réparti en groupes en fonction de la provenance topologique des relations. Notons que A3, bien qu'étant un exemple du mouvement RII, est classé ici "isotopie ambiante" – en fait, il code vraiment l'isotopie ambiante si l'on tient compte de la relation II. Les relations avec des brins non-orientés signifient qu'elles sont vraies avec toutes les orientations des brins possibles (compatibles bien sûr).

Notons que l'on peut omettre quelques générateurs et simplifier le système de relations, mais la présentation choisie ici convient mieux pour des généralisations que l'on a en vue. Notons aussi que certains auteurs orientent les enchevêtrements élémentaires différemment, ce qui résulte en une légère modification dans les formules qui suivent.

2.3 Construction des invariants : catégories s-pivotées

On propose de construire un foncteur covariant monoïdal

$$F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C},$$

avec pour \mathcal{C} une catégorie monoïdale stricte que l'on comprend bien. Pour cela on essaie de trouver des morphismes dans \mathcal{C} qui satisfassent à toutes les relations établies pour des enchevêtrements élémentaires ci-dessus. L'image $F(E)$ d'un enchevêtrement E devient alors un morphisme dans \mathcal{C} . En particulier, pour des entrelacs on obtient un invariant à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$, ce dernier étant dans la pratique un ensemble gentil – par exemple un corps.

Dans ce qui suit on présente sous la forme d'un dictionnaire des structures sur \mathcal{C} qui donnent des morphismes souhaités.

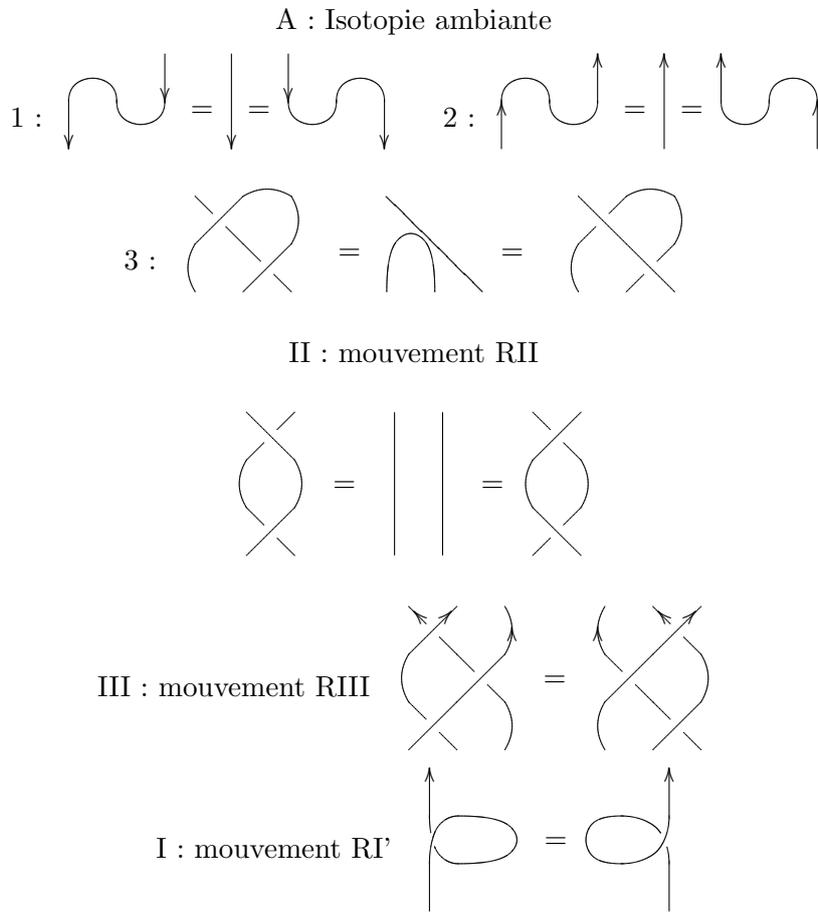
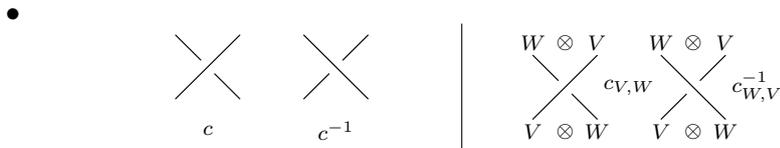


Figure 9: Relations



Le tressage dans une catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} est une famille naturelle d'isomorphismes

$$c = \{c_{V,W} : V \otimes W \simeq W \otimes V\},$$

avec

$$c_{V,W \otimes U} = (\text{Id}_W \otimes c_{V,U}) \circ (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U), \quad (1)$$

$$c_{V \otimes W, U} = (c_{V,U} \otimes \text{Id}_W) \circ (\text{Id}_V \otimes c_{W,U}) \quad (2)$$

pour chaque triplet d'objets V, W, U .

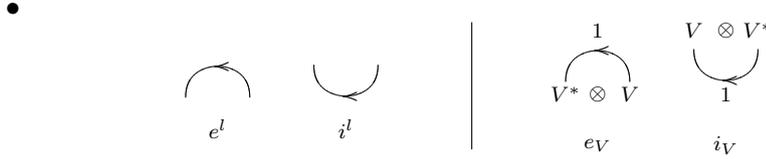
On en déduit deux propriétés suivantes :

$$c_{V,1} = c_{1,V} = \text{Id}_V; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (c_{W,U} \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_W \otimes c_{V,U}) \circ (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U) = \\ (\text{Id}_U \otimes c_{V,W}) \circ (c_{V,U} \otimes \text{Id}_W) \circ (\text{Id}_V \otimes c_{W,U}). \end{aligned} \quad (4)$$

La dernière équation est connue sous le nom de *l'équation de Yang-Baxter* et apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques.

Choisissons l'image des enchevêtrements c , c^{-1} et des objets adjacents comme indiqué dans la figure ci-dessus. Pour l'instant on oublie l'orientation des brins – on en souviendra quand on va préciser le choix des images des objets par F . Notre choix assure les relations RII et RIII, cette dernière grâce à l'équation de Yang-Baxter (4).



Un objet V^* est appelé un *dual à gauche* de l'objet V s'il existe deux morphismes $e_V : V^* \otimes V \rightarrow 1$ (*l'évaluation*) et $i_V : 1 \rightarrow V \otimes V^*$ (*l'inclusion*) qui satisfont aux identités suivantes :

$$(e_V \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes i_V) = \text{Id}_{V^*}; \quad (5)$$

$$(\text{Id}_V \otimes e_V) \circ (i_V \otimes \text{Id}_V) = \text{Id}_V. \quad (6)$$

V est appelé un *dual à droite* de V^* .

Notons qu'un objet dual, s'il existe, est unique à isomorphisme près. Notons aussi que même pour un dual V^* fixé, le choix des morphismes e_V, i_V n'est pas nécessairement unique.

Une catégorie monoïdale stricte est dite *rigide* si elle admet un choix pour chaque objet d'un objet dual, ceci d'une façon compatible avec sa structure monoïdale, i.e.

$$1^* = 1, \quad e_1 = i_1 = \text{Id}_1; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (V \otimes W)^* &= W^* \otimes V^*, \\ e_{V \otimes W} &= e_W \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes e_V \otimes \text{Id}_W), \\ i_{V \otimes W} &= (\text{Id}_V \otimes i_W \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ i_V. \end{aligned} \quad (8)$$

Dans une catégorie rigide la dualité s'étend en un foncteur contravariant monoïdal : à un morphisme $f : V \rightarrow W$ on associe son dual

$$f^* = (e_W \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes f \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes i_V) : W^* \rightarrow V^*.$$

On vérifie facilement que

$$(e_V)^* = i_{V^*},$$

$$(i_V)^* = e_{V^*}.$$

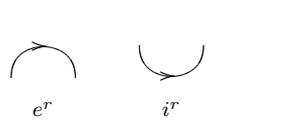
Notons aussi que dans une catégorie rigide tressée, V est aussi un dual à gauche de V^* , avec

$$e_{V^*} = e_V \circ c_{V^*,V}^{-1},$$

$$i_{V^*} = c_{V,V^*} \circ i_V.$$

Choisissons l'image des enchevêtrements e^l, i^l et des objets adjacents comme indiqué dans la figure ci-dessus. L'identité (5) assure la relation A1, et (6) assure A2 avec l'orientation "à gauche". La relation A3 pour l'arc orienté à gauche découle de la naturalité du tressage appliquée à $c_{V^* \otimes V, W}$ et au morphisme $e_V : V^* \otimes V \rightarrow 1$, en utilisant les formules (2) et (3) (cf. [18]).

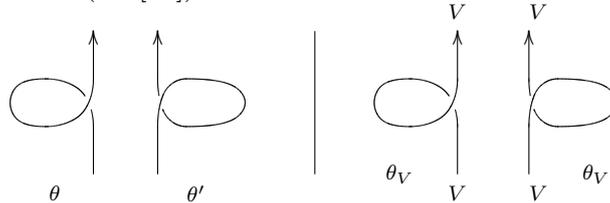
•



Il nous reste ces deux enchevêtrements élémentaires et les relations A1 et A2 avec l'orientation "à droite", A3 pour l'arc orienté "à droite" et RI'.

C'est le moment le plus délicat de la construction. Plusieurs solutions, essentiellement équivalentes, sont possibles.

1. On peut effectuer, comme chez Turaev ([18]), "un changement de base". On remplace e^r et i^r dans l'ensemble de générateurs par θ et θ' dans la figure ci-dessous, et l'on modifie le système des relations (cf. [18]).



Une catégorie rigide tressée est dite *enrubannée* si elle admet un *twist* (ou une *torsion*), i.e. une famille naturelle d'isomorphismes

$$\theta = \{\theta_V : V \simeq V\},$$

avec

$$\theta_{V \otimes W} = c_{W,V} c_{V,W} (\theta_V \otimes \theta_W) \quad (9)$$

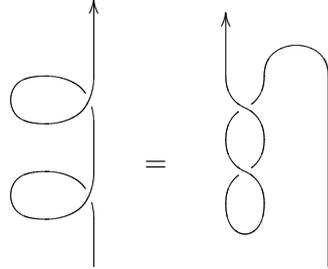
et la compatibilité avec la dualité

$$\theta_{V^*} = \theta_V^*. \quad (10)$$

On en déduit la propriété suivante :

$$\theta_1 = \text{Id}_1, \quad (11)$$

et une autre propriété que l'on présente graphiquement et qui est équivalente à (10) étant donné (9) et la naturalité de θ (cf. [18]):



$$(12)$$

Si l'on choisit θ_V comme l'image de l'enchevêtrement $\theta \simeq \theta'$, alors la relation (12) assure toutes les relations nécessaires (cf. [18]).

Notons que (12) n'implique pas en général (9), donc une catégorie enrubannée contient plus de structure qu'il nous faut pour construire des invariants d'enchevêtrements.

2. L'approche la plus naturelle consiste à imposer sur \mathcal{C} l'existence d'une structure duale à gauche (V^*, e_V^l, i_V^l) et d'une structure duale à droite $({}^*V, e_V^r, i_V^r)$, soumises à la condition

$$(e_V^l \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes c_{V,V}) \circ (i_V^r \otimes \text{Id}_V) = (\text{Id}_V \otimes e_V^r) \circ (c_{V,V} \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_V \otimes i_V^l) \quad (13)$$

pour chaque objet V .

Cette dernière équation est exactement la relation RI'. Les propriétés de la dualité à droite impliquent les relations A1-A3 avec l'orientation "à droite", comme on l'a vu pour la dualité à gauche et ces relations avec l'orientation "à gauche".

Notons aussi que la condition (13) s'écrit comme

$$\text{tr}_1^l(c_{V,V}) = \text{tr}_2^r(c_{V,V})$$

(voir [18] pour la définition de la trace partielle). Elle est aussi équivalente à l'égalité de la trace à gauche et la trace à droite.

3. La troisième approche, moins fréquente mais plus pratique pour les généralisations que l'on a en vue, consiste à considérer des catégories rigides tressées *pivotées*, c.à.d. qui admettent un *pivot* – un isomorphisme monoïdale de catégorie $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ donné par une famille naturelle d'isomorphismes

$$\mu_V : V \simeq V^{**},$$

$$\mu_{V \otimes W} = \mu_V \otimes \mu_W. \quad (14)$$

L'existence d'un pivot entraîne que le foncteur contravariant “dualité” est un isomorphisme monoïdale de catégorie $*$: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$. On dénote V_* le préduel d'un objet V .

La monoïdalité implique

$$\mu_1 = \text{Id}_1, \quad (15)$$

$$(\mu_{V^*})^{-1} = \mu_V^*. \quad (16)$$

On pose alors

$$F(e_V^r) = e_{V^*} \circ (\mu_V \otimes \text{Id}_{V^*}), \quad (17)$$

$$F(i_V^r) = (\text{Id}_{V^*} \otimes \mu_V^{-1}) \circ i_{V^*}.$$

Les relations A1 et A2 deviennent automatiques. La relation A3 pour l'arc orienté “à droite” découle de cette même relation pour l'arc “gauche” et du fait que l'on peut faire passer μ_V au travers d'un croisement, ceci par naturalité du tressage.

Il nous reste la relation RI', qui se présente dans \mathcal{C} sous la forme

$$\begin{aligned} (e_V \otimes \mu_V^{-1}) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes c_{V^{**}, V}) \circ (i_{V^*} \otimes \text{Id}_V) = \\ (\text{Id}_V \otimes e_{V^*}) \circ (c_{V^{**}, V} \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\mu_V \otimes i_V). \end{aligned} \quad (18)$$

pour chaque objet V . On va appeler *s-pivotée*, une catégorie pivotée avec cette condition. Le “s” ici est une référence au terme “sphérique” – cf. la description des enchevêtrements en bande ci-dessus.

Notons que

$$\theta_V = (\text{Id}_V \otimes e_{V^*}) \circ (c_{V^{**}, V} \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\mu_V \otimes i_V)$$

donne un twist dans une catégorie s-pivotée, et inversement, un twist θ donne une bonne famille μ via la formule

$$\mu_V = (e_V \otimes \text{Id}_{V^{**}}) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes c_{V, V^{**}}^{-1}) \circ (i_{V^*} \otimes \theta_V).$$

Cela se montre graphiquement, ce qui est légitime, car on a vu que ces structures satisfont toutes les deux à toutes les relations décrivant la catégorie des enchevêtrements.

Comparons les deux structures avec plus de précision, bien que cela ne soit pas nécessaire pour la suite. Les conditions (12) et (18) sont équivalentes – elles donnent donc les conditions minimales suffisantes pour construire des invariants. Ensuite, (9) et (14) sont équivalentes, et (10) est équivalente à (18) en présence de (16). On aimerait bien obtenir une condition “d’une nature catégorielle” sur μ qui, avec (14), impliquerait (18), mais pour le moment on se contente de cette dernière condition “topologique”.

Notons aussi que (17) donne une dualité à droite soumise à (13) grâce à la condition (18), et inversement,

$$\mu_V = (e_V^r \otimes \text{Id}_{V^{**}}) \circ (\text{Id}_V \otimes i_{V^*}^l)$$

satisfait à (18) si la dualité à droite satisfait à (13).

Les structures enrubannée, s-pivotée et rigide à droite (soumises à (13)) sont ainsi équivalentes, et on va les utiliser d’une façon interchangeable.

4. On cite brièvement encore une approche (cf. [22]). Elle consiste à imposer sur \mathcal{C} l’existence d’une structure duale à gauche, d’une structure duale à droite et d’un isomorphisme monoïdal entre les deux qui satisfait en plus à une condition supplémentaire (l’analogie de (10) pour le twist et (18) pour le pivot). Une telle catégorie s’appelle *souveraine*.

Regardons maintenant les conditions que l’on a imposées aux objets adjacents aux images des enchevêtrements élémentaires. On obtient un algorithme pour construire des invariants d’enchevêtrements à partir d’une catégorie enrubannée (ou s-pivotée) \mathcal{C} :

1. Choisir une couleur, i.e. un objet V de \mathcal{C} .
2. Bien positionner E et considérer son diagramme.
3. Présenter le diagramme comme une composition des produits tensoriels des enchevêtrements élémentaires.
4. Définir l’image de chaque objet $\varepsilon \in \{\pm\}$ comme

$$V^\varepsilon = \begin{cases} V & \text{si } \varepsilon = 1, \\ V^* & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (19)$$

5. Définir l'image de chaque enchevêtrement élémentaire d'après le "dictionnaire" ci-dessus.
6. Recoller ces images et calculer le morphisme obtenu dans la catégorie \mathcal{C} .

2.4 \mathcal{E} comme la catégorie s-pivotée universelle

Les diagrammes dans la section précédente suggèrent une structure s-pivotée, ou enrubannée, sur la catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} . Il reste à étendre ces diagrammes donnés pour les objets $\varepsilon \in \{\pm\}$ sur leurs produits tensoriels.

La dualité dans \mathcal{E} est définie par $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)^* = (\varepsilon_k^*, \dots, \varepsilon_1^*)$, où ε^* dénote le changement de signe. L'évaluation, l'inclusion et le tressage sont présentés dans la figure 10, avec l'orientation des composants déterminée par les signes ε_i . La structure duale s'avère involutive : $V^{**} = V$ pour chaque objet V , et le pivot μ est donné par les morphismes identités.

On a alors

Proposition 2.3. *La catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} munie des structures décrites ci-dessus est s-pivotée.*

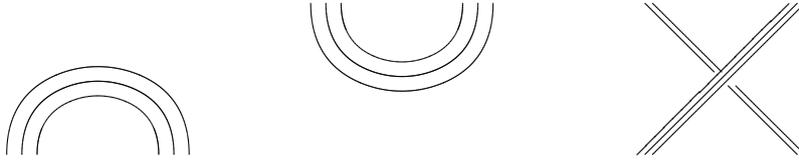


Figure 10: Structure s-pivotée sur la catégorie des enchevêtrements

Pour une catégorie s-pivotée \mathcal{C} on considère aussi *la catégorie des enchevêtrements \mathcal{C} -coloriés $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$* qui a pour objets des suites finies de couples $((\varepsilon_1, V_1), \dots, (\varepsilon_k, V_k)) \in (\{\pm\} \times \text{Ob}(\mathcal{C}))^k$, et pour morphismes entre les objets $((\varepsilon_1, V_1), \dots, (\varepsilon_k, V_m))$ et $((\eta_1, W_1), \dots, (\eta_n, W_n))$ les classes de R-équivalence des diagrammes \mathcal{C} -coloriés, avec l'orientation du composant c_i adjacent au bord dans le point $(0, i, 0) \in \partial_- E$ (ou $(0, i, 1) \in \partial_+ E$) déterminée par le signe ε_i (resp. η_i) d'après les règles de la figure 6, et avec la couleur de c_i qui coïncide avec celle du point $(0, i, 0)$ (resp. $(0, i, 1)$). La composition des morphismes, le morphisme identité, le produit tensoriel et le tressage sont définis comme pour la catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} , sauf que l'on demande toujours la compatibilité des couleurs. La dualité est donnée par $(\varepsilon, V)^* = (-\varepsilon, V)$, et l'évaluation et l'inclusion sont analogues à celles de \mathcal{E} . On munit $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ du pivot trivial μ , et l'on vérifie

Proposition 2.4. *Soit \mathcal{C} une catégorie s-pivotée, alors la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ munie des structures décrites ci-dessus est s-pivotée elle aussi.*

Notre algorithme de construction des invariants d'enchevêtrements à partir d'une catégorie s-pivotée \mathcal{C} définit alors pour chaque objet V de \mathcal{C} un foncteur monoïdal

$$F_V : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Ces foncteurs préservent le tressage mais pas la dualité : $(-)^* = (+)$ dans \mathcal{E} , mais en général $F_V((+)) = V$ est différent de $F_V((-))^* = V^{**}$ dans \mathcal{C} .

Les F_V "s'assemblent" en un foncteur

$$F : \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$$

comme suit : on applique notre algorithme aux enchevêtrements \mathcal{C} -coloriés en omettant l'étape 1 et en posant dans l'étape 4

$$F(\varepsilon, V) = V^\varepsilon,$$

où V est la couleur du composant qui passe par le point correspondant.

Notre F est monoïdale mais pas rigide lui non plus. Si l'on veut un foncteur qui préserve toutes les structures, il faut coder les structures de \mathcal{C} dans celles de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ (remarquons que notre définition de la dualité dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ ne voit que les signes des objets, et pas leurs couleurs). On peut le faire par exemple en autorisant des coupons marqués par des morphismes de \mathcal{C} entre les objets définis par les couleurs des brins adjacents (c.f. [17], [18]). On change dans ce cas la dualité dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$: on pose $(+, V)^* = (-, V)$, $(-, V)^* = (+, V^{**})$, et on définit $e_{(-, V)}$ et $i_{(-, V)}$ en utilisant un coupon marqué par μ_V . Ce coupon devient par ailleurs un pivot dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. On impose à l'image d'un coupon d'être sa marque. Cela rend le foncteur F s-pivoté.

La section précédente montre que la notion de catégorie s-pivotée est modelée sur la catégorie des enchevêtrements. Cela s'exprime par exemple dans le résultat suivant :

La catégorie s-pivotée librement engendrée par un seul objet V est monoïdalement équivalente à \mathcal{E} .

Voir [17] et les autres références pour plus de détails.

Notons que dans ce résultat, il s'agit d'une équivalence monoïdale mais pas rigide (c.f. notre analyse du foncteur F ci-dessus). En plus on n'espère pas avoir un isomorphisme de ces catégories : les objets V et V^{**} correspondent au même objet $(+)$ dans \mathcal{E} .

2.5 $\text{Rep}\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})\text{-mod}$ comme catégories s-pivotées

La notion algébrique qui correspond à la notion de catégorie enrubannée est l'algèbre de Hopf enrubannée, dans le sens que la catégorie $\text{Rep } H$ des représentations de dimension finie d'une telle algèbre H est munie des toutes les structures nécessaires. On a aussi une sorte d'assertion inverse. En fait il s'agit d'une dualité de type Tannaka-Krein (cf. [7]).

On se contente ici d'une description des structures en question, et l'on renvoie le lecteur à [18] ou [10] pour les définitions et les détails.

- La structure monoïdale stricte sur $\text{Rep } H$ provient de la structure de bigèbre sur H .

- La dualité est donnée par l'antipode.

Notons ici que $V^{**} = V^* = V$ comme espaces vectoriels (mais pas comme H -modules !) puisque l'on est en dimension finie. La différence entre V^{**} et V correspond ici à la différence entre le carré de l'antipode s^2 et Id_H .

- Le tressage est donné par la R -matrice universelle R .

<ul style="list-style-type: none"> • Le twist est réalisé comme multiplication par $\theta \in H$ t.q. : <ol style="list-style-type: none"> 1. θ est inversible 2. θ est central 3. $\Delta\theta = R_{21}R(\theta \otimes \theta)$ 4. $\theta^{-2} = S(u)u$, ou, d'une manière équivalente, 4'. $\theta = S(\theta)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Le s-pivot est réalisé comme multiplication par $\mu \in H$ t.q. : <ol style="list-style-type: none"> 1. μ est inversible 2. $\mu h \mu^{-1} = S^2(h) \forall h \in H$ 3. μ est "group-like" 4. $\mu^2 = uS(u)^{-1}$
--	---

On a utilisé l'élément $u = \sum S(t_i)s_i$, où $\sum s_i \otimes t_i = R$.

Remarquons que les conditions 4 impliquent $\mu^2 = \theta^2 u^2$, si les deux éléments existent. Ensuite, si l'on pose $\mu = \theta u$, alors chaque condition à gauche devient équivalente à son homologue à droite (sauf que pour le démontrer pour 4 il faut utiliser une des deux variantes de 2), ce qui provient des propriétés standard de u .

Notons aussi que pour une algèbre de Hopf enrubannée H , la catégorie ${}_H \text{mod}_H$ de $H - H$ bimodules de dimension finie (avec pour morphismes des applications H -invariantes à la fois à gauche et à droite) est enrubannée elle aussi:

- La structure monoïdale stricte sur ${}_H \text{mod}_H$ provient de la structure de bigèbre sur H : $h \in H$ agit sur $H \otimes H$ à gauche / à droite comme multiplication par Δh à gauche / à droite.

- La dualité est donnée par l'antipode : pour un $H - H$ bimodule V et une $f \in V^*$,

$$(h' \cdot f \cdot h)(v) = f(s(h')v s^{-1}(h)) \quad (20)$$

pour tous les $h, h' \in H$, $v \in V$.

- Le tressage est donné par

$$c_{V,W}(v \otimes w) = P(R(v \otimes w)R^{-1}), \quad v \in V, w \in W,$$

où P est le “flip”

$$P(v \otimes w) = w \otimes v.$$

- Le s-pivot est donné par

$$\mu_V(v) = \mu v \mu = s^2(v) \mu^2,$$

et le twist par

$$\theta_V(v) = \theta v \theta^{-1}, \quad v \in V.$$

L’algèbre quantique enveloppante $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ d’une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} , ainsi qu’un quotient de sa spécialisation $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ à une racine de l’unité, sont des algèbres de Hopf enrubannées. Le s-pivot est réalisé comme multiplication par $\mu = K_1^{-2b_1} \cdots K_m^{-2b_m}$, où $2b_i = 2 \sum_j b_{ij} \in \mathbb{Z}$, et (b_{ij}) est la matrice inverse de la matrice de Cartan (a_{ij}) (cf. [18]). Pour la formule de la R -matrice, on renvoie le lecteur à [18].

3 Une tentative de généralisation : catégories \mathcal{R} -enrubannées

La notion de catégorie enrubannée est créée spécialement pour construire des invariants d’enchevêtrements, et elle semble parfaite est exhaustive dans ce but. Or on peut essayer de modifier cette notion pour obtenir une famille d’invariants encore plus vaste. Pour cela on va généraliser la notion de tressage dans une catégorie monoïdale. Puis on va se diriger vers une concrétisation de nos constructions abstraites à l’aide des groupes tressés.

Dans ce qui suit on va encadrer les formules qui font partie de la définition d’une catégorie \mathcal{R} -enrubannée pour mieux les séparer visuellement.

3.1 Catégories \mathcal{R} -tressées

Une catégorie \mathcal{R} -tressée est une catégorie monoïdale \mathcal{C} munie d’un “flip” généralisé, i.e. un bifoncteur inversible

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \\ (V, W) &\mapsto (x_L(V, W), x_R(V, W)), \end{aligned}$$

et d'un *tressage généralisé*, i.e. d'un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\
 \searrow & \xrightarrow{c} & \swarrow \\
 \otimes & & \otimes \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{C} &
 \end{array}$$

donné par un système d'isomorphismes fonctoriels

$$c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow x_L(V, W) \otimes x_R(V, W).$$

On demande que ces structures satisfassent aux propriétés suivantes :

1. \mathcal{R} doit respecter l'unité de la catégorie \mathcal{C} :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\mathcal{R}(1, V) = (V, 1)} \\
 \boxed{\mathcal{R}(V, 1) = (1, V)}
 \end{array} \tag{21}$$

pour chaque objet V de \mathcal{C} .

2. Compatibilité avec le produit tensoriel :

- pour \mathcal{R} :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\mathcal{R} \circ (\otimes \times \text{Id}) = (\text{Id} \times \otimes) \circ (\mathcal{R} \times \text{Id}) \circ (\text{Id} \times \mathcal{R})} \\
 \boxed{\mathcal{R} \circ (\text{Id} \times \otimes) = (\otimes \times \text{Id}) \circ (\text{Id} \times \mathcal{R}) \circ (\mathcal{R} \times \text{Id})}
 \end{array} \tag{22}$$

comme morphismes de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ vers $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, ce qui s'écrit explicitement comme

$$x_L(V \otimes W, U) = x_L(V, x_L(W, U)), \tag{23}$$

$$x_R(V \otimes W, U) = x_R(V, x_L(W, U)) \otimes x_R(W, U), \tag{24}$$

$$x_L(V, W \otimes U) = x_L(V, W) \otimes x_L(x_R(V, W), U), \tag{25}$$

$$x_R(V, W \otimes U) = x_R(x_R(V, W), U); \tag{26}$$

- pour c :

$$\boxed{c_{V \otimes W, U} = (c_{V, x_L(W, U)} \otimes \text{Id}_{x_R(W, U)}) \circ (\text{Id}_V \otimes c_{W, U})} \tag{27}$$

$$\boxed{c_{V, W \otimes U} = (\text{Id}_{x_L(V, W)} \otimes c_{x_R(V, W), U}) \circ (c_{V, W} \otimes \text{Id}_U)} \tag{28}$$

Il en résulte que c respecte l'unité de \mathcal{C} :

$$c_{V,1} = c_{1,V} = \text{Id}_V. \tag{29}$$

3. L'équation de Yang-Baxter pour \mathcal{R} :

$$\boxed{(\mathcal{R} \times \text{Id}) \circ (\text{Id} \times \mathcal{R}) \circ (\mathcal{R} \times \text{Id}) = (\text{Id} \times \mathcal{R}) \circ (\mathcal{R} \times \text{Id}) \circ (\text{Id} \times \mathcal{R})} \quad (30)$$

comme morphismes de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ vers elle-même, et

$$\boxed{\mathcal{R}(c_{V,W} \times \text{Id}_U) = \text{Id}_{x_L(V \otimes W, U)} \times c_{x_R(V, x_L(W, U)), x_R(W, U)}} \quad (31)$$

L'équation (30) garantit qu'il s'agit ici de deux morphismes entre les mêmes paires d'objets de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Les dernières conditions permettent d'obtenir l'équation de Yang-Baxter généralisée dite *équation de Yang-Baxter holonomique* pour le tressage généralisé:

$$\begin{aligned} & (c_{x_L(V,W), x_L(x_R(V,W), U)} \otimes \text{Id}_{x_R(x_R(V,W), U)}) \circ \\ & \quad (\text{Id}_{x_L(V,W)} \otimes c_{x_R(V,W), U}) \circ \\ & \quad (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U) \\ & = \\ & \quad (\text{Id}_{x_L(V, x_L(W, U))} \otimes c_{x_R(V, x_L(W, U)), x_R(W, U)}) \circ \\ & \quad (c_{V, x_L(W, U)} \otimes \text{Id}_{x_R(W, U)}) \circ \\ & \quad (\text{Id}_V \otimes c_{W, U}) \end{aligned} \quad (32)$$

pour chaque triplet V, W, U d'objets de \mathcal{C} .

La vérification repose, comme pour le tressage habituel, sur la functorialité du tressage généralisé que l'on applique aux objets $V \otimes W, U$ et au morphisme $c_{V,W} \otimes \text{Id}_U : V \otimes W \otimes U \rightarrow x_L(V, W) \otimes x_R(V, W) \otimes U$, en utilisant la propriété (27).

Notons que le "flip" $(V, W) \mapsto (W, V)$ et le tressage habituel sont des cas particuliers de nos structures.

Une structure duale dans \mathcal{C} est dite compatible avec le flip généralisé si

$$\boxed{x_L(V^*, x_L(V, W)) = W} \quad (33)$$

$$\boxed{x_R(V^*, x_L(V, W)) = x_R(V, W)^*} \quad (34)$$

$$\boxed{x_R(x_R(W, V), V^*) = W} \quad (35)$$

$$\boxed{x_L(x_R(W, V), V^*) = x_L(W, V)^*} \quad (36)$$

$$\boxed{\mathcal{R}(e_V \times \text{Id}_W) = \text{Id}_W \times e_{x_R(V, W)}} \quad (37)$$

$$\boxed{\mathcal{R}(\text{Id}_W \times i_V) = i_{x_L(W, V)} \times \text{Id}_W} \quad (38)$$

Ces conditions sont nécessaires pour obtenir la relation A3 présentée graphiquement dans la figure 9.

On en déduit

$$\mathcal{R}(V^{**}, W) = (x_L(V, W), x_R(V, W)^{**})$$

$$\mathcal{R}(V, W^{**}) = (x_L(V, W)^{**}, x_R(V, W))$$

Un pivot $\{\mu_V : V \rightarrow V^{**}\}$ dans une catégorie \mathcal{R} -tressée rigide \mathcal{C} est dit compatible avec le flip généralisé si

$$\boxed{\mathcal{R}(\text{Id}_V \times \mu_W^{\pm 1}) = \mu_{x_L(V, W)}^{\pm 1} \times \text{Id}_{x_R(V, W)}} \quad (39)$$

$$\boxed{\mathcal{R}(\mu_V^{\pm 1} \times \text{Id}_W) = \text{Id}_{x_L(V, W)} \times \mu_{x_R(V, W)}^{\pm 1}} \quad (40)$$

Une catégorie pivotée généralisée est une catégorie \mathcal{R} -tressée avec une structure duale et un pivot compatibles avec le flip.

Essayons de tirer des invariants d'entrelacements d'une telle catégorie.

3.2 Coloriages et invariants réguliers

Prenons le diagramme D d'un entrelacement géométrique bien positionné. Quitte à déformer D , on peut supposer qu'il n'a qu'un nombre fini de *points singuliers*, i.e. points de maximum/minimum local et points de croisement. Ces points divisent chaque composant en un nombre fini d'*arêtes*. Un \mathcal{C} -coloriage de D consiste à associer à chaque arête une couleur, i.e. un objet de \mathcal{C} , de telle façon que les couleurs des arêtes adjacentes à un point singulier soient comme dans la figure 11.

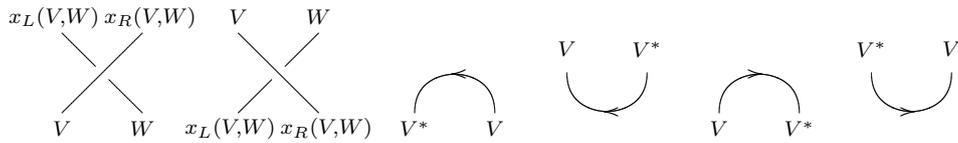
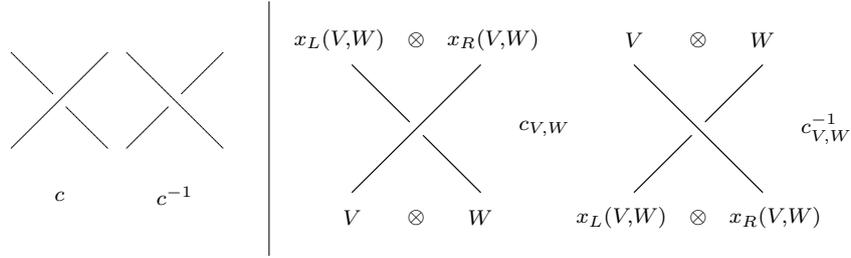


Figure 11: Coloriage au voisinage d'un point singulier

Cette notion de \mathcal{C} -coloriage est une modification de celle qu'on avait pour une catégorie pivotée : premièrement, on change ici la couleur aux points extrémaux, et deuxièmement, on utilise le flip généralisé pour colorier les arêtes adjacentes à un croisement. Notons que les points de maximum/minimum local et les points de croisement sont bien définis pour les

diagrammes mais pas pour les enchevêtrements : il s’agit ici des coloriages des diagrammes et pas des coloriages des enchevêtrements.

Maintenant étant donné un \mathcal{C} –coloriage d’un diagramme D , on exécute les étapes 3-6 de la \mathcal{C} –version de l’algorithme que l’on a donné pour une catégorie enrubannée, avec un seul changement dans notre “dictionnaire” : l’image d’un croisement va être



Si l’on applique l’isotopie régulière à D et que l’on munit le diagramme obtenu du coloriage induit, le résultat de notre algorithme ne change pas : le coloriage induit existe (et il est unique) grâce aux conditions (21), (22), (30), (31), (33) - (40) que l’on a imposées à \mathcal{R} , et l’invariance résulte du fait que les propriétés des structures de catégorie pivotée généralisée codent les relations entre les enchevêtrements élémentaires présentées dans la figure 9 (sauf RI’), de la même manière que les propriétés des structures de catégorie pivotée (non-généralisée) le font.

Il s’en suit en particulier que si l’on tourne un croisement, le coloriage induit satisfait toujours aux relations de la figure 11. Pour \mathcal{R} cela signifie que

$$\mathcal{R}(V^{\varepsilon_1}, W^{\varepsilon_2}) = (U^{\varepsilon_2}, X^{\varepsilon_1})$$

implique

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(V^{-\varepsilon_1}, U^{\varepsilon_2}) &= (W^{\varepsilon_2}, X^{-\varepsilon_1}), \\ \mathcal{R}(X^{-\varepsilon_1}, U^{-\varepsilon_2}) &= (W^{-\varepsilon_2}, V^{-\varepsilon_1}), \end{aligned} \tag{41}$$

où $\varepsilon_i \in \{+, -\}$ signifie la direction du brin correspondant (+ est la direction montante), et V^{ε_1} etc. sont définis par (19) ; cf. figure 12. On voit en particulier que dans chaque croisement, les couleurs de deux arêtes quelconques qui appartiennent à deux brins différents définissent les couleurs de deux autres arêtes.

3.3 S-pivot généralisé

Il nous reste – comme toujours – le mouvement RI’.

Un pivot μ compatible avec le tressage généralisé est appelé *s-pivot généralisé* si de plus

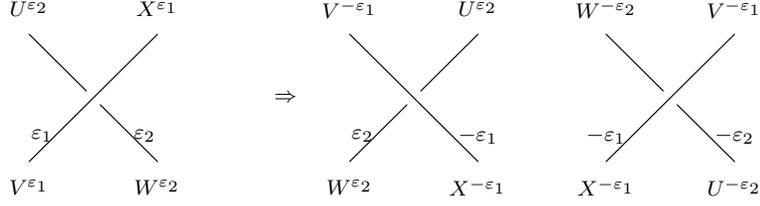


Figure 12: Rotation d'un croisement

- Il existe trois isomorphismes de catégorie monoïdale $t, p, r : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ avec

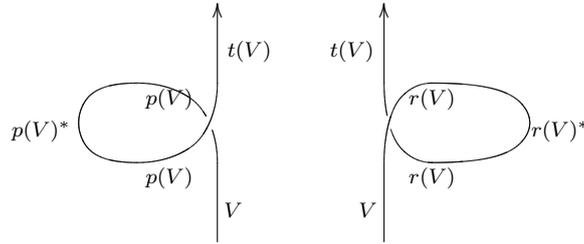
$$\boxed{\mathcal{R}(p(V)^*, p(V)) = (V, t(V)^*)} \quad (42)$$

$$\boxed{\mathcal{R}(r(V), r(V)^*) = (t(V)^*, V)} \quad (43)$$

- On a l'analogie de (18) dans notre cadre généralisé :

$$\boxed{(e_{p(V)} \otimes \mu_{t(V)}^{-1}) \circ (\text{Id}_{p(V)^*} \otimes c_{p(V)^{**}, V}) \circ (i_{p(V)^*} \otimes \text{Id}_V) = (\text{Id}_{t(V)} \otimes e_{r(V)^*}) \circ (c_{V^{**}, r(V)} \otimes \text{Id}_{r(V)^*}) \circ (\mu_V \otimes i_{r(V)})} \quad (44)$$

On tire de (42) et (43), compte tenu des règles de rotation (41), le \mathcal{C} -coloriage d'un “twist” :



Notons que ce coloriage est déterminé par la couleur de n'importe quelle des cinq arêtes du twist, puisque t, p et r sont isomorphismes.

Dans la pratique on a souvent $t = \text{Id}$. Dans ce cas l'existence de bons p et r découle de la condition

$$\begin{aligned} x_L(V, V^*) &= x_R(V, V^*)^*, \\ x_R(V^*, V) &= x_L(V^*, V)^* \end{aligned} \quad (45)$$

pour chaque objet V de \mathcal{C} .

Une catégorie enrubannée (ou s -pivotée) généralisée est une catégorie \mathcal{R} -tressée avec une structure duale et un s -pivot compatibles avec le tressage.

La condition (44) dit que le résultat de notre algorithme est stable par le mouvement RI'. On a ainsi obtenu des invariants de diagrammes \mathcal{C} -coloriés.

3.4 La catégorie des diagrammes coloriés comme une catégorie \mathcal{R} -enrubannée

Soit \mathcal{C} une catégorie \mathcal{R} -enrubannée. La condition (44) et les considérations précédentes permettent de parler des classes de R-équivalence (i.e. l'équivalence de Reidemeister) des diagrammes \mathcal{C} -coloriés. La catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ des diagrammes \mathcal{C} -coloriés généralise la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ des enchevêtrements \mathcal{C} -coloriés que l'on a étudiée avant : ses objets sont toujours les suites finies des couples $((\varepsilon_1, V_1), \dots, (\varepsilon_k, V_k)) \in (\{\pm\} \times \text{Ob}(\mathcal{C}))^k$, et ses morphismes sont les classes de R-équivalence des diagrammes \mathcal{C} -coloriés. La dualité est donnée par

$$(+, V)^* = (-, V^*), \quad (-, V)^* = (+, V_*), \quad (46)$$

où l'on rappelle que V_* est le predual de V . Le flip généralisé est donné par

$$\mathcal{R}((\varepsilon, V), (\eta, W)) = ((\eta, x_L(V, W)), (\varepsilon, x_R(V, W))). \quad (47)$$

Les autres structures copient celles de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Le double dual est toujours l'identité, et l'on choisit un pivot trivial μ .

On peut généraliser la proposition 2.4 dans ce cadre :

Proposition 3.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie \mathcal{R} -enrubannée, alors la catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ munie des structures décrites ci-dessus est \mathcal{R} -enrubannée elle aussi.*

Preuve. Le flip généralisé dans $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ est la combinaison de celui de \mathcal{C} et du "flip-transposition" dans \mathcal{E} . Donc les conditions de la définition d'une catégorie \mathcal{R} -enrubannée pour $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ résultent de ces mêmes conditions pour \mathcal{C} et du fait que la catégorie \mathcal{E} est enrubannée (c.f. la proposition 2.3.)

Il reste à donner les isomorphismes t, r, p de la définition du s-pivot généralisé. On pose

$$\begin{aligned} t((+, V)) &= (+, t(V)), & t((- , V)) &= (-, (t^{-1}(V_*))^*), \\ p((+, V)) &= (+, p(V)), & p((- , V)) &= (-, (rt^{-1}(V_*))^*), \\ r((+, V)) &= (+, r(V)), & r((- , V)) &= (-, (pt^{-1}(V_*))^*), \end{aligned}$$

et l'on vérifie que les conditions (42) et (43) découlent des conditions analogues pour \mathcal{C} . \square

On dresse le bilan de nos considérations dans

Théorème 3.2. *Soit \mathcal{C} une catégorie \mathcal{R} -enrubannée, alors il existe un foncteur covariant monoïdal*

$$F : \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$$

qui préserve le tressage et satisfait aux conditions suivantes :

- $$F((\varepsilon_1, V_1), \dots, (\varepsilon_k, V_k)) = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k. \quad (48)$$
- $F(e_{(+,V)}) = e_V, \quad F(i_{(+,V)}) = i_V.$
- $F(e_{(-,V)}) = e_V \circ (\mu_{V_*} \otimes \text{Id}_V), \quad F(i_{(-,V)}) = (\text{Id}_V \otimes \mu_{V_*}^{-1}) \circ i_V.$

Le foncteur F est uniquement défini par ces conditions.

Preuve. Les conditions imposées sur F impliquent que les images des diagrammes élémentaires \mathcal{C} -coloriés sont les mêmes que dans notre dictionnaire ci-dessus. L'unicité découle alors du fait que les diagrammes élémentaires engendrent la catégorie des enchevêtrements, et l'existence du fait que les images des diagrammes élémentaires satisfont à toutes les relations de la figure 9, ce qui est vérifié ci-dessus. \square

Remarque 3.3. Le foncteur F ne préserve pas la dualité. On peut s'en sortir, comme dans la construction des invariants d'enchevêtrements usuels, en autorisant des coupons marqués par des morphismes de \mathcal{C} et en changeant la structure duale de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$. Dans ce cas on pourrait caractériser F comme l'unique foncteur s -pivoté défini sur les objets par (48).

Notons que si l'on veut comparer deux diagrammes, on ne sait pas a priori comment les colorier d'une façon compatible. Même pire : on ne sait pas comment trouver un coloriage quelconque d'un diagramme. C'est le prix à payer pour la généralité de la construction. Dans ce qui suit on va voir comment les considérations géométriques peuvent nous aider à résoudre ces problèmes.

3.5 Groupes tressés : un exemple-jouet de catégorie \mathcal{R} -enrubannée

Un groupe G est dit *tressé* s'il est muni d'une application inversible (appelée *tressage*)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_G : G \times G &\rightarrow G \times G \\ (c, d) &\mapsto (x_L(c, d), x_R(c, d)), \end{aligned}$$

qui satisfait aux propriétés suivantes :

1. $m \circ \mathcal{R} = m : G \times G \rightarrow G$
2. $\mathcal{R} \circ m_{23} = m_{12} \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{12} : G \times G \times G \rightarrow G \times G$
3. $\mathcal{R} \circ m_{12} = m_{23} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} : G \times G \times G \rightarrow G \times G$

Ici m signifie la multiplication dans G , et comme avant, \mathcal{R}_{ij} (ou m_{ij}) agit comme \mathcal{R} (resp. m) sur les i -ème et j -ème facteurs.

On vérifie facilement

Lemme 3.4. *L'application inversible \mathcal{R} définit un tressage sur un groupe G ssi l'application \mathcal{R}^{-1} le fait.*

Un groupe tressé G permet de construire une catégorie-jouet \mathcal{C}_G qui a pour objets les éléments de G et qui n'a que des morphismes identités. La structure monoïdale sur \mathcal{C}_G est donnée par $a \otimes b = m(a, b)$, et la dualité par $a^* = a^{-1}$.

L'application \mathcal{R} définit un bifoncteur inversible

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{C}_G \times \mathcal{C}_G &\rightarrow \mathcal{C}_G \times \mathcal{C}_G \\ (c, d) &\mapsto (x_L(c, d), x_R(c, d)). \end{aligned}$$

Proposition 3.5. *Le bifoncteur \mathcal{R} et les isomorphismes $c_{a,b} = \text{Id}_{ab}$ font de \mathcal{C}_G une catégorie \mathcal{R} -enrubannée.*

Preuve. Notons que la propriété 1 des groupes tressés implique que $c \otimes d = x_L(c, d) \otimes x_R(c, d)$, donc les $c_{a,b}$ sont bien définis.

Vérifions les conditions de la définition d'une catégorie \mathcal{R} -enrubannée.

- Toutes les conditions imposées aux morphismes, y compris la fonctorialité de \mathcal{R} et de c , sont trivialement vraies, puisque tous les morphismes dans \mathcal{C}_G sont triviaux.
- La condition (21) découle de la propriété 2 des groupes tressés appliquée à $(c, d, 1) \in G \times G \times G$ et de la propriété 3 appliquée à $(1, c, d)$.
- Les équations (22) sont exactement les propriétés 2 et 3.
- Montrons (30). Posons

$$\begin{aligned} (a', b', c') &= \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}(a, b, c), \\ (a'', b'', c'') &= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}(a, b, c) \end{aligned}$$

pour $(a, b, c) \in G \times G \times G$. D'après 1 et 2,

$$\begin{aligned} (a'b', c') &= m_{12}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}(a, b, c) \\ &= m_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}(a, b, c) \\ &= \mathcal{R}m_{23}(a, b, c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a''b'', c'') &= m_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}(a, b, c) \\ &= \mathcal{R}m_{23}\mathcal{R}_{23}(a, b, c) \\ &= \mathcal{R}m_{23}(a, b, c) \\ &= (a'b', c'). \end{aligned}$$

De même 1 et 3 impliquent

$$(a', b'c') = (a'', b''c'').$$

Il s'en suit que

$$(a', b', c') = (a'', b'', c'').$$

- Les conditions (33) - (36) découlent de la propriété 2 appliquée à (c, d, d^{-1}) et 3 appliquée à (c^{-1}, c, d) .
- On pose $\mu = t = \text{Id}$. La propriété 1 implique que $\mathcal{R}(d^{-1}, d)$ est un couple d'éléments mutuellement inverses. Puis, d'après (41), $\mathcal{R}(d^{-1}, d) = (c^{-1}, c)$ implique $\mathcal{R}(c^{-1}, c) = (d^{-1}, d)$. Dès lors $p : c \mapsto d^{-1}$ et $r = p^{-1}$ donnent les isomorphismes demandés. Notons que l'on a

$$r(d) = p(d^{-1})^{-1}$$

pour tout $d \in G$.

□

On a ainsi obtenu toute une classe de catégories \mathcal{R} -enrubannées avec le flip non-trivial. Mais on ne peut pas en servir pour produire des invariants de G -enchevêtrements puisque tous les morphismes dans \mathcal{C}_G sont triviaux.

Dans la suite on va appeler G -coloriés les diagrammes \mathcal{C}_G -coloriés (il s'agit en effet du coloriage par des éléments du groupe G), et l'on va noter \mathcal{D}_G la catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_G}$ des diagrammes \mathcal{C}_G -coloriés.

3.6 Catégories G -enrubannées et un exemple étoffé de catégorie \mathcal{R} -enrubannée

Une catégorie \mathcal{C} est dite *fibrée sur* l'ensemble A si elle est munie d'une projection $\pi = \pi_{\mathcal{C}} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow A$ avec

$$\pi(V) \neq \pi(W) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) = \emptyset.$$

Une catégorie rigide \mathcal{C} fibrée sur un groupe G est dite G -fibrée si la projection π est compatible avec le produit tensoriel et la dualité, i.e.

$$\pi(V \otimes W) = \pi(V)\pi(W), \quad (49)$$

$$\pi(V^*) = \pi(V)^{-1}. \quad (50)$$

Une catégorie \mathcal{R} -enrubannée \mathcal{C} fibrée sur un groupe tressé G est dite G -enrubannée si en plus le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \times \pi \\ G \times G & \xrightarrow{\mathcal{R}_G} & G \times G \end{array} \quad (51)$$

Il s'en suit

$$\pi(1_{\mathcal{C}}) = 1_G, \quad (52)$$

$$\pi(V_*) = \pi(V)^{-1}, \quad (53)$$

$$\pi(t(V)) = \pi(V), \quad (54)$$

$$\pi(p(V)) = p(\pi(V)), \quad (55)$$

$$\pi(r(V)) = r(\pi(V)). \quad (56)$$

Cela revient au même de dire que π définit un foncteur de catégories \mathcal{R} -enrubannées

$$\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_G.$$

Pour le groupe trivial $G = \{1\}$ on retrouve les catégories \mathcal{R} -enrubannées.

On donne maintenant un exemple étoffé de catégorie \mathcal{R} -enrubannée, avec en plus une G -structure.

Proposition 3.6. *Soit G un groupe tressé, alors la catégorie \mathcal{D}_G est G -enrubannée.*

Preuve. La proposition 3.1 appliquée à la catégorie \mathcal{C}_G , qui est \mathcal{R} -enrubannée d'après la proposition 3.5, montre que la catégorie \mathcal{D}_G est \mathcal{R} -enrubannée. On la munit d'une G -fibration donnée par $\pi((\epsilon, g)) = g$, et l'on vérifie les conditions (49)-(51). \square

On peut généraliser la proposition 3.1 dans ce cadre :

Proposition 3.7. *Soit \mathcal{C} une catégorie G -enrubannée, alors la catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ munie des structures de la proposition 3.1 est G -enrubannée elle aussi.*

Preuve. On munit $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ d'une G -fibration donnée par $\pi((\epsilon, V)) = \pi_{\mathcal{C}}(V)$, et l'on vérifie les conditions (49)-(51). Pour cela on utilise ces mêmes conditions pour \mathcal{C} et leur conséquence (53) (c.f. la définition (46) de la dualité dans $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$). \square

Remarque 3.8. Pour une catégorie G -enrubannée \mathcal{C} , le foncteur F du théorème 3.2 préserve la G -structure, dans le sens que le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{D}_{\mathcal{C}}} & \swarrow \pi_{\mathcal{C}} \\ & G & \end{array} \quad (57)$$

commute.

3.7 Sections d'une catégorie G -enrubannée

On peut se demander pourquoi ajouter une G -structure à notre construction déjà assez compliquée. La raison c'est que trouver des G -coloriages est souvent facile (on le verra dans le chapitre suivant), et maintenant on va montrer comment construire des \mathcal{C} -coloriages de diagrammes à partir de leurs G -coloriages quand \mathcal{C} est G -enrubannée.

Soit \mathcal{C} une catégorie G -enrubannée. Appelons *section* une famille \mathcal{A}_g d'éléments de \mathcal{C} paramétrés par G , telle que

$$\pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_g) = g \quad \forall g \in G$$

et

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = (\mathcal{A}_{x_L(g,h)}, \mathcal{A}_{x_R(g,h)}) \quad \forall g, h \in G.$$

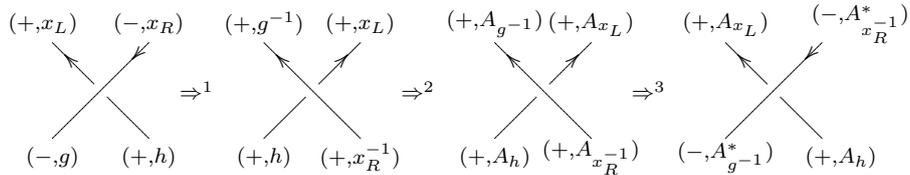
Notons que l'on n'a en général ni $A_g^* = A_{g^{-1}}$, ni $A_{gh} = A_g \otimes A_h$.

Proposition 3.9. *L'application*

$$\begin{aligned} (+, g) &\mapsto (+, \mathcal{A}_g), \\ (-, g) &\mapsto (-, \mathcal{A}_{g^{-1}}) \end{aligned}$$

s'étend d'une façon unique en un foncteur s -pivoté $H_{\mathcal{A}} : \mathcal{D}_G \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$.

Preuve. La vérification est triviale sauf le fait qu'étant donné un diagramme G -colorié, on obtient bien un \mathcal{C} -coloriage autour de chaque croisement. Démontrons le pour un seul choix du signe du croisement et des orientations de ses brins, les autres cas étant similaires. Dans la figure ci-dessous on obtient chaque coloriage à partir du coloriage précédent en se rappelant les règles de rotation (c.f. formule (41) et figure 12) pour les implications 1 et 3, et en utilisant la définition d'une section de catégorie G -enrubannée pour 2. On note $x_L = x_L(g, h)$, $x_R = x_R(g, h)$.



□

On combine ce résultat avec le théorème 3.2 pour obtenir

Théorème 3.10. *Chaque section \mathcal{A} d'une catégorie G -enrubannée \mathcal{C} définit un foncteur covariant monoïdal*

$$F_{\mathcal{A}} : \mathcal{D}_G \xrightarrow{H_{\mathcal{A}}} \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

qui donne des invariants de diagrammes G -coloriés.

4 Enchevêtrements avec des connexions plates dans le complémentaire

Dans le chapitre précédent on a vu comment construire des invariants de diagrammes G -coloriés pour un groupe tressé G , étant donné une catégorie G -enrubannée munie d'une section. Maintenant on va étudier de plus près les G -coloriages dans le cas particulier d'un groupe factorisable. On montrera comment les obtenir géométriquement, et l'on conclura par l'interprétation de ces coloriages en termes des G -connexions pour le G -fibré principal trivial sur le complémentaire d'un enchevêtrement.

On travaille avec un diagramme D d'un enchevêtrement géométrique E , et l'on suppose qu'il n'a qu'un nombre fini de *points singuliers* (i.e. points de maximum/minimum local et points de croisement). En particulier, D n'a pas de parties parallèles à l'axe $0y$. Dans ce chapitre, on suppose E , quitte à le translater et rétrécir, ε -proche de sa projection D , et l'on oublie l'orientation de E . Tout ce qui suit est valable pour des enchevêtrements fins ainsi que pour des enchevêtrements en bande – il faut juste utiliser la version correspondante du théorème de Reidemeister.

4.1 Topologie du complémentaire de l'enchevêtrement

Le diagramme d'un enchevêtrement divise la bande $\mathbb{R} \times I$ du plan $y0z$ en un nombre fini de parties que l'on numérote $0, 1, \dots, k$, la partie 0 étant celle qui est infinie à gauche. Pour chaque $i = 0, \dots, k$ on choisit un point quelconque p_i dans la partie i et l'on construit un lacet γ_i qui va de p_0 vers p_i par-dessus E (i.e. dans le demi-espace $x > \varepsilon$ en dehors de petits voisinages des points p_0 et p_i) et revient par-dessous – c.f. figure 13.

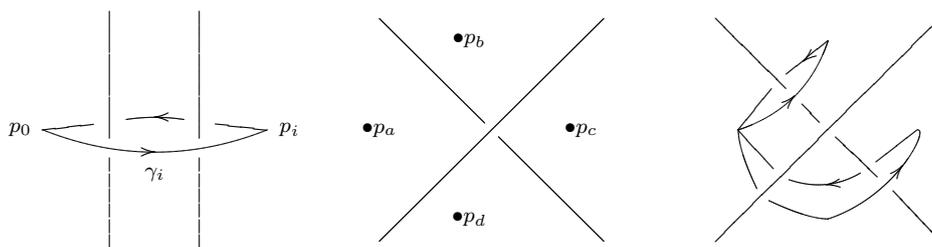


Figure 13: Groupe fondamental de C_E : générateurs et relations

Le lemme suivant est classique – il est une conséquence de la présentation de Wirtinger du complémentaire d'un enchevêtrement :

Lemme 4.1. *Les classes d'homotopie de lacets γ_i , $i = 1, \dots, k$ forment un système de générateurs du groupe fondamental $\pi_1(C_E, p_0)$ du complémentaire*

C_E de E , avec la relation

$$\gamma_a^{-1}\gamma_b = \gamma_d^{-1}\gamma_c \quad (58)$$

pour chaque croisement positif et

$$\gamma_a\gamma_b^{-1} = \gamma_d\gamma_c^{-1} \quad (59)$$

pour chaque croisement négatif (c.f. figure 13 pour les notations et l'interprétation géométrique pour un croisement positif).

On s'intéresse aussi à ce qui se passe sur le bord de la bande $\mathbb{R}^2 \times I$. Rappelons que

$$\partial E = \underbrace{\{(0, 1, 0), \dots, (0, m, 0)\}}_{\partial_- E} \cup \underbrace{\{(0, 1, 1), \dots, (0, n, 1)\}}_{\partial_+ E}.$$

Notons

$$R_m = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), \dots, (0, m)\}.$$

On construit un lacet ρ_i dans \mathbb{R}^2 qui va de $(0, 0)$ vers $(0, i + \frac{1}{2})$ dans le demi-plan $x \geq 0$ et revient dans le demi-plan $x \leq 0$ (c.f. figure 14). Les classes d'homotopie des lacets ρ_i , $i = 1, \dots, m$, engendrent librement le groupe fondamental $\pi_1(R_m, (0, 0))$.

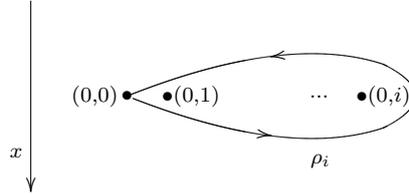


Figure 14: Groupe fondamental de R_m

Appelons D -groupoïde de C_E et notons $\pi^D(C_E, p)$ la sous-catégorie pleine du groupoïde fondamental de C_E avec les points p_i comme objets, les classes d'homotopie des chemins de p_i vers p_j comme flèches de source p_i et de but p_j , et la composition des chemins comme composition des flèches.

Les points singuliers divisent chaque composant de D en un nombre fini d'arêtes – on a utilisé cette division dans la définition d'un coloriage du diagramme. Pour une telle arête α , soit l_α (resp. r_α) le numéro de la partie de $\mathbb{R} \times I$ à sa gauche (resp. à sa droite). Rappelons que l'on n'autorise pas d'intervalles parallèles à l'axe $0y$. Notons ensuite α_+ un chemin qui va de p_{l_α} vers p_{r_α} par-dessus E et α_- un chemin qui va de p_{l_α} vers p_{r_α} par-dessous (c.f. figure 15).

On a la présentation suivante de $\pi^D(C_E, p)$:

Lemme 4.2. *Les classes d'homotopie des chemins α_+, α_- pour tous les arêtes α forment un système de générateurs du D -groupeïde $\pi^D(C_E, p)$, avec les relations*

1.

$$\alpha_+ \beta_+ = \alpha_- \beta_- = 1_{l_\alpha} \quad (60)$$

si α et β sont adjacents à un point de maximum/minimum local, avec α à gauche de β ;

2.

$$\alpha_+ \beta_+ \delta_\mp^{-1} \gamma_\mp^{-1} = \alpha_- \beta_- \delta_\mp^{-1} \gamma_\mp^{-1} = \alpha_\pm \beta_\mp \delta_\pm^{-1} \gamma_\mp^{-1} = 1_{l_\alpha} \quad (61)$$

pour chaque croisement, où \pm est le signe du croisement et les arêtes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont comme dans la figure 15.

On peut remplacer les équations (61) par le système suivant :

$$\alpha_+ \beta_+ \delta_+^{-1} \gamma_+^{-1} = 1_{l_\alpha}, \quad (62)$$

$$\alpha_+ \alpha_-^{-1} = \gamma_\mp \delta_+ \delta_-^{-1} \gamma_\mp^{-1}, \quad (63)$$

$$\beta_+ \beta_-^{-1} = \alpha_\pm^{-1} \gamma_+ \gamma_-^{-1} \alpha_\pm \quad (64)$$

(c.f. figure 15 pour l'interprétation géométrique dans le cas d'un croisement positif).

Preuve. La partie suffisante de la version (61) des conditions pour un croisement se démontre par considérations topologiques. Ensuite on montre comment déduire (61) de (62)-(64). \square

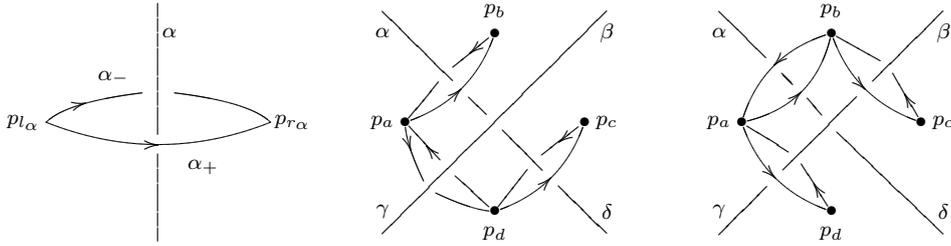


Figure 15: D -groupeïde de C_E : générateurs et relations

Notons que le groupe fondamental $\pi_1(C_E, p_0)$ est la sous-catégorie pleine de $\pi^D(C_E, p)$ avec p_0 comme le seul objet.

4.2 Groupes factorisables

Un groupe G est dit *factorisable* en deux sous-groupes $G_{\pm} \subseteq G$ si chaque élément g de G admet une unique décomposition

$$g = g_+ g_-^{-1}, \quad g_{\pm} \in G_{\pm}. \quad (65)$$

Si l'on applique cette assertion à g^{-1} , on obtient pour g l'existence et l'unicité de la décomposition

$$g = \bar{g}_- \bar{g}_+^{-1}, \quad \bar{g}_{\pm} \in G_{\pm}.$$

Un groupe de Lie complexe G est dit factorisable si chaque g dans un voisinage ouvert (pour la topologie de Zariski) de 1_G admet une unique décomposition (65). Dans ce cas chaque $l \in \mathfrak{g} = Lie(G)$ admet une unique décomposition

$$l = l_+ - l_-, \quad l_{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm} = Lie(G_{\pm}).$$

Remarquons que chaque groupe est trivialement factorisable : on prend $G_{\pm} = G$ et $G_{\mp} = 1$.

On peut munir un groupe factorisable G d'une autre structure de groupe, donnée par la multiplication

$$g \star h = g_+ h_+ h_-^{-1} g_-^{-1},$$

le même élément neutre 1_G et l'inverse

$$i(g) = g_+^{-1} g_-.$$

Le groupe $G^* := (G, \star)$ ainsi défini est isomorphe au produit direct $G_+ \times G_-$. Signalons ici un abus de notation : la structure de groupe de G^* dépend de la factorisation choisie de G , et pas uniquement de la structure de groupe sur G .

4.3 G -enchevêtrements et diagrammes G -coloriés

Un G -enchevêtrement est un enchevêtrement muni d'une représentation dans le groupe G du groupe fondamental de son complémentaire. D'après lemme 4.1, donner cette représentation revient au même de trouver des éléments g_i , $i = 1, \dots, k$ (les images des lacets γ_i) qui satisfassent aux relations analogues à (58), (59) :

$$g_a^{-1} g_b = g_d^{-1} g_c \quad (66)$$

pour un croisement positif et

$$g_a g_b^{-1} = g_d g_c^{-1} \quad (67)$$

pour un croisement négatif.

Notons qu'une isotopie entre deux enchevêtrements se relève en une bijection entre les ensembles de leurs G -structures. On appelle G -isotopie, l'isotopie qui respecte les G -structures.

Supposons maintenant le groupe G factorisable en G_{\pm} . Une $G(+, -)$ -représentation du D -groupoïde $\pi^D(C_E, p)$ du complémentaire C_E de E est une représentation de $\pi^D(C_E, p)$ dans G , telle que l'image d'un chemin qui passe par-dessus (par-dessous) E (i.e. qui est dans le demi-espace $x > \varepsilon$ (resp. $x < -\varepsilon$) en dehors de petits voisinages de ses extrémités) appartient à G_+ (resp. G_-). Donner cette représentation revient au même de trouver des éléments $a_{\pm} \in G_{\pm}$ pour chaque arête (les images des chemins α_{\pm}) qui satisfassent aux relations du lemme 4.2, où les α_{\pm} sont remplacés par les a_{\pm} . En fait, on peut dire plus :

Lemme 4.3. *La collection d'éléments $a_{\pm} \in G^{\pm}$ donne une $G(+, -)$ -représentation de $\pi^D(C_E, p)$ ssi ils satisfont aux relations suivantes :*

1.

$$a \star b = 1_G \quad (68)$$

pour les images des arêtes α et β adjacentes à un points de maximum/minimum local, avec α à gauche de β ;

2. *pour chaque croisement, ou bien*

$$a = c_{\mp} d c_{\mp}^{-1}, \quad (69)$$

$$b = a_{\pm}^{-1} c a_{\pm}, \quad (70)$$

ou bien

$$a \star b = c \star d, \quad (71)$$

$$a_{\pm} b_{\mp} = c_{\mp} d_{\pm}, \quad (72)$$

où \pm est le signe du croisement et a, b, c, d sont les images de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la figure 15.

Preuve. Toutes les relations dans l'énoncé de ce lemme sont clairement des conséquences de celles du lemme 4.2. Montrons qu'elles sont suffisantes.

Regardons le cas d'un croisement positif. On réécrit (69) comme

$$a_-^{-1} c_- d_- = a_+^{-1} c_- d_+,$$

et (70) comme

$$b_+^{-1} a_+^{-1} c_+ = b_-^{-1} a_+^{-1} c_-.$$

Il s'en suit

$$b_-^{-1} a_-^{-1} c_- d_- = b_-^{-1} a_+^{-1} c_- d_+ = b_+^{-1} a_+^{-1} c_+ d_+,$$

donc cet élément appartient à la fois à G_+ et G_- . Il est alors trivial, par l'unicité de la décomposition (65). On en tire que l'image des deux côtés de (62) dans G est 1_G . Les images des équations (63) et (64) sont exactement (69) et (70).

Pour le deuxième système des relations, il suffit d'écrire (71) comme

$$\begin{aligned} a_+ b_+ &= c_+ d_+, \\ a_- b_- &= c_- d_-, \end{aligned}$$

ce qui implique, avec (72), que les images des trois lacets dans (61) dans G sont triviales. □

Un G -coloriage d'un diagramme consiste à donner à chaque arête une couleur, i.e. un élément a de G , de telle façon que les composants $a_{\pm} \in G^{\pm}$ de sa décomposition (65) donnent une $G(+, -)$ -représentation de $\pi^D(C_E, p)$, i.e. satisfassent aux relations du lemme 4.3.

4.4 Un groupe factorisable est tressé

Regardons maintenant les identités (69), (70) de plus près. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : G \times G &\rightarrow G \times G \\ (c, d) &\mapsto (x_L(c, d), x_R(c, d)), \end{aligned}$$

donnée par

$$\begin{aligned} x_L &= x_L(c, d) = c_- d c_-^{-1}, \\ x_R &= x_R(c, d) = (x_L)_+^{-1} c (x_L)_+. \end{aligned}$$

Lemme 4.4. *L'application \mathcal{R} fait d'un groupe factorisable G avec la multiplication \star un groupe tressé.*

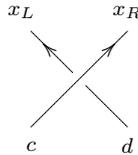
Preuve. L'application \mathcal{R} est inversible, et son inverse

$$(c, d) \mapsto (\widetilde{x}_L(c, d), \widetilde{x}_R(c, d))$$

est donnée par

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_L(c, d) &= c_+ d c_+^{-1}, \\ \widetilde{x}_R(c, d) &= (\widetilde{x}_L)_-^{-1} c (\widetilde{x}_L)_-. \end{aligned}$$

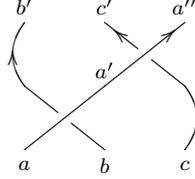
Considérons le coloriage de l'enchevêtrement élémentaire ci-dessous. C'est bien un coloriage, car la définition de \mathcal{R} implique les relations (69) et (70) pour le croisement, celui-ci étant le seul point singulier de l'enchevêtrement.



La propriété 1 des groupes tressés provient alors de la propriété (71) du G -coloriage.

Montrons la propriété 2, la preuve de 3 étant analogue.

Pour les éléments $a, b, c \in G$, posons $(b', a') = \mathcal{R}(a, b)$, $(c', a'') = \mathcal{R}(a', c)$.
Considérons le coloriage de l'enchevêtrement E dans la figure ci-dessous.



C'est bien un coloriage, car la définition de \mathcal{R} implique les relations (69) et (70) pour les deux croisements, ceux-ci étant les seuls points singuliers de E .

On a

$$(b', c', a'') = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}(a, b, c).$$

Il suffit de montrer

$$(b' \star c', a'') = \mathcal{R}(a, b \star c).$$

On a

$$b' \star c' = a_- \cdot (b \star c) \cdot a_-^{-1},$$

car dans la $G(+, -)$ -représentation de $\pi^D(C_E, p)$ induite par le coloriage présenté, ce sont les images dans G de deux lacets isotopes. Or

$$x_L(a, b \star c) = a_- \cdot (b \star c) \cdot a_-^{-1}$$

lui aussi par définition, d'où

$$x_L(a, b \star c) = b' \star c'.$$

Ensuite, d'après la propriété (71) et l'associativité de \star , on a

$$\begin{aligned} (b' \star c') \star a'' &= b' \star (c' \star a'') = b' \star (a' \star c) = (b' \star a') \star c = \\ (a \star b) \star c &= a \star (b \star c) = x_L(a, b \star c) \star x_R(a, b \star c), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Remarque 4.5. On vérifie que les isomorphismes r, p sont donnés dans ce cas par

$$r(g) = i(g)^{-1},$$

$$p(g) = i(g^{-1}).$$

Remarque 4.6. La définition du G -coloriage de la section précédente devient un cas particulier de celle des paragraphes 3.4 et 3.5 pour le groupe (G, \star) vu comme un groupe tressé.

4.5 Catégories \mathcal{E}_G et \mathcal{D}_G

Rappelons que l'on suppose E ε -proche de sa projection D . Dans ce cadre on a

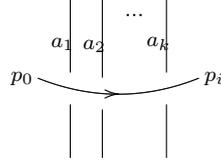
Proposition 4.7. *Pour un groupe factorisable G , il existe une bijection entre G -coloriages de D et structures de G -enchevêtrement sur E .*

Preuve. Etant donné une G -représentation de $\pi_1(C_E, p_0)$, on colorie chaque arête α par

$$a = i(g_{l_\alpha}) \star g_{r_\alpha}, \quad (73)$$

avec la convention $g_0 = 1_G$. Les équations (68) et (71) deviennent évidentes, et (72) est une conséquence de (66) ou (67).

Prenons maintenant un G -coloriage de D , i.e. une $G(+, -)$ -représentation du D -groupoïde $\pi^D(C_E, p)$. Pour chaque i , projetons la partie du lacet γ_i (c.f. figure 13) qui va de p_0 vers p_i sur le plan $y0z$. Supposons, quitte à bouger γ_i , que cette projection intersecte les arêtes de D coloriées par a_1, \dots, a_k dans des points non-singuliers, dans cet ordre et toujours de gauche à droite - c.f. le dessin.



On pose alors

$$g_i = a_1 \star \dots \star a_k, \quad g_0 = 1_G, \quad (74)$$

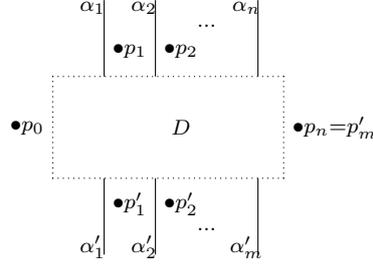
c.à.d. g_i est l'image du lacet γ_i par notre $G(+, -)$ -représentation de $\pi^D(C_E, p)$. Cette dernière interprétation implique que l'expression (74) ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ_i , et que les g_i ainsi définis donnent une G -représentation de $\pi_1(C_E, p_0)$.

On vérifie facilement que les applications ainsi définies entre l'ensemble de G -coloriages de D et l'ensemble de structures de G -enchevêtrement sur E sont inverses l'une à l'autre. \square

Cette proposition permet de mieux comprendre les diagrammes G -coloriés en travaillant avec G -représentations de $\pi_1(C_E, p_0)$, qui sont souvent plus faciles à contrôler, comme par exemple dans la preuve de la proposition suivante :

Proposition 4.8. *Si dans le dessin suivant on remplace le diagramme D par un diagramme R -équivalent D' , alors un G -coloriage de D induit un et un seul G -coloriage de D' si l'on demande aux couleurs des arêtes*

$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ de rester les mêmes.



Preuve. D et D' sont des diagrammes de deux enchevêtrements E et E' , isotopes d'après le théorème de Reidemeister. Un G -coloriage de D donne une G -représentation de $\pi_1(C_E, p_0)$. L'isotopie entre E et E' permet d'obtenir une G -représentation de $\pi_1(C_{E'}, p_0)$ avec les mêmes images des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m$ correspondant aux points $p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_m$. D'après la proposition 4.7, cette représentation donne à son tour un G -coloriage de D' . Or d'après la formule (73), la couleur des arêtes $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ ne dépend que des images des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m$ dans G . \square

Remarquons que l'on peut donner une preuve algébrique de cette proposition. Elle consiste à vérifier que les conditions (68)-(70) sont stables par l'isotopie ambiante et les mouvements de Reidemeister. Il suffit de le voir pour les relations entre les enchevêtrements élémentaires (c.f. figure 9).

Décrivons maintenant la catégorie \mathcal{E}_G des G -enchevêtrements. Ses objets sont les couples (une suite finie des signes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{\pm\}^k$, une G -représentation π^k de $\pi_1(R_k, (0, 0))$). En d'autres termes, on peut voir les objets comme suites finies des couples $((\varepsilon_1, g_1), \dots, (\varepsilon_k, g_k)) \in (\{\pm\} \times G)^k$, où g_i est l'image du lacet générateur ρ_i (c.f. figure 14). Les morphismes de $((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \pi^m)$ vers $((\eta_1, \dots, \eta_n), \pi^n)$ sont les classes de G -isotopie des G -enchevêtrements géométriques (E, π) de type (m, n) , avec l'orientation du composant adjacent au bord dans le point $(0, i, 0) \in \partial_- E$ (ou $(0, i, 1) \in \partial_+ E$) déterminée par le signe ε_i (resp. η_i) d'après les règles dans la figure 6, et avec la restriction de π au bord $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \{(0, 1, 0), \dots, (0, m, 0)\}$ (ou $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \setminus \{(0, 1, 1), \dots, (0, n, 1)\}$) qui donne π^m (resp. π^n). La composition des morphismes et le morphisme identité sont définis comme pour la catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} .

Rappelons que dans les paragraphes 3.4 et 3.5 on a introduit la catégorie \mathcal{D}_G des diagrammes G -coloriés pour un groupe G tressé, et donc à fortiori pour G factorisable.

On termine l'étude des G -enchevêtrements et diagrammes G -coloriés par le résultat suivant.

Théorème 4.9. *Pour un groupe factorisable G , les catégories \mathcal{E}_G et \mathcal{D}_G sont isomorphes.*

Preuve. Construisons deux foncteurs inverses

$$\mathcal{E}_G \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{H} \end{array} \mathcal{D}_G .$$

Sur les objets on impose

$$F((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \dots, (\varepsilon_k, g_k)) = ((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, i(g_1) \star g_2), \dots, (\varepsilon_k, i(g_{k-1}) \star g_k)), \quad (75)$$

$$H((\varepsilon_1, a_1), (\varepsilon_2, a_2), \dots, (\varepsilon_k, a_k)) = ((\varepsilon_1, a_1), (\varepsilon_1, a_1 \star a_2), \dots, (\varepsilon_k, a_1 \star \dots \star a_k)). \quad (76)$$

Clairement on a une bijection au niveau des objets.

Pour les morphismes, on fait descendre la bijection de la proposition 4.7 aux classes d'isotopie grâce à la proposition 4.8. □

Remarque 4.10. La dualité sur \mathcal{D}_G est donnée par

$$(\varepsilon, a)^* = (-\varepsilon, i(a)).$$

Le théorème précédent nous donne alors plusieurs structures monoïdales rigides sur \mathcal{E}_G , une pour chaque factorisation de G .

4.6 Connexions plates

Donnons ici une interprétation géométrique des G -enchevêtrements en termes des G -connexions pour un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie est notée \mathfrak{g} .

Soit F_E le G -fibré principal trivial sur le complémentaire C_E d'un enchevêtrement géométrique E de type (m, n) , et $A_E \in \Omega^1(C_E, \mathfrak{g})$ la 1-forme différentielle qui représente une G -connexion plate dans F_E . Les opérateurs de transport parallèle le long des chemins permettent de voir la connexion comme une représentation du groupoïde fondamental de C_E dans G .

On travaille uniquement avec les G -connexions concentrées, i.e. celles qui décroissent suffisamment vite quand $y \rightarrow -\infty$, de telle sorte que le transport parallèle le long des chemins entre (x_0, y_0, z_0) et (x, y, z) ait une limite finie quand $y \rightarrow -\infty$, et ceci uniformément en x et z .

On considère aussi les G -connexions plates dans le G -fibré principal trivial F_m sur

$$R_m = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), \dots, (0, m)\},$$

et l'on suppose toujours ces connexions concentrées, i.e., comme ci-dessus, décroissant suffisamment vite quand $y \rightarrow -\infty$.

Pour deux telles connexions α_m, α_n dans F_m et F_n respectivement, notons $\mathcal{A}_E(\alpha_m, \alpha_n)$ l'espace de G -connexions plates concentrées dans F_E , dont la restriction sur le bord $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \partial_- E$ (ou $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \setminus \partial_+ E$) donne α_m (resp. α_n).

Notons $[\alpha_m]$ la classe de jauge d'une connexion concentrée α_m dans F_m relativement aux transformations de jauge triviales en $y = -\infty$. On identifie $[\alpha_m]$ avec une G -représentation de $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, -\infty))$. Notons \mathcal{M}_m l'espace de telles classes $[\alpha_m]$, i.e. l'espace de modules des connexions concentrées dans F_m .

La classe de jauge d'une connexion appartenant à $\mathcal{A}_E(\alpha_m, \alpha_n)$ relativement aux transformations de jauge triviales en $y = -\infty$ ne dépend que des classes de jauge $[\alpha_m], [\alpha_n]$ des connexions sur le bord. Notons $\mathcal{M}_E([\alpha_m], [\alpha_n])$ cet espace de modules.

Une isotopie entre deux enchevêtrements E et E' de type (m, n) se relève en un isomorphisme entre les G -connexions plates dans F_E et $F_{E'}$ trivial sur le bord, et ainsi en un isomorphisme entre $\mathcal{M}_E([\alpha_m], [\alpha_n])$ et $\mathcal{M}_{E'}([\alpha_m], [\alpha_n])$. Cet isomorphisme et l'isotopie d'enchevêtrements définissent une relation d'équivalence sur l'espace de couples (E, M_E) , où M_E sont éléments de $\mathcal{M}_E([\alpha_m], [\alpha_n])$. L'ensemble de classes d'équivalence pour cette relation est noté $\mathcal{M}_{[E]}([\alpha_m], [\alpha_n])$.

Notons qu'un élément de $\mathcal{M}_E([\alpha_m], [\alpha_n])$ définit une G -représentation de $\pi_1(C_E, p_0)$, où l'on place le point p_0 suffisamment loin à gauche. Nos constructions géométriques donnent alors une description alternative de la catégorie \mathcal{E}_G des G -enchevêtrements : l'ensemble des objets de \mathcal{E}_G peut se voir comme $\coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_m$, et l'ensemble des morphismes entre $[\alpha_m]$ et $[\alpha_n]$ comme $\coprod_{[E] \in \text{Hom}_{\bar{\mathcal{E}}}(m, n)} \mathcal{M}_{[E]}([\alpha_m], [\alpha_n])$ (rappelons que $\bar{\mathcal{E}}$ est la catégorie des (classes d'isotopie des) enchevêtrements non-orientés).

5 Vers une catégorie GL_2 -enrubannée

D'après ce qui précède, pour appliquer nos considérations abstraites, il nous faut trois ingrédients :

1. un groupe factorisable G ;
2. une catégorie \mathcal{C} G -tressée ;
3. une section \mathcal{A} de \mathcal{C} .

Suivant Kashaev et Reshetikhin ([8],[9]), on va étudier l'exemple où $G = GL_2$ et \mathcal{C} est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{U}_\varepsilon(gl_2) \mathbf{mod} \mathcal{U}_\varepsilon(gl_2)$ de bi-modules de dimension finie sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 à une racine de l'unité (cf. section 2.5 pour la catégorie de bimodules ; l'algèbre

$U_\varepsilon(gl_2)$ est définie et étudiée ci-dessous). La construction de Kashaev et Reshetikhin reste une esquisse : bizarrement c'est le premier ingrédient qui pose des problèmes chez eux. En effet, ils définissent une factorisation sur un voisinage ouvert (dans le sens de Zariski) GL_2^* de l'élément neutre de GL_2 , mais cet ouvert n'est pas un sous-groupe de GL_2 , bien que la construction du tressage nécessite à la fois une structure de groupe *et* une factorisation. La factorisabilité dans le sens de groupes de Lie (cf. section 4.2) ne nous suffit pas. Mes efforts de trouver un sous-groupe de GL_2 héritant la factorisation de GL_2^* restent jusqu'ici un échec.

On commence par quelques rappels sur les groupes quantiques. On ne donne pas de preuves de la plupart des résultats cités, leur vérification étant un exercice technique. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [10].

5.1 Rappels sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2

La $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -algèbre $U_\hbar(gl_2)$ est la complétion \hbar -adique $\mathbb{C}\langle H, G, X, Y \rangle[[\hbar]]$ de l'algèbre de polynômes non-commutative en H, G, X et Y , avec les relations

$$[H, X] = [G, X] = 2X, \quad [H, Y] = [G, Y] = -2Y,$$

$$[H, G] = 0, \quad [X, Y] = \frac{e^{\frac{\hbar H}{2}} - e^{-\frac{\hbar G}{2}}}{e^{\frac{\hbar}{2}} - e^{-\frac{\hbar}{2}}}.$$

On peut considérer les éléments de $U_\hbar(gl_2)$ comme séries formelles en \hbar .

La représentation standard de $U_\hbar(gl_2)$ de dimension 2 est donnée par

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \rho(X) = e^{\frac{\hbar}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho(Y) = e^{\frac{\hbar}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

$U_\hbar(gl_2)$ dispose d'une structure d'algèbre de Hopf :

$$\begin{aligned} \Delta X &= X \otimes e^{\frac{\hbar H}{2}} + 1 \otimes X, & \Delta Y &= Y \otimes 1 + e^{-\frac{\hbar G}{2}} \otimes Y, \\ \Delta H &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, & \Delta G &= G \otimes 1 + 1 \otimes G; \\ s(X) &= -X e^{-\frac{\hbar H}{2}}, & s(Y) &= -e^{\frac{\hbar G}{2}} Y, \\ s(H) &= -H, & s(G) &= -G; \end{aligned}$$

$$\varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = \varepsilon(H) = \varepsilon(G) = 0.$$

L'algèbre $U_\hbar(gl_2)$ est le double de Drinfeld de l'algèbre quantique enveloppante $U_\hbar(b) \subset U_\hbar(gl_2)$ d'une sous-algèbre de Borel $b \subset gl_2$. Elle est ainsi tressée, avec la matrice universelle

$$R = \exp\left(\frac{\hbar}{4} H \otimes G\right) \prod_{n \geq 0} (1 - e^{-\frac{\hbar}{2}} (e^{\frac{\hbar}{2}} - e^{-\frac{\hbar}{2}})^2 X \otimes Y e^{-n\hbar})^{-1} = \quad (78)$$

$$= \exp\left(\frac{h}{4}H \otimes G\right) \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\frac{nh}{2}}(e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}})^{2n} X^n \otimes Y^n}{(1 - e^{-h}) \cdots (1 - e^{-nh})}. \quad (79)$$

Ce R vit dans la complétion h -adique $U_h(gl_2)^{\otimes 2}[[h]]$ du carré tensoriel de $U_h(gl_2)$.

Enfin, l'algèbre de Hopf $U_h(gl_2)$ est s-pivotée, avec le s-pivot

$$\mu = e^{\frac{h(H+G)}{4}}. \quad (80)$$

Pour cela, il faut vérifier la condition $\mu^2 = uS(u)^{-1}$. Cela peut se faire à la main ; on verra une preuve plus élégante dans la suite.

On considère la forme entière $\mathcal{U} = \mathcal{U}_t(gl_2)$ de l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 . C'est une algèbre sur $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ engendrée par les éléments $E, F, K^{\pm 1}, L^{\pm 1}$, avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} KEK^{-1} &= LEL^{-1} = t^2 E, \\ KFK^{-1} &= LFL^{-1} = t^{-2} F, \\ KL &= LK, \\ EF - FE &= (t - t^{-1})(K - L^{-1}). \end{aligned} \quad (81)$$

Les monômes $E^i K^n L^m F^j$, $i, j \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, forment une base de \mathcal{U} , appelée la base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW dans la suite). Cette algèbre dispose d'une structure d'algèbre de Hopf :

$$\begin{aligned} \Delta E &= E \otimes K + 1 \otimes E, & \Delta F &= F \otimes 1 + L^{-1} \otimes F, \\ \Delta K &= K \otimes K, & \Delta L &= L \otimes L ; \\ s(E) &= -EK^{-1}, & s(F) &= -LF, \\ s(K) &= K^{-1}, & s(L) &= L^{-1} ; \end{aligned}$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad \varepsilon(K) = \varepsilon(L) = 1.$$

Notons que \mathcal{U} est une sous- $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ -algèbre de Hopf de $U_h(gl_2)$, l'inclusion étant donnée par

$$\begin{aligned} E &\mapsto (e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}})X, & F &\mapsto (e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}})Y, \\ K &\mapsto e^{\frac{hH}{2}}, & L &\mapsto e^{\frac{hG}{2}}, \end{aligned}$$

$$t^{\pm 1} \mapsto e^{\pm \frac{h}{2}}.$$

On va souvent travailler dans une complétion $\overline{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} définie comme l'algèbre de séries formelles

$$\sum_{i,j,k \geq 0} (t - t^{-1})^k P_{i,j,k}(K, L) E^i F^j, \quad (82)$$

où les $P_{i,j,k} \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}, K^{\pm 1}, L^{\pm 1}]$ sont des polynômes de Laurent en K, L sur $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$. Notons que dans $U_h(\mathfrak{gl}_2)$, les éléments $t - t^{-1}$, E , F sont multiples de $e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}$, donc de h , et les séries (82) convergent dans la topologie induite par la topologie h -adique sur $U_h(\mathfrak{gl}_2)$. On peut ainsi voir $\overline{\mathcal{U}}$ comme une sous- $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ -algèbre de Hopf de $U_h(\mathfrak{gl}_2)$: il suffit de se convaincre que $\overline{\mathcal{U}}$ hérite de $U_h(\mathfrak{gl}_2)$ la structure d'algèbre de Hopf si l'on considère le produit tensoriel complété $\overline{\mathcal{U}} \otimes \overline{\mathcal{U}}$ défini comme l'algèbre de séries formelles

$$\sum_{i,j,i',j',k \geq 0} (t - t^{-1})^k P_{i,j,i',j',k}(K, L) (E^i F^j \otimes E^{i'} F^{j'}), \quad (83)$$

où $P_{i,j,i',j',k} \in (\mathbb{C}[K^{\pm 1}, L^{\pm 1}]^{\otimes 2})[t^{\pm 1}]$.

Le tressage et le s-pivot de $U_h(\mathfrak{gl}_2)$ ne descendent pas dans $\overline{\mathcal{U}}$. Néanmoins on a

Lemme 5.1. 1. *L'automorphisme intérieur \mathcal{R} de $U_h(\mathfrak{gl}_2)^{\otimes 2}[[h]]$, donné par la conjugaison par R , induit un automorphisme de $\overline{\mathcal{U}} \otimes \overline{\mathcal{U}}$.*

2. *L'application*

$$\overline{\mu}(a) = \mu a \mu = s^2(a) \mu^2 : U_h(\mathfrak{gl}_2) \longrightarrow U_h(\mathfrak{gl}_2) \quad (84)$$

préserve $\overline{\mathcal{U}} \subset U_h(\mathfrak{gl}_2)$.

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(1 \otimes K) &= (1 \otimes K)(1 - tK^{-1}E \otimes FL)^{-1}, \\ \mathcal{R}(1 \otimes L) &= (1 \otimes L)(1 - tK^{-1}E \otimes FL)^{-1}, \\ \mathcal{R}(E \otimes 1) &= E \otimes L, \\ \mathcal{R}(1 \otimes F) &= K^{-1} \otimes F, \end{aligned} \quad (85)$$

et les quatre formules qui restent résultent de $\mathcal{R}(\Delta(a)) = P(\Delta(a))$, où P est le flip :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(K \otimes 1) &= (1 - tK^{-1}E \otimes FL)(K \otimes 1), \\ \mathcal{R}(L \otimes 1) &= (1 - tK^{-1}E \otimes FL)(L \otimes 1), \\ \mathcal{R}(1 \otimes E) &= K \otimes E + E \otimes 1 - (E \otimes LK)(1 - tK^{-1}E \otimes FL)^{-1}, \\ \mathcal{R}(F \otimes 1) &= 1 \otimes F + F \otimes L^{-1} - \\ &\quad - (K^{-1}L^{-1} \otimes F)(1 - tK^{-1}E \otimes FL)^{-1}. \end{aligned} \quad (86)$$

Notons que

$$(1 - tK^{-1}E \otimes FL)^{-1} = \sum_{n \geq 0} t^{n+2n^2} K^{-n} E^n \otimes L^n F^n \in \overline{\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}},$$

et que $\mathcal{R}(1 \otimes E), \mathcal{R}(1 \otimes F), \mathcal{R}(E \otimes 1), \mathcal{R}(F \otimes 1)$ sont tous multiples de h . Il s'en suit que \mathcal{R} préserve $\overline{\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}}$. En faisant le même calcul pour \mathcal{R}^{-1} , on voit que \mathcal{R}^{-1} préserve $\overline{\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}}$ elle aussi.

Pour le pivot, il suffit d'écrire

$$\mu^2 = e^{\frac{h(H+G)}{2}} = KL \in \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}.$$

□

Le lemme signifie que l'algèbre de Hopf $\overline{\mathcal{U}}$ est autoquasitriangulaire, dans le sens de [15] et [6].

Le centre $Z(\mathcal{U})$ de \mathcal{U} est engendré librement par des polynômes de Laurent en KL^{-1} et l'élément de Casimir

$$c = EF + t^{-1}K + tL^{-1} = FE + tK + t^{-1}L^{-1}.$$

Notons que $(KL^{-1})^n, n \in \mathbb{Z}$ sont les seuls éléments groupe-like centraux dans $\overline{\mathcal{U}}$. D'autre part, on vérifie que l'élément $uS(u)^{-1}e^{\frac{-h(H+G)}{2}}$ de $U_h(gl_2)$ est groupe-like central, et en plus il vit dans $\overline{\mathcal{U}}$. Il s'en suit que $\mu^2 = KL(KL^{-1})^n, n \in \mathbb{Z}$. On spécialise $uS(u)^{-1}e^{\frac{-h(H+G)}{2}}$ dans la représentation (77) pour trouver $n = 0$. On obtient ainsi la preuve annoncée du fait que (80) donne effectivement un s-pivot.

Remarque 5.2. L'algèbre quantique enveloppante $\mathcal{U}_t(sl_2)$ de l'algèbre de Lie simple sl_2 est obtenue à partir de $\mathcal{U}_t(gl_2)$ en identifiant K et L .

5.2 Rappels sur l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 à une racine de l'unité

Pour une racine de l'unité ε de degré l impair, la spécialisation de \mathcal{U} en $t = \varepsilon$ donne l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon(gl_2)$. Plus précisément, \mathcal{U}_ε est l'algèbre sur \mathbb{C} engendrée par les éléments $E, F, K^{\pm 1}, L^{\pm 1}$, qui satisfont aux relations (81), avec t remplacé par ε .

Les propriétés remarquables de \mathcal{U}_ε sont dues à son grand centre. Cette algèbre contient notamment une sous-algèbre de Hopf centrale Z_0 engendrée par les éléments (centraux, ce qui se vérifie facilement) $E^l, F^l, K^{\pm l}, L^{\pm l}$. La

comultiplication et l'antipode sur Z_0 sont donnés par

$$\begin{aligned}\Delta E^l &= E^l \otimes K^l + 1 \otimes E^l, & \Delta F^l &= F^l \otimes 1 + L^{-l} \otimes F^l, \\ \Delta K^l &= K^l \otimes K^l, & \Delta L^l &= L^l \otimes L^l; \\ s(E^l) &= -E^l, & s(F^l) &= -F^l, \\ s(K^l) &= K^{-l}, & s(L^l) &= L^{-l}.\end{aligned}$$

L'algèbre \mathcal{U}_ε est un Z_0 -module libre de dimension l^4 , ce qui se voit dans la base PBW.

Le centre $Z(\mathcal{U}_\varepsilon)$ de \mathcal{U}_ε est engendré par Z_0 , l'élément de Casimir c et l'élément $(KL^{-1})^{\pm 1}$ modulo les relations

$$(KL^{-1})^l = K^l L^{-l}, \quad (87)$$

$$\prod_{j=0}^{l-1} (c - K\varepsilon^{j+1} - L^{-1}\varepsilon^{-j-1}) = E^l F^l. \quad (88)$$

Notons que si l'on écrit (88) comme polynôme en c , alors les coefficients seront des polynômes en K^l , L^{-l} et KL^{-1} .

La description analogue du centre des algèbres quantiques enveloppantes des algèbres de Lie simples à une racine de l'unité se trouve par exemple dans [3].

Regardons l'algèbre $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$ des séries formelles

$$\sum_{i,j \geq 0} P_{i,j}(K, L, E, F) E^{li} F^{lj}, \quad (89)$$

où $P_{i,j} \in \mathbb{C}[K^{\pm 1}, L^{\pm 1}, E, F]$. La structure d'algèbre de Hopf de \mathcal{U}_ε s'étend clairement sur $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$. En plus, les formules (85)-(86) définissent bien un automorphisme de l'algèbre $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \otimes \overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$ des séries formelles

$$\sum_{i,j,i',j' \geq 0} P_{i,j,i',j'}(K, L, E, F) (E^{li} F^{lj} \otimes E^{li'} F^{lj'}),$$

où $P_{i,j,i',j'} \in \mathbb{C}[K^{\pm 1}, L^{\pm 1}, E, F]^{\otimes 2}$. Pour voir cela, il suffit de se convaincre que $(1 - \varepsilon K^{-1} E \otimes FL)^{-1}$ vit dans $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \otimes \overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$. Or

$$(1 - \varepsilon K^{-1} E \otimes FL)^{-1} = (1 - \varepsilon^2 K^{-1} E \otimes FL) \cdots (1 - \varepsilon^l K^{-1} E \otimes FL) \times (1 - K^{-l} E^l \otimes F^l L^l)^{-1},$$

et

$$(1 - K^{-l} E^l \otimes F^l L^l)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (K^{-li} E^{li} \otimes L^{li} F^{li})$$

est bien un élément de $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \otimes \overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$.

Notons aussi que l'application $\bar{\mu}$ de (84) est bien définie dans $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$.

5.3 Les trois ingrédients

(1) Introduisons les coordonnées α, β et a, b sur les sous-groupes B_{\pm} de GL_2 , telles que $g_{\pm} \in B_{\pm}$ s'écrivent comme

$$g_+ = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad g_- = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

L'application

$$\begin{aligned} B_+ \times B_- &\rightarrow GL_2 \\ (g_+, g_-) &\mapsto g_+(g_-)^{-1} \end{aligned}$$

est injective et a pour image l'ouvert de Zariski $\{(x \ y) \in GL_2 | v \neq 0\}$ de GL_2 . On va noter GL_2^* le groupe factorisable $B_+ \times B_-$.

Kashaev et Reshetikhin affirment dans ([8],[9]) que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_{GL_2^*} : GL_2^* \times GL_2^* &\rightarrow GL_2^* \times GL_2^* \\ (g, d) &\mapsto (\widetilde{x}_L(g, d) = g_- d g_-^{-1}, \widetilde{x}_R(g, d) = (\widetilde{x}_L)^{-1}_+ g (\widetilde{x}_L)_+), \end{aligned}$$

définit un tressage sur GL_2^* . Mais GL_2^* n'est pas un sous-groupe de GL_2 , et en faisant la GL_2 -multiplication $g_- d g_-^{-1}$, on peut sortir de l'ouvert GL_2^* ! Plus précisément, en passant aux coordonnées, \mathcal{R} s'écrit comme

$$\begin{aligned} (g = ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix})), g' = ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{smallmatrix}))) &\mapsto \\ ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta' a \\ 0 & \alpha' + \beta' b \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a'(1 + \beta' \alpha'^{-1} b) & 0 \\ (b' + a' b)(\alpha' + \beta' b) - b & (\alpha' a)^{-1} 1 \end{smallmatrix})), \\ ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta' + \alpha' \beta - \alpha' \beta' \alpha (\alpha' + \beta' b)^{-1} \\ 0 & \alpha' \alpha (\alpha' + \beta' b)^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \alpha' a (\alpha' + \beta' b)^{-1} & 0 \\ b (\alpha' + \beta' b)^{-1} & 1 \end{smallmatrix}))). \end{aligned}$$

Le résultat est un élément bien défini de $GL_2^* \times GL_2^*$ ssi

$$\alpha' + \beta' b \neq 0. \quad (91)$$

Cette condition mélange les coefficients de g et g' , ce qui rend difficile la recherche d'un bon domaine de définition pour \mathcal{R} .

Dans la suite on va utiliser plutôt l'application inverse $\mathcal{R}_{GL_2^*}^{-1}$ (cf. lemme 3.4) :

$$\begin{aligned} ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix})), ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{smallmatrix}))) &\mapsto \\ (x_L = ((\begin{smallmatrix} 1 & ((\beta' + \alpha' \beta)(\alpha' + b' \beta) - \beta)(\alpha' \alpha)^{-1} \\ 0 & \alpha'(1 + b' a'^{-1} \beta) \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a' + b' \beta & 0 \\ b' \alpha & 1 \end{smallmatrix}))), & \quad (92) \\ x_R = ((\begin{smallmatrix} 1 & \beta(a' + b' \beta)^{-1} \\ 0 & \alpha' \alpha (a' + b' \beta)^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a' a (a' + b' \beta)^{-1} & 0 \\ b' + a' b - a' b' a \alpha (a' + b' \beta)^{-1} & 1 \end{smallmatrix}))). \end{aligned}$$

La condition (91) devient ici

$$\alpha' + b' \beta \neq 0. \quad (93)$$

Expliquons maintenant le lien entre GL_2^* et l'algèbre $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ de la section précédente.

Proposition 5.3. *L'application*

$$F^l \mapsto -ba^{-1}, E^l \mapsto \beta, K^l \mapsto \alpha, L^l \mapsto a$$

donne un isomorphisme d'algèbre de Hopf

$$Z_0 \simeq C(GL_2^*).$$

Preuve. On vérifie que la multiplication des matrices g_{\pm} correspond à la comultiplication dans Z_0 . \square

Bien que facile à vérifier, cette proposition est difficile à interpréter : la nature de ce lien étroit semble obscure.

(2) On a vu dans la section 2.5 comment munir la catégorie $\mathcal{U}_{\varepsilon}(gl_2) \mathbf{mod}_{\mathcal{U}_{\varepsilon}(gl_2)}$ de bimodules de dimension finie d'une structure monoïdale rigide. Cependant, ici on n'a ni tressage ni s-pivot parce que notre algèbre de Hopf $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ ne dispose pas de telles structures.

Notons \mathcal{C}^* la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}_{\varepsilon} \mathbf{mod}_{\mathcal{U}_{\varepsilon}}$ avec comme objets tous les bimodules sur lesquels $Z_0 \subset \mathcal{U}_{\varepsilon}$ agit à gauche par scalaires. C'est le cas par exemple de tous les bimodules qui sont irréductibles comme $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ -modules à gauche. Le produit tensoriel et la dualité conservent cette propriété ; il s'agit ainsi d'une sous-catégorie monoïdale rigide. L'action de Z_0 sur un tel module donne un élément de $\text{Spec}(Z_0) \simeq GL_2^*$. L'application $\pi : \mathcal{C}^* \rightarrow GL_2^*$ ainsi définie munit \mathcal{C}^* d'une structure GL_2^* -fibrée, dans le sens de la section 3.6.

Pour le tressage et le s-pivot généralisés, on s'inspire à nouveau de la section 2.5. On va construire d'abord une section \mathcal{A} , et cela va nous amener à une bonne sous-catégorie \mathcal{C} de \mathcal{C}^* .

(3) Pour un $g \in GL_2^* \simeq \text{Spec}(Z_0)$, notons I_g l'idéal de $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ correspondant et $\mathcal{A}_g = \mathcal{U}_{\varepsilon}/I_g$ l'algèbre quotient. Elle est clairement un $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ -bimodule de \mathbb{C} -dimension finie et égale à l^4 , avec l'action de Z_0 à gauche par les scalaires déterminés par $g \in \text{Spec}(Z_0)$.

Proposition 5.4. *La conjugaison par R dans $U_h(gl_2)^{\otimes 2}[[\hbar]]$ suivie par un flip induit un isomorphisme*

$$\mathcal{R} : \mathcal{A}_g \otimes \mathcal{A}_{g'} \longrightarrow \mathcal{A}_{x_L(g,g')} \otimes \mathcal{A}_{x_R(g,g')}$$

si g et g' sont compatibles dans le sens de (93).

Preuve. La condition (93) signifie l'inversibilité de $1 - E^l \otimes F^l$ dans $\mathcal{A}_g \otimes \mathcal{A}_{g'}$. Or

$$\mathcal{R}(1 - E^l \otimes F^l) = 1 - K^{-l} E^l \otimes F^l L^l,$$

et quand on étudiait l'algèbre $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$, on a vu que

$$1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l \neq 0$$

est exactement ce qu'il faut pour que les formules (85)-(86) aient un sens. Appliquons ces formules à $Z_0 \otimes Z_0$, en se rappelant que \mathcal{R} est un morphisme d'algèbre :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(1 \otimes K^l) &= (1 \otimes K^l)(1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)^{-1}, \\ \mathcal{R}(1 \otimes L^l) &= (1 \otimes L^l)(1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)^{-1}, \\ \mathcal{R}(E^l \otimes 1) &= E^l \otimes L^l, \\ \mathcal{R}(1 \otimes F^l) &= K^{-l} \otimes F^l, \\ \mathcal{R}(K^l \otimes 1) &= (1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)(K^l \otimes 1), \\ \mathcal{R}(L^l \otimes 1) &= (1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)(L^l \otimes 1), \\ \mathcal{R}(1 \otimes E^l) &= K^l \otimes E^l + E^l \otimes 1 - (E^l \otimes L^lK^l)(1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)^{-1}, \\ \mathcal{R}(F^l \otimes 1) &= 1 \otimes F^l + F^l \otimes L^{-l} - \\ &\quad - (K^{-l}L^{-l} \otimes F^l)(1 - K^{-l}E^l \otimes F^lL^l)^{-1}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à comparer ces formules avec celles que l'on a pour $\mathcal{R}_{GL_2^*}^{-1}$ (cf. (92)), en utilisant la correspondance de la proposition 5.3. \square

Comme la proposition 5.3, ce résultat, facile à vérifier, paraît tout de même miraculeux – on ne comprend pas ses raisons profondes.

Notons aussi que

$$\bar{\mu} : a \mapsto s^2(a)\mu^2$$

est une application bien définie, qui va de \mathcal{A}_g vers \mathcal{A}_g^{**} .

Soit \mathcal{C} la plus petite sous-catégorie monoïdale rigide pleine de \mathcal{C}^* qui contient tous les \mathcal{A}_g . Ses objets sont les produits tensoriels

$$\mathcal{A}_{g_1}^{*k_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{g_n}^{*k_n},$$

où $*^k = \underbrace{* \cdots *}_{k \text{ fois}}$, et $0 \leq k_i < l$ pour tout i . Pour le voir, on utilise le fait

que le carré de l'antipode s^2 est l'identité sur $Z(\mathcal{U}_\varepsilon)$, donc sur Z_0 , et que s^{2l} est l'identité sur \mathcal{U}_ε , donc, d'après la définition (20) de la dualité, on a $\mathcal{A}_{g_i}^{*2l} = \mathcal{A}_{g_i}$.

L'isomorphisme \mathcal{R} s'étend dans \mathcal{C} sur les objets compatibles (la notion de compatibilité provient de la condition (93)), et l'isomorphisme $\bar{\mu}$ est toujours défini. On vérifie que \mathcal{C} est ainsi munie d'une structure \mathcal{R} -enrubannée partielle : les propriétés nécessaires résultent de celles du "groupe fibré" GL_2^* (rappelons que les structures sur GL_2^* ne sont pas bien définies) et

de celles de R et μ , ces derniers étant une R -matrice et un s-pivot dans $U_h(\mathfrak{gl}_2)$. Ensuite \mathcal{C} hérite de \mathcal{C}^* sa GL_2^* -fibration, qui devient en plus un GL_2^* -tressage.

On dresse le bilan : la catégorie \mathcal{C} ci-dessus est presque GL_2^* -enrubannée, sauf que le tressage généralisé n'est que partiellement défini. L'application $g \mapsto \mathcal{A}_g$ donne sa section sur GL_2^* . Étant donné une GL_2^* -connexion plate dans le complémentaire d'un enchevêtrement, on peut effectuer l'algorithme du chapitre précédent, si cette connexion satisfait aux relations de compatibilité.

Faisons une petite remarque qui montre l'importance des restrictions de compatibilité : ces relations dépendent du choix du diagramme de l'enchevêtrement, pas uniquement de l'enchevêtrement lui-même. Par exemple, dans le premier diagramme ci-dessous on n'impose aucune conditions sur les couleurs des composants de l'entrelacs qui définissent la connexion (cf. le chapitre précédent), tandis que dans le deuxième diagramme du même entrelacs une relation apparaît.



Figure 16: Deux diagrammes du même entrelacs

Notons aussi que l'on peut enchaîner plusieurs mouvements RII comme dans la figure 16 et obtenir une suite de conditions sur les couleurs des composants, ce qui nous empêche de restreindre notre construction sur un petit voisinage de $1 \in GL_2^*$ où la condition (93) est toujours vraie.

6 Questions ouvertes

On a obtenu un cadre général pour la construction des invariants d'enchevêtrements avec des connexions plates dans le complémentaire. On aimerait bien achever cette construction dans le cas particulier $G = GL_2$, entamé par Kashaev et Reshetikhin ([8],[9]), et appliquer des idées similaires aux groupes de Lie simples. Pour cela, il semble essentiel d'étudier des représentations de l'algèbre quantique enveloppante $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie simple \mathfrak{g} à une racine de l'unité, et notamment le centre de ces algèbres. [3] et [4] sont deux des nombreuses références ici. Notons aussi que dans ce cadre on est obligé de travailler avec une notion de factorisabilité conditionnelle (i.e. la factorisation $g = g_+g_-$ est unique à une condition près), et donc il faut adapter la construction de Kashaev et Reshetikhin pour ce type de factorisabilité.

Ensuite, cela serait intéressant de comprendre l'information topologique codée par nos invariants. Par exemple, l'interprétation en termes de TQFT de type Chern-Simons paraît tout à fait possible. La notion de HQFT (théorie quantique des champs homologique), étudiée dans [20], peut être utile ici.

L'autre description envisageable de ces invariants peut se faire en termes de variétés triangulées en utilisant les "6j-symboles" pour la catégorie des représentations de $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$. Cette approche a été introduite dans [21] et est présentée en détail dans [18].

La construction des invariants de variétés de dimension 3 avec une connexion plate dans un G -fibré principal est un autre problème ouvert. La méthode de Kashaev et Reshetikhin en tant que telle ne permet de considérer que le complémentaire du nœud, ce qui est seulement un cas particulier des variétés tridimensionnelles. On peut penser à [1], où le cas $G = PSL_2(\mathbb{C})$ est traité, ou bien à [2] et [20], qui s'occupent d'une version différente de la notion de G -catégorie, en l'occurrence moins constructive. Pour cela, il nous faut une notion adéquate de G -catégorie modulaire et une famille de bireprésentations de $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ qui en forment une.

On peut aussi généraliser l'information supplémentaire que l'on ajoute à notre enchevêtrement. On peut faire appel aux G -ensembles croisés ([10]) ou aux systèmes autodistributifs ([11]). On aimerait bien comprendre la raison profonde de la ressemblance de ces constructions avec les G -enchevêtrements. Notons qu'une connexion plate est une classe d'homotopie d'applications

$$C_E \longrightarrow K(G, 1)$$

vers l'espace d'Eilenberg-MacLane, et c'est donc raisonnable de travailler avec des espaces plus généraux (c.f. la notion de HQFT dans [2] ou [20]).

Une idée suggestive est d'étudier le comportement des SL_n -invariants quand $n \rightarrow \infty$. On s'attend à ce que ce comportement asymptotique soit lié aux invariants géométriques du complémentaire du nœud, comme c'est le cas pour $G = SL_2$ avec une connexion triviale, où l'on découvre le volume hyperbolique de C_E .

Les réponses à ces questions peuvent dévoiler toute la richesse de la théorie des nœuds dans le nouveau cadre de G -enchevêtrements. On s'attend aussi à tirer de ces considérations plus générales de nouveaux résultats pour des nœuds usuels.

Références

- [1] Basilhac, S., Benedetti, R. *Quantum Hyperbolic State Sum Invariants of 3-Manifolds*. Preprint GT/0101234.
- [2] Bruguières, A., Virelizier, A. *Categorical centers and Reshetikhin-Turaev invariants*. Act. Math. Viet., 33, 2008.
- [3] De Concini, C., Kac, V.G. *Representations of quantum groups at roots of 1*. Progr. Math., 92, pp. 471–506. Birkhäuser, 1990.
- [4] De Concini, C., Procesi, C. *Quantum Groups*. D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992), Lecture Notes in Math., 1565, Springer, 1993, pp. 31–140.
- [5] De Concini, C., Procesi, C., Reshetikhin, N., Rosso, M. *Hopf algebras with trace and representations*. Invent. Math., 161, 2005(1), pp. 1–44.
- [6] Gavarini, F. *Geometrical meaning of R-matrix action for quantum groups at roots of 1*. Preprint q-alg/9604009v4.
- [7] Joyal, A., Street, R. *An introduction to Tannaka duality and quantum groups, in Part II of Category Theory, Proceedings, Como 1990*. Lectures Notes in Mathematics, 1488, pp. 411–492.
- [8] Kashaev, R., Reshetikhin, N. *Invariants of tangles with flat connections in their complements*. Proceedings Symposia of Pure mathematics, "Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics", 73, 2005, pp. 151–172.
- [9] Kashaev, R., Reshetikhin, N. *Braiding for the quantum gl_2 at roots of unity*. Preprint math/0410182.
- [10] Kassel, C. *Quantum groups*. Graduate Texts in Mathematics, 155, 1995.
- [11] Kassel, C. *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*. Séminaire Bourbaki, vol. 1999/2000, Astérisque No. 276 (2002), pp. 7–28.
- [12] Kassel, C., Rosso, M., Turaev, V. *Quantum Groups and Knot Invariants*. Panoramas et Synthèses, 5, Société Mathématique de France, 1997.
- [13] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Text in Mathematics, 1971.
- [14] Ohtsuki, T. *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*. Series on Knots and Everything, 29, 2002.

- [15] Reshetikhin, N. *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*. Commun. Math. Phys., 170, 1995, pp. 79-99.
- [16] Reshetikhin, N., Turaev, V. *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*. Comm. Math. Phys., 127, 1990 (1), pp. 1-26.
- [17] Shum, M.C. *Tortile tensor categories*. J. Pure and Appl. Alg., 93(1), 1993, pp. 57-110.
- [18] Turaev, V.G. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. De Gruyter Studies in Mathematics, 18, 1994.
- [19] Turaev, V.G. *The Yang-Baxter equation and invariants of links*. Invent. Math., 92, 1988, pp. 527-553.
- [20] Turaev, V.G. *Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories*. Preprint GT/0005291.
- [21] Turaev, V.G., Viro, O. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*. Topology, 31, 1992 (4), pp. 865-902.
- [22] Yetter, D. *Framed tangles and a theorem of Deligne on braided deformations of Tannakian categories*. Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics, Contemp. Math., 134, 1992, pp. 325-349.