Groupes quantiques: séance 4

Victoria

INVARIANTS QUANTIQUES DES NOEUDS

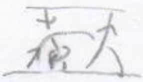
① Théorie des noeuds: rappels.
② Invariants des noeuds: l'approche "de briques"
③ Constructions des invariants: th. des noeuds $\xleftarrow[\text{pont}]{\text{cat. enrubannées}}$ reps des gpes quantiques
⑤ Questions de réciprocité.
⑥ Bilan.
④ La catégorie des enchevêtrements.

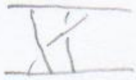
---

① noeud orienté: $S^1 \hookrightarrow S^3$
-11- en bande: $S^1\times I \hookrightarrow S^3$
entrelacs: $\bigsqcup_{i=1}^{k} S^1 \hookrightarrow S^3$
enchevêtrement: $(\bigsqcup_{i=1}^{k} S^1)\sqcup(\bigsqcup_{j=1}^{\ell} I) \hookrightarrow \mathbb{R}^2\times[0,1]$
$\vert\cup$ $\qquad\qquad \partial I \longrightarrow \mathbb{R}^2\times\{0,1\}$
tresse: $\bigsqcup_{j=1}^{\ell} I \hookrightarrow \mathbb{R}^2\times[0,1]$ t.q. $\frac{\partial}{\partial z}$ ne s'annule pas, i.e. chaque brin monte

"$\hookrightarrow$" = plongement

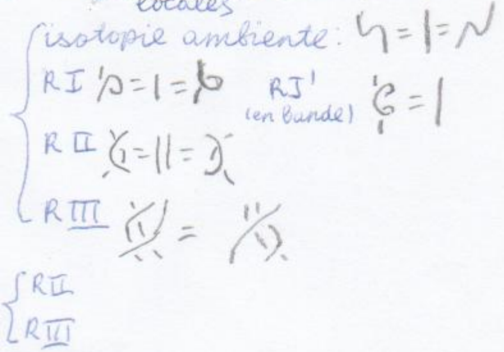
diagrammes:





{RII
RIII

relations (isotopie) locales:



On va travailler dans le cadre orienté en bande; les construction existent aussi dans le cadre "fin" (c.f. Kassel).

But: classifier les tresses et les enchevêtrement à isotopie près.

② Idée: décomposer les enchêvetrements en "briques" simples:

avec toutes les orientations

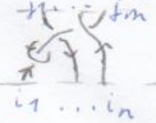
+ une liste de relations qui codent RI^1-$RIII$ & is. amb.

Rmq. Il faut passer par les enchevêtrements même pour obtenir des invariants des noeuds.

Schéma général: $\boxed{\text{enchevetrements}} \to \boxed{\text{une catégorie tensorielle } \mathcal{C}}$

pt $\longmapsto$ objet
brique $\longmapsto$ morphisme
ligne $\longmapsto$ $\otimes$
colonne $\longmapsto$ composition

enchev. $\mathcal{C}$-coloré :



$\longmapsto \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_n}, V_{j_1}\otimes\ldots\otimes V_{j_m})$

entrelacs $\mathcal{C}$-coloré $\longmapsto \varphi\in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) \leftarrow$ ensembre gentil, e.g. un corps

$\underbrace{\qquad}_{\text{foncteur tensoriel}}$

③ Dictionnaire trilingue

th. des noeuds $\xrightarrow{\text{foncteur}}$ catégorie $\mathcal{C}$ $\xleftarrow[\text{finie}]{\text{reps de dim.}}$ algèbre A

pt $\mathcal{C}$-coloré: • i $\longmapsto$ objet V_i $\longleftrightarrow$ V_i-rep. de dim. finie

• • … • $i_1\ i_2 \dots i_n$ $\longmapsto$ $V_{i_1}\otimes \dots \otimes V_{i_n}$

ex.: ⓐ $A=kG$
ⓑ $A=\mathcal{U}(\mathfrak{g})$
ⓒ $A=U_q(sl_2)$

A

cat. monoïdale (= tensorielle) stricte $\overset{\text{déf}}{:}$ {1963, Bénabou, Mac Lane}
- $\otimes$: $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, bifoncteur
- $\mathbb{1}\in Ob(\mathcal{C})$

t.q.: (1) $\otimes$ est ass.:
$(V\otimes W)\otimes U = V\otimes(W\otimes U)$
(2) $\mathbb{1}$ est l'unité:
$\mathbb{1}\otimes V = V = V\otimes\mathbb{1}$

rmq: dans le cadre non-stricte, (1) & (2) sont vraies à isom-sme près; le théorème de cohérence de Mac Lane montre qu'une telle cat. est isomorphe à une cat. stricte

} trouver une bonne action de A sur $V\otimes W$ et sur k?

Si A est une bigèbre,
$a(v\otimes w) := \Delta(a)\cdot(v\otimes w)$ &
$a\cdot\lambda := \varepsilon(a)\cdot\lambda$
Conviennent bien:
- elles sont reps $\Leftarrow$ Δ & ε sont m-smes d'algèbre
- (1) $\Leftarrow$ Δ est coass.
- (2) $\Leftarrow$ ε est la counité

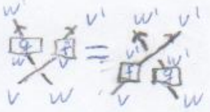
Exemple d'une preuve:
$(ab)(v\otimes w) \overset{\text{déf}}{=} \Delta(ab)(v\otimes w) \overset{\Delta\ \&\ m\ \text{sont compat.}}{=}$
$= (\Delta(a)\cdot\Delta(b))(v\otimes w) \overset{\text{on a des actions d'algèbre}}{=}$
$= \Delta(a)(\Delta(b)(v\otimes w)) \overset{\text{déf}}{=} a(b(v\otimes w))$

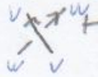
ⓐ $g(v\otimes w) = gv\otimes gw$
$g\cdot 1 = 1$
ⓑ $a(v\otimes w) = (av)\otimes w + v\otimes(aw)$
$a\cdot 1 = 0.$

$\longmapsto Id_{V_i}$

B

cat. tressée $^{\text{déf}}$ {91, Joyal & Street}
$\forall V,W\ \exists\ C_{V,W}: V\otimes W\to W\otimes V$
$^{\text{déf}}$tressage (= contrainte de commutativité)
t.q.: (0) C est fonctoriel, i.e. $\forall V\xrightarrow{f}V'$, $W\xrightarrow{g}W'$, on a
$C_{V',W'}\circ(f\otimes g) = (g\otimes f)\circ C_{V,W}$



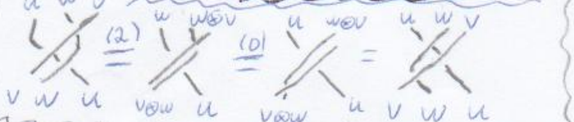


(1) $\exists\ C^{-1}$
(2) $C_{V\otimes W,U} = C_{V,U}\circ C_{W,U}$
$C_{V,W\otimes U} = C_{V,U}\circ C_{V,W}$

invar. de tresses $\Leftarrow$ RIII $\Longleftarrow$ $\Rightarrow C_{V,W}\circ C_{V,U}\circ C_{W,U} = C_{U,W}\circ C_{V,U}\circ C_{V,W}$

RII

Preuve: calcul graphique:



bigèbre tressée (quasi-triangulaire) {Drinfeld, 87}
$R = \sum_i s_i\otimes t_i \in A\otimes A$
$C_{V\otimes W}(v\otimes w) := \tau(R\cdot(v\otimes w)) = \sum t_i w\otimes s_i v$
m-sme A-linéaire: $C(a(v\otimes w)) = \tau(R\cdot\Delta(a)\cdot(v\otimes w)) \overset{R\cdot\Delta(a)\cdot R^{-1}=\Delta'(a)}{=}$
$= \tau((\tau\circ\Delta(a))\cdot R\cdot(v\otimes w)) = \Delta(a)\circ\tau(R\cdot(v\otimes w)) = a\cdot C(v\otimes w)$

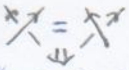
$\longleftarrow$ automatique

$R \overset{\text{déf}}{=}$ R-matrice universelle, ses réalis$^{\text{ns}}$ ds les reps donnent des tressages concrets

$\Leftarrow \exists R^{-1}$
$\Leftarrow (\Delta\otimes Id)(R) = R_{13}R_{23}$
$\Leftarrow (Id\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$

rmq: ça donne des reps de B_n

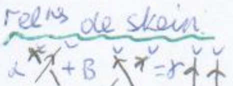
rmq.



$\Downarrow$
invariants de S_n, pas de B_n !
pas intéressant !

$\Longleftarrow$ cat. symétrique {63, Bén, ML}
$C_{V,W}\circ C_{W,V} = Id_{W\otimes V}$ $\Longleftarrow$ $R = Id$

rel$^{\text{ns}}$ de skein



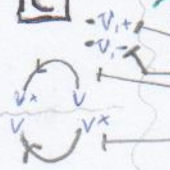
polynôme de Jones coloré:
$\alpha = q^m, \beta = q^{-m}, \gamma = q - q^{-1}$
m=2: poly de Jones

rel^n quadratique $^{\text{nom?}}$:
$\alpha C_{V,V}^2 - \gamma C_{V,V} + \beta Id_{V\otimes V} = 0$
ex.: ds une cat. symétrique, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$.

nom?
$\alpha R^2 - \gamma R + \beta\, 1\otimes 1 = 0$
$\hookrightarrow$ comme élé$^{\text{nt}}$ de $A\otimes A$
$\hookrightarrow$ dans une rep. V $\longrightarrow$

ⓒ ds l'irrep de dim^n m,
O.K. pour $\alpha = q^m, \beta = q^{-m}, \gamma = q - q^{-1}$
rmq: ça donne des reps de certaines algèbres de Hecke

C



cat. monoïdale $\overset{\text{term?}}{\text{rigide}}$ $^{\text{def}}$:

{78, Dolde & Puppe

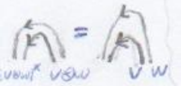
$\forall V\ \exists V^*$ - objet dual,

$e_V : V^*\otimes V \to \mathbb{1}$ (évaluation)

$i_V : \mathbb{1} \to V\otimes V^*$

isotopie ambiante ⇐ t.q. (1)

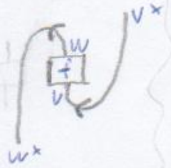

$(Id_V\otimes e_V)\circ(i_V\otimes Id_V) = Id_V$



(2) $(V\otimes W)^* = W^*\otimes V^*$, $e_{V\otimes W} =$


, $i_{V\otimes W} =$


(3) $1^* = 1$



On a aussi $V \xrightarrow{f} W \longmapsto W^* \xrightarrow{f^*} V^*$

algèbre de Hopf {40, Hopf}

$V \mapsto V^*$, $(af)(v) = f(S(a)v)$

action de A ⇐ $S(ab) = S(b)S(a)$

$e_V(f\otimes v) = f(v)$ } A-lin.

$i_V(1) = \sum e_i\otimes e^i$ } axiomes pour S

$\dim V < \infty$!

⇐ évident

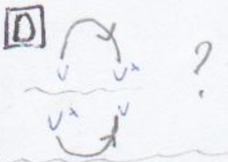
⇐ $\Delta(S(a)) = (S\otimes S)\circ\tau\circ\Delta(a)$

⇐ $\varepsilon(S(a)) = \varepsilon(a)$

① $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$

② $(hf)(v) = -f(hv)$

D

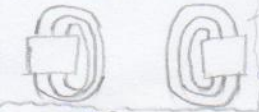


3 approches équivalentes;

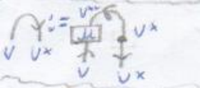
cat. pivotée ≈ sphérique ≈ souveraine

① dualité à droite compat. avec celle à gauche

RI/RI'



RI': trace à gauche = trace à droite (d'où le terme "sphérique")

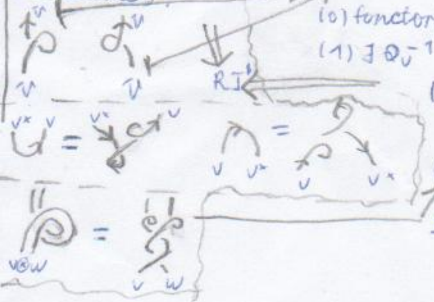


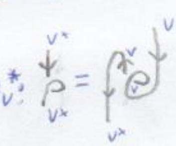
② $\exists V \xrightarrow{\mu_V} V^{**}$ $^{\text{def}}$ pivot
(0) fonctoriel
(1) $\mu_{V\otimes W} = \mu_V\otimes\mu_W$
(1) analogue de RI'

③ cat. enrubannée {Joyal-Street, 89}

changement de variables:

$\forall V\ \exists V \xrightarrow{\theta_V} V$ $^{\text{def}}$ twist, t.q.:
(0) fonctoriel
(1) $\exists\,\theta_V^{-1}$



(2) $\theta_{V^*} = \theta_V^*$:


(3) $\theta_{V\otimes W} = (\theta_V\otimes\theta_W)\circ R_{W,V}\circ R_{V,W}$

rmq. $\theta_V \equiv Id_V \Rightarrow R^2 = 0 \Rightarrow$ $\not\times = \times$ ⇒ invariants triviaux

$\mu = \sqrt{uS(u)^{-1}}$

↕ $\mu = \theta u$

a. H. enrubannée {Reshetikhin-Turaev, 90

$\theta_V : v \mapsto \theta v$, $\theta\in A$ t.q

• θ est central (⇒ θ_V est A-linéaire)

⇐ • $\exists\,\theta^{-1}$

⇐ • $S(\theta) = \theta$

⇐ • $\Delta(\theta) = (\theta\otimes\theta)\cdot R_{21}\cdot R$

rmq: facile à trouver! il suffit d'avoir $\sqrt{uS(u)^{-1}}$, $u = \sum S(t_i)s_i$

③ $\theta = u^{-1}K^{-1}$

5 Récapitulatif:

invariants
→ de tresses
→ d'enchevêtrements $\mathcal{C}$-colorés

← foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{F_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$ ⊣

catégorie $\mathcal{C}$
→ tressée
→ enrubannée

← reps de dim. finie ⊣

str. algébrique
→ bigèbre tressée
→ a. H. enrubannée

Résultats réciproques:

⟼ $\mathcal{E}_{X}$ (ensemble) est la cat. enrub. universelle avec ob ⊇ X

⟼ dualité de Tannaka-Krein

Rmq: $F_{\mathcal{C}}$ est un foncteur de catégories tressées, mais il ne respecte pas la dualité:

$(\bullet V,+)^{**} = \bullet V,+$, or $V^{**} \neq V$ en général!

solutions:

(a) demander $V^{**} = V$ ds $\mathcal{C}$

(b) remarquer qu'on n'utilise jamais $(V,-)^*$ dans la déf^{n} de $F_{\mathcal{C}}$

⑤ Bilan :

g-pe quantique + reps → $\boxed{\text{machine}}$ → invariants d'enchevêtrement

+ : • conceptuel
  • riche (on retrouve HOMFLY etc.)
  • donne des invariants de 3-variété (prendre une combinaison linéaire pour des reps différentes)

− : • difficiles à calculer

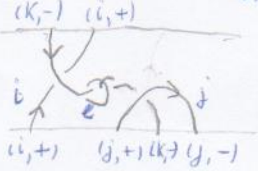
Invariants quantiques alternatifs : 6j-symboles (utilisent les triangulations des espaces)

④ Catégorie des enchev. (orientés enrubannés) M-colorés $\mathcal{E}_M$:

(M : ensemble)

Ob = suites de pts colorés orientés • • • . . . • (i_1,ε_1) (i_2,ε_2) (i_3,ε_3) … (i_n,ε_n) $i_s \in M$, $\varepsilon_n \in \{\pm\}$

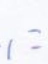
Mor = diagrammes d'enchev. orientés M-colorés modulo RI'-RIII & l'isotopie ambiante avec l'orient" et les couleurs compat. avec celle du bord

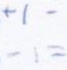


⊗ = concaténation horizontale

∘ = concaténation verticale

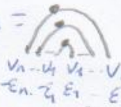
C = 

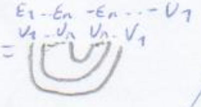
$(i,+)^* = (i,-)$ $e_{(i,+)} =$  $i_{(i,+)} =$ 

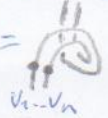
$(i,-)^* = (i,+)$ $e_{(i,-)} =$  $i_{(i,-)} =$ 

θ = 

<u>rmq</u> : $c_{V_1\otimes\ldots\otimes V_n, W_1\otimes\ldots\otimes W_m} =$ 

$e_{V_1\otimes\ldots\otimes V_n} =$ 

$i_{V_1\otimes\ldots\otimes V_n} =$ 

$\theta_{V_1\otimes\ldots\otimes V_n} =$ 

} avec les orient^{ns} qui proviennent de signes des V_i