BASES CRISTALLINES POUR $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ ET TABLEAUX DE YOUNG

Victoria LEBED

reps de groupes de Lie $\xleftrightarrow{\text{connu}}$ tableaux de Young (=: Y-tableaux) } théorie de reps combinatoire

nouvel éclairage:

reps de groupes de Lie $\xleftrightarrow{q=1 \;/\; q=0}$ bases cristallines de $U_q(\mathfrak{g})$-modules $\xleftrightarrow{\text{ici: } \mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n}$ tableaux de Young

$B(\lambda)$ $\longleftrightarrow$ {Y-tableaux semi-standard de la forme λ}

$B(\lambda)\otimes B(\mu)$ $\longleftrightarrow$ règle de Littlewood-Richardson

Rmq: Pour d'autres $\mathfrak{g}$ semi-simples / affines, il faut regarder les Y-tableaux avec une condition supplémentaire, ou bien les murs de Young.

$\boxed{\text{PLAN}}$

(1) Théorie de reps combinatoire: introduction.

(2) Catégorie $\mathcal{O}^{\geq 0}_{int}(\mathfrak{gl}_n)$.

(3) Bases cristallines de $U_q(\mathfrak{g})$-modules "lues" dans les Y-tableaux.

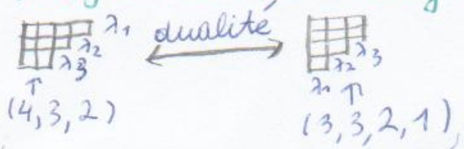
(4) $\otimes$: règle de Littlewood-Richardson.

① Le monde de Young → info !

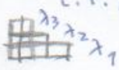
Fixons un $\underline{n} \in \mathbb{N}$.

Partition de $m \in \mathbb{N}$ ⟷ **Diagramme de Young :**

$m = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$,
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$;
on note $\underline{\lambda \vdash m}$.



notation anglaise ;
c.f. notation française :



Y-diagramme gauche :

$\lambda \setminus \mu$, où $\mu \leq \lambda$ sont Y-diagrammes ;

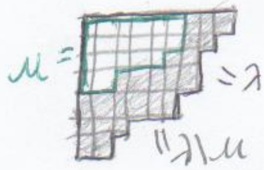
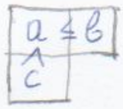


Tableau de Young de forme λ : diagramme rempli de nombres $\in \{1, 2, \dots, n\}$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

$\underline{wt(T)} := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4$

Y-tableau semi-standard :



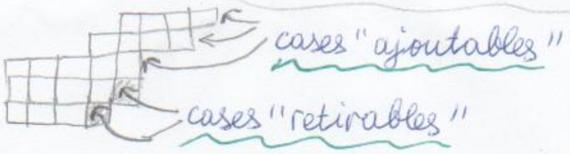
- les lignes croissent
- les colonnes croissent strictement

Applications : 1) $Rep(S_n)$ 2) $Rep(GL_n)$, $Rep(SL_n)$, $Rep(SU_n)$
(2) $Rep(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie)
3) reps des algèbres de Hecke
4) fonctions de Schur
5) calcul de Schubert sur les Grasmaniennes & variétés de drapeau

Écritures : a) japonaise ⇅ $\boxed{2}\,\boxed{4}\,\boxed{1}\,\boxed{3}$
b) arabe ⇆ $\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{3}$
$\Big\}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$

admissibles

i.e. respecte l'ordre donné par les diagonales :



② Le monde de groupes linéaires

Ⓐ Rappels sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

- $I = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $\quad \times$ • $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \ddots \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est engendrée par $e_i = E_{i,i+1}$, $f_i = E_{i+1,i}$, $i \in I$; E_{ii}, $i \in I \cup \{n\}$

$\times$ • $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est engendrée par e_i, f_i et $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$, $i \in I$. $\Big\}$ en tant qu'algèbres de Lie

- $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} E_{i,i}$ $\quad$ • $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \varepsilon_i \subseteq \mathfrak{h}^*$ - treillis des poids, $P_+ = \bigoplus \mathbb{N} \varepsilon_i$, $P_- = -P_+$.

  $P^\vee = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} E_{i,i}$ $\quad$ $\varepsilon_i : h = \operatorname{diag}(\lambda_j) \mapsto \lambda_i$.

- $[h, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) E_{ij} \Rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_-} \mathfrak{g}_\alpha\right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha\right)$, où

  $\Phi_+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$ - racines positives

  $\Phi_- = -\Phi_+$ - racines négatives

  $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ - racines simples, $i \in I$

$\times$ $Q = \bigoplus \mathbb{Z} \alpha_i$ - treillis des racines; $Q_+ = \bigoplus \mathbb{N} \alpha_i$, $Q_- = -Q_+$

Ⓑ Algèbre linéaire générale quantique

$$U_q(\mathfrak{gl}_n) = \mathbb{C}(q)\langle e_i, f_i, i \in I, q^h, h \in P^\vee \rangle \Big/ \begin{array}{l} q^0 = 1,\ q^h q^{h'} = q^{h+h'} \\ q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i,\ q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i \\ e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \dfrac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},\ K_i = q^{h_i} \\ e_i^2 e_j - (q + q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0,\ |i-j| = 1 \\ e_i e_j = e_j e_i,\ |i-j| > 1 \end{array}$$

changement par rapport à $U_q(\mathfrak{sl}_n)$

& idem pour les f_i

$\times$ $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ = la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ engendrée par ~~les~~ $e_i, f_i, K_i^{\pm 1}$.

- On peut munir ces algèbres d'une structure de Hopf.
- Elles admettent la décomposition triangulaire $U_q \simeq U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+$.

  Ici on va travailler uniquement avec $U_q(\mathfrak{gl}_n)$.

Ⓒ Représentation vectorielle $V(\varepsilon_1)$:

$$v_1 \underset{e_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} v_2 \underset{e_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} v_3 \ \cdots \ \underset{e_{n-1}}{\overset{f_{n-1}}{\rightleftarrows}} v_n$$

poids: $\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \ldots \quad \varepsilon_n$ $\quad$ i.e. $q^h v_j = q^{\varepsilon_j(h)} v_j$.

base cristalline : $\mathbf{B} = \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{3} \boxed{3} \cdots \xrightarrow{n-1} \boxed{n}$ $\quad$ c.f. $wt(\boxed{i}) = \varepsilon_i$

cette notation provient des Y-diagrammes !

② Catégorie $\mathcal{O}^{\geq 0}_{int}$: $M \in Rep(U_q(\mathfrak{gl}_n))$ t.q.
(1) $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$
(2) $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ - module de poids
(3) $wt(M) \subseteq P_+$

$P_{++} := \{\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n \mid \lambda_1 \geq \ldots \lambda_n \geq 0\} =: \mathcal{P}_+$ - poids entiers dominants

i.e. λ est une partition ! ; notation de Kashiwara

$P_{++} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{N}\Lambda_j$, où $\Lambda_j = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j$ est le poids fondamental

rmq : $(\alpha_i, \Lambda_j) = \delta_{i,j}$.

Th. 1 : $\boxed{\begin{array}{l} P_{++} \xleftrightarrow{bij} \text{irreps de } \mathcal{O}^{\geq 0}_{int}/\simeq \\ \lambda \longleftrightarrow V(\lambda) \end{array}}$

◇ ($\Rightarrow$) (1) $\lambda(h_i) = \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow V(\lambda)$ est un $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-mod. de dim^n finie
(2) évident
(3) soit $\mu = \sum \mu_i \varepsilon_i \in P$ un poids ; o.p.s. $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ (r_i agit comme $(i, i+1)$ sur P) ;
$\mu = \lambda - \sum k_i \alpha_i$, $k_i \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_1 - k_1 \\ \mu_2 &= \lambda_2 + k_1 - k_2 \\ &\ldots \\ \mu_{n-1} &= \lambda_{n-1} + k_{n-2} - k_{n-1} \\ \mu_n &= \lambda_n + k_{n-1} \geq 0 \Rightarrow \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n \geq 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty \Rightarrow M$ est un $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-mod. de dim^n finie $\Rightarrow \lambda(h_i) = \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 0$ ◇

③ Le monde cristallin

On prend un Y-diagramme (gauche) à N cases donné par la partition λ ; n est toujours fixe.

$\mathcal{B}(\lambda) := \{$Y-tableaux semi-standard de la forme $\lambda\} \xleftrightarrow{\text{connu}}$ une base de $V(\sum \lambda_i \varepsilon_i) \in \underset{\uparrow}{\mathcal{O}^{\geq 0}_{int}}(\mathfrak{gl}_n)$

reps de $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$, cas classique !

On va retrouver cette correspondance en passant par le monde cristallin.

$\Psi_\theta : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow[\text{adm. } \theta]{\text{écriture}} B^{\otimes N}$

$\uparrow$ str. de cristal $\overset{\text{Th 2}}{\longleftarrow}$ $\uparrow$ str. de cristal sur $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$

Rmq: Un cristal sur $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$ est un ensemble C muni d'appl^{ns}
- $wt : C \to P$
- $\varepsilon_i, \varphi_i : C \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$
- $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \to B \sqcup \{0\}$

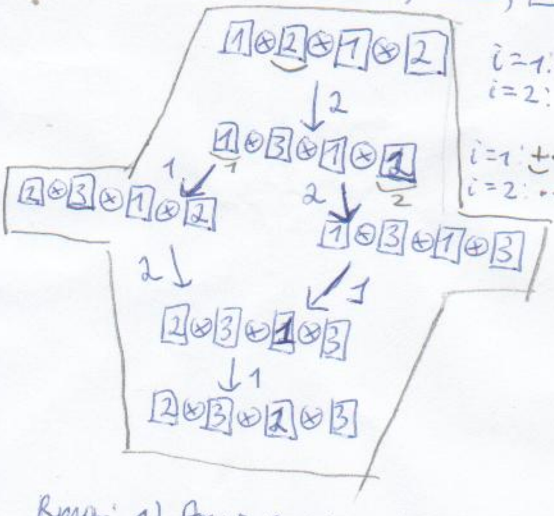
avec des conditions de compatibilité qui miment celles des bases cristallines.

Th. 2 : (a) $\Psi_\theta(\mathcal{B}(\lambda))$ est stable par $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$, donc on a effectivement une str. de cristal sur $\mathcal{B}(\lambda)$;
(b) Cette structure induite ne dépend pas de θ.

Ex. : $\cdot\, n=3$, $B = \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3}$; $\cdot$ écriture japonaise

$\cdot\, \lambda = \boxplus$, $\mathcal{B}(\lambda) = \left\{ \begin{smallmatrix}1&1\\2&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&1\\2&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&1\\3&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2\\2&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2\\3&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2&2\\3&3\end{smallmatrix} \right\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = 6$

$\| \; 2\Lambda_2$

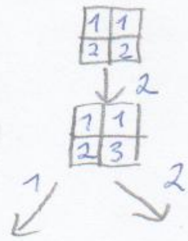


$i=1$: $+ - + -$ $\nearrow 0$
$i=2$: $\cdot + \cdot +$

$i=1$: $+ \cdot + -$
$i=2$: $\cdot - \cdot +$

c. f. l'algorithme pour l'action de $\tilde{e}_i$ & $\tilde{f}_i$:
(1) écrire $\underbrace{- - -}_{\varepsilon_i(b_j)} \underbrace{+ +}_{\varphi_i(b_j)}$ au-dessous de b_j $\forall j$
(2) éléminer tous les $+-$
(3) $\tilde{f}_i$ agit sur le 1er $+$: $b_j \mapsto \tilde{f}_i(b_j)$
$\tilde{e}_i$ agit sur le dernier $-$: $b_j \mapsto \tilde{e}_i(b_j)$ } pour le j correspondant

Rmq : 1) Pour passer à l'écriture arabe il suffit d'échanger la 2ème & 3ème cases ; ça donne la $\hat{m}$ structure si on revient aux Y-tableaux :
2) Notons les symétries du graphe cristallin.



Idée de la preuve : (b) Utiliser l'algorithme.
(a) Supposons $\tilde{f}_i T \neq 0$. $\begin{matrix} & a & \\ b < & i & d \\ & c & \end{matrix} \xmapsto{\tilde{f}_i} \begin{matrix} & a & \\ b < & i+1 & d \\ & c & \end{matrix}$
$\cdot$ écriture arabe $\Rightarrow d \neq i \Rightarrow i+1 \leq d$
$\cdot$ écriture japonaise $\Rightarrow c \neq i+1 \Rightarrow i+1 < c$ ↯

Il nous reste à identifier le cristal obtenu avec la base cristalline d'une représantation.

$$\begin{tikzcd}
\text{irrep } V(\lambda) \in \mathcal{O}^{\geq 0}_{int} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Th. 1}"] & \lambda \in P^{++}\text{-partition} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Y-diagramme} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{B}(\lambda) \\
\text{base cristalline } B(\lambda) \arrow[u] \arrow[rrr, "\boxed{\text{Th. 3}}", "\text{iso de cristaux}"'] & & & \underbrace{U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-cristal}}_{\text{Th. 2}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Idée de la preuve:

$T_\lambda :=$
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\
\hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & \lambda_2 \\
\hline \cdots \\
\hline n & n & & & & & \lambda_n \\
\hline
\end{array}$$

- $wt(T_\lambda) = \lambda$
- $\forall i$: $\underbrace{++++}_{\lambda_i} \geq \underbrace{---}_{\lambda_{i+1}} \Rightarrow \tilde{e}_i T_\lambda = 0 \Rightarrow T_\lambda$ est une source.
- Il reste à montre que c'est la seule source.

Supposons $\exists T \in \mathcal{B}(\lambda)$ t.q. $\tilde{e}_i T = 0$ $\forall i \in I$ & $T \neq T_\lambda$

Regardons la 1ère ligne où $T \neq T_\lambda$:

$$T = \begin{array}{l} 1\,1 \ldots 1\,1\,1\,1\,1 \\ \vdots \\ k\,k \ldots k\,k\,k \\ \cdots \boxed{j} \end{array}$$

$j > k+1$;

$\forall i \geq k+1$, $\tilde{e}_i T = 0 \Rightarrow \boxed{j}_i \neq - \Rightarrow j \neq i+1 \Rightarrow j \leq k+1$, contradiction ↯.

Ex.: $B(\Lambda_j) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \hline \end{array} \;\middle|\; 1 \leq a_1 < a_2 \ldots < a_j \leq n \right\}$, où $\tilde{f}_i$ augmente $a_p = i$ si un tel p existe & $a_{p+1} > i+1$.

Rmq: D'autres opérations sur les Y-tableaux possèdent une interprét^n en termes de cristaux, e.g.:
- insertion par ligne/par colonne
- jeu de taquin.

④ Règle de Littlewood-Richardson via les Y-diagrammes

Pour deux partitions $\lambda, \mu \in P^{++}$, on cherche toutes les sources de $\mathcal{B}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\mu)$, muni de la structure de ~~prod~~ produit tensoriel des cristaux du théorème 2.

Cas 1. $\mu = \varepsilon_1$, $\mathcal{B}(\mu) = B$

$\{\text{sources}\} = \{ T_\lambda \otimes \boxed{j} \mid \lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1 \text{ ou } j = 1 \}$ ◁ l'algorithme donne : • en couleur j, $\overbrace{\underbrace{+++}_{\lambda_j}\underbrace{---}_{\lambda_{j+1}}}^{T_\lambda}\overbrace{+}^{\boxed{j}}$

• en couleur $j-1$, $\underbrace{+++}_{\lambda_{j-1}}\underbrace{--}_{\lambda_j}\underbrace{-}_{1}$ ◁

$\Rightarrow \mathcal{B}(\lambda) \otimes B \simeq \bigoplus_{\boxed{j} \in B} \mathcal{B}(T_\lambda[j])$

↑ on ajoute une case dans la j-ème ligne si cette case est ajoutable
$\cdot = 0$ sinon

Ex. : $n = 3$; $\mathcal{B}(\ydiagram{2,1,1}) \otimes \mathcal{B}(\ydiagram{1}) \simeq \mathcal{B}(\ydiagram{3,1,1}) \oplus \mathcal{B}(\ydiagram{2,2,1})$ $\Rightarrow V(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \otimes V(\varepsilon_1) \simeq V(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \oplus V(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$

$n \geq 4$ — // — $\simeq$ — // — $\oplus\, \mathcal{B}(\ydiagram{2,1,1,1})$ $(\oplus\, V(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$ si $n \geq 4)$

Cas 2. $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i$, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$; on fixe une écriture admissible.

$\Rightarrow \mathcal{B}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\mu) \simeq \bigoplus_{\boxed{j_1} \otimes \dots \otimes \boxed{j_N} \in \mathcal{B}(\mu)} \mathcal{B}(T_\lambda[j_1][j_2]\dots[j_N])$

↑ on ajoute les N cases une par une si possible

Ex. : $n = 3$, $\lambda = \ydiagram{1,1}$, $\mu = \ydiagram{2,1}$

$\mathcal{B}(\mu) = \{ \ytableaushort{11,2}\,, \ytableaushort{12,2}\,, \ytableaushort{13,2} \text{ etc.} \}$

dans une écriture quelconque : $\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$, $\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$, $\boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ etc.

- $\ydiagram{1,1} \xrightarrow{[1]} \ydiagram{2,1} \xrightarrow{[1]} \ydiagram{3,1} \xrightarrow{[2]} \ydiagram{3,2}$
- $\ydiagram{1,1} \xrightarrow{[2]} 0$
- $\ydiagram{1,1} \xrightarrow{[3]} \ydiagram{1,1,1} \xrightarrow{[1]} \ydiagram{2,1,1} \xrightarrow{[2]} \ydiagram{2,2,1}$

etc.

$\mathcal{B}(\ydiagram{1,1}) \otimes \mathcal{B}(\ydiagram{2,1}) \simeq \mathcal{B}(\ydiagram{3,2}) \oplus \mathcal{B}(\ydiagram{2,2,1}) \oplus \mathcal{B}(\ydiagram{3,1,1})$