Bases cristallines : intro

Kashiwara : bases cristallines (90)

$\wr\wr$

Lusztig : bases canoniques (90)

← instruments combinatoires & géométriques ⟹ reps de gpes quantiques

Lusztig :

$\operatorname{ch} M = \sum_{\lambda \in P} (\dim_{\mathbb{C}} M_\lambda) e^\lambda$ pour $M \in \mathcal{O}_{int}$

|| pour q générique

$\operatorname{ch} M^q = \sum_{\lambda \in P} (\dim_{\mathbb{C}(q)} M^q_\lambda) e^\lambda$ pour $M \in \mathcal{O}^q_{int}$

$q = 0$ la sit^n est la + simple $\xrightarrow{\text{globalis}^n}$ base globale de M^q

Kashiwara : graphe cristallin (coloré), arêtes = opérateurs de Kashiwara = une action modifiée des vecteurs racines

|| modèle de chemins de Littelmann (94)

↳ facilite la manipulation du produit tensoriel

↳ permet de calculer les caractères (multiplicités des poids)

Pour les a. L. classiques,

$\boxed{\text{bases cr}} \xleftrightarrow[\text{admissible}]{\text{lecture}} \boxed{\text{diagrammes \& tableaux de Young}}$

bases cr ↓ $\otimes$: loi du produit tensoriel

diagrammes & tableaux de Young ↓ loi de Littlewood-Richardson

Pour les a. quantiques affines $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$,

physique	théorie de reps	bases cr.	combinatoire
↓	↓	↓	↓
modèle exacts solubles ←	reps des gpes quantique qui correspondent aux alg. de Kac-Moody affines ←	cristaux parfaits ←	murs de Young

modèle exacts solubles ↓ e.g. : fonction d'un pt pour le "6-vertex model" ↓ q = température

reps des gpes quantique ↓ f^n de corde $\|$ Char (rep basique de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$)

fonction d'un pt pour le "6-vertex model" = f^n de corde

cristaux parfaits ↓ $q = 0$: zéro absolu

Lusztig ⟵ Ringel (88) : gpe quantique = l'algèbre de Hall ass. à un carquois

BASES CRISTALLINES 5 : $U_q(\mathfrak{g})$-modules

Victoria

d'après Kashiwara et Hong & Kang

Plan :

① Bases cristallines : cas général.

③ Produit tensoriel de BCr.

④ Graphes cristallins.

② Théorèmes d'existence et d'unicité.

⑤ Cristaux.

Avantages des bases cristallines :

- on comprend mieux la str. de ${}_{U_q(\mathfrak{g})}\mathrm{Mod}$, et donc de ${}_{U_{\mathfrak{g}}}\mathrm{Mod}$ (caractères)
- le calcul de $V_1 \otimes V_2$ devient plus facile

$\Big\}$ méthodes combinatoires

- on "régularise" les actions de e_i & f_i et on le rend presque inverses l'une de l'autre

On travaille avec une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$,
son algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$,
et un module $M \in \mathcal{O}^q_{int}$, i.e. (1) M est un module de poids, i.e. $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$, où $M_\lambda = \{u \in M \mid q^h u = q^{\lambda(h)} u \ \ \forall h \in P^\vee\}$

(2) $\dim_{\mathbb{K}(q)} M_\lambda < \infty \ \forall \lambda \in P$

(3) $\mathrm{wt}\, M \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} D(\lambda_i)$, $D(\lambda) = \{\mu \in P \mid \mu \leq \lambda\}$

(4) les e_i et f_i sont localement nilpotents sur M.

On va écrire en noir tout ce qu'il y a de nouveau %. cas sl_n.

① Une base cristalline (L, B) de M est :

(a) une base locale en $q = 0$ de M, i.e. • $L \leq M$ est un sous-A_0-module libre, avec $\mathbb{K} \otimes_{A_0} L = M$
• B est une base de L / qL "limite cristalline"

+ (b) compatibilité avec la décompos^n de poids : $(L, B) \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} (L_\lambda, B_\lambda)$, où (L_λ, B_λ) est une base locale de M_λ

+ (c) **compat. avec** $\underbrace{U_q(\mathfrak{g})_i}_{\simeq U_q(sl_2)} \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ $\forall i \in I$, i.e. (L, B) est une BCr de M pour l'action de $U_q(\mathfrak{g})_i \simeq U_q(sl_2)$

Rmq : on pourrait dire que (L, B) préserve les structures horizontale & verticale de M.

Rmq : un tel L s'appelle "un treillis cristallin".

Cette déf^n suggère déjà que bcp de résultats établis dans le cas sl_2 vont être transportés dans le cas général grâce aux inclusions $U_q(\mathfrak{g})_i \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$; éventuellement un calcul supplémentaire sera nécessaire. La récurrence est un autre outil indispensable.

Opérateurs de Kashiwara : $\forall i \in I$, $\forall u \in M_\lambda$, on a : $\exists u = \sum_{n \geq 0, -\lambda(h_i)} f_i^{(n)} v_n$, avec $v_n \in M_{\lambda + n\alpha_i}$, et $e_i v_n = 0$,
posons $\tilde{e}_i u = \sum_{n \geq 1, -\lambda(h_i)} f_i^{(n-1)} v_n$, $\tilde{f}_i u = \sum_{n \geq 0, -\lambda(h_i)} f_i^{(n+1)} v_n$.

Rmq : On a une **dé**composition différente pour $\forall i \in I$.

Th. : Dans la déf^n d'une BCr, (c) $\iff \forall i \in I$, $\begin{cases} \bullet\ \tilde{e}_i L \subset L,\ \tilde{f}_i L \subset L \\ \bullet\ \tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\},\ \tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\} \\ \bullet\ \forall b, b' \in B, \text{ on a : } b' = \tilde{e}_i b \iff b = \tilde{f}_i b' \end{cases}$ ← "$\tilde{e}_i = \tilde{f}_i^{-1}$"

② Théorèmes de Kashiwara.

Théorème d'existence: Soit λ un poids dominant ($\lambda \in P^+$), i.e. $\lambda(h_i) \geq 0 \ \forall i$, alors $\exists!$ BCr (L, B) de $V(\lambda)$ avec $B_\lambda = \overline{u_\lambda}$; on a en plus:

- $B = \{\tilde{f}_{i_1} \ldots \tilde{f}_{i_\ell} u_\lambda \mid \ell \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_\ell \in I\} \setminus \{0\}$
- $\overline{u_\lambda}$ est l'unique $b \in B$ avec $\tilde{e}_i b = 0 \ \forall i \in I$. On note $(L(\lambda), B(\lambda))$ cette BCr.
  source de B, i.e.

La preuve utilise l'argument du grand lacet: 14 (ou 7) assertions inductives sont démontrées simultanément.

Rmq: La première preuve ne traitait que le cas du type A, B, C, D.

Théorème d'unicité: Si $M \in \mathcal{O}^q_{int}$ a une BCr (L, B), alors $\exists \begin{cases} M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu V(\lambda_\nu) \\ (L, B) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu (L(\lambda_\nu), B(\lambda_\nu)) \end{cases}$

↑ str. du th. d'existence

Rmq: La décomposit^n $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu V(\lambda_\nu)$ n'est pas unique!

Rmq: La preuve utilise l'existence.

Crl 1: $\boxed{M \simeq \bigoplus_{b \text{ source de } B} V(wt(b))}$ ⇒ on comprend la str. de M à partir de sa BCr!

Crl 1': $\lambda, \mu \in P^+ \Rightarrow \boxed{V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{\substack{b \in B(\mu) \text{ t.q.} \\ \varepsilon_i(b) \leq \lambda(h_i)}} V(\lambda + wt(b))}$ ⇒ une f-le élégante pour $\otimes$!

▷ $B := B(\lambda) \otimes B(\mu)$, alors $\{\text{sources de } B\} = \{b_1 \otimes b_2 \mid \underbrace{\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2)}_{= \max\{\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - wt(b_1)(h_i)\}} = 0 \ \forall i\} = \{b_1 \otimes b_2 \mid \underbrace{\varepsilon_i(b_1) = 0 \ \forall i}_{\Downarrow \ b_1 = u_\lambda} \ \& \ \varepsilon_i(b_2) \leq wt(b_1)(h_i) \ \forall i\}$

Enfin $wt(u_\lambda \otimes b_2) = \lambda + wt(b_2)$ ◁.

↓ ds §3!

Ex: la représentation vectorielle de $U_q(sl_n)$: $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{k}(q) v_i$, $\rho(e_i) = E_{i,i+1}$, $\rho(f_i) = E_{i+1,i}$

$B = \{\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}\}$, $\tilde{f}_i \overline{v_i} = \overline{v_{i+1}}$, $\tilde{f}_i \overline{v_j} = 0$ si $j \neq i$.

$$\rho(K_i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & q & & \\ & & & q^{-1} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$\uparrow i \quad \uparrow i+1$

Ex. 5.1.3, p. 93.

③ Pour un $b \in B_\lambda$, notons
- $wt(b) = \lambda$
- $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\} < \infty$
- $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\} < \infty$

on a : $\underline{\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = wt(b)(h_i)}$.

Th. : Soit (L_ν, B_ν) une BCr de M_ν, $\nu = 1, 2$, alors $\underline{(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)}$ est une B Cr de $M_1 \otimes M_2$, avec :

- $\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \text{sinon}; \end{cases}$
- $\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2, & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2). \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - wt(b_1)(h_i)\}$
- $\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varphi_i(b_1) + wt(b_2)(h_i), \varphi_i(b_2)\}$.
- $wt(b_1 \otimes b_2) = wt(b_1) + wt(b_2)$

Crl 2 : c.f. §②

Crl 3 : $b_1 \otimes \dots \otimes b_N \in \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_N$ est une source $\Leftrightarrow b_1 \otimes \dots \otimes b_k$ l'est $\forall k \leq N$.

④ Graphe cristallin :

- sommets $= B$
- flèches orientées colorées $b \xrightarrow{i} \tilde{f}_i b$

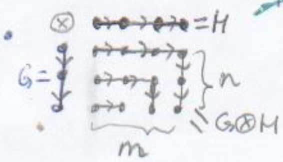
Ex. : la repr^n vectorielle : $\bar{v}_1 \xrightarrow{1} \bar{v}_2 \xrightarrow{2} \bar{v}_3 \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{n-1} \bar{v}_n$

Rmq. : M est irréductible $\Leftrightarrow \mathcal{G}(M)$ est connexe.

$\forall i \in I$, $\forall b \in B$, b fait partie d'une i-chaîne $\underbrace{o \xrightarrow{i} o \dots \xrightarrow{i}}_{\varepsilon_i(b)} \overset{b}{o} \underbrace{\xrightarrow{i} o \dots \xrightarrow{i} o}_{\varphi_i(b)}$

Structure d'un GrCr : $\underbrace{\text{i-chaînes}}_{\text{simple}}$ $\underbrace{\text{superposées}}_{\text{riche}}$.

On définit le produit tensoriel des graphes cristallins :

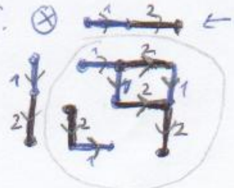
1. 

2.

$\otimes$	H_1	$\sqcup$ H_2
G_1	$G_1 \otimes H_1$	$\sqcup$ $G_1 \otimes H_2$
$\sqcup$	$\sqcup$	
G_2	$G_2 \otimes H_1$	$\sqcup$ $G_2 \otimes H_2$

$\otimes$ sur les i-chaînes

3. on prend la superposit^n des $\otimes$ des i-chaînes pour tous les i.

Ex. : 

← la repr^n vect. de $U_q(sl_3)$

Prop : Ce $\otimes$ correspond à celui qu'on a défini pour les t-les dans §②.

Prop : Soit $\lambda \in P^+$ et $(L(\lambda), B(\lambda))$ la BCr de $V(\lambda)$, c.f. le th. d'existence ; notons $\mathcal{G}(V(\lambda))$ son gr Cr ; alors :
- $\mathcal{G}$ est connexe (on oublie les couleurs & les orient^{ns})
- v_λ est la seule source de $\mathcal{G}$ (i.e. un sommet qui n'a pas d'arêtes entrantes)
- $\forall i \in I$, v_λ est le début d'une i-chaîne de longeur $\lambda(h_i)$
- $\mathcal{G}(V(\lambda) \otimes V(\mu)) \simeq \mathcal{G}(V(\lambda)) \otimes \mathcal{G}(V(\mu))$.

$\Downarrow$

Algorithme du produit tensoriel de Kashiwara :

$\lambda_1, \lambda_2 \in P^+ \underset{\uparrow}{\leadsto} (L(\lambda_i), B(\lambda_i)) \leadsto \mathcal{G}(V(\lambda_i)) \leadsto \mathcal{G}(V(\lambda_1)) \otimes \mathcal{G}(V(\lambda_2)) = \bigsqcup_{C \in \mathcal{J}} C \leadsto V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_2) \simeq \bigoplus_{C \in \mathcal{J}} V(\lambda_C)$,

l'étape la + difficile !

$C \in \mathcal{J}$ - composants connexes, avec la source v_C ; où $\lambda_C(h_i) =$ la longeurs de la i-chaîne qui commence en v_C

Dans l'exemple ci-dessus on trouve $V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_1) \simeq \underset{\Lambda^2(V(\lambda_1))}{\overset{\shortparallel}{V(\lambda_2)}} \oplus \underset{S^2(V(\lambda_1))}{\overset{\shortparallel}{V(2\lambda_1)}}$.

5 Un **cristal** sur $\mathfrak{g}$ est un ensemble B muni d'applicat^{ns} $\cdot\, wt : B \to P$, $\cdot\, \varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$, $\cdot\, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \to B \sqcup \{0\}$ t.q.

(↑ élément fantôme)

(1) $\tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$

(2) $\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = wt(b)(h_i)$

(3) $b \in B$ t.q. $\tilde{e}_i b \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$, $wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i$

(4) pareil pour $\tilde{f}_i b$.

(5) pour $b_1, b_2 \in B$, $b_2 = \tilde{f}_i b_1 \Leftrightarrow b_1 = \tilde{e}_i b_2$.

(6) $\varphi_i(b) = -\infty \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

Ex. : Une BCr de $M \in \mathcal{O}^q_{int.}$

Comme dans le cas sl_2, on a :

- une notion de morphisme, morphisme e- ou f-strict, plongement (plein)
- un produit tensoriel ass.

Un cristal est dit
- semi-normal si $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$ et $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$;
- normal, si $\forall\, J \subseteq I$ t.q. $\# J < \infty$ et $((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j \in J} > 0$ (i.e. la sous-alg. de Lie $\mathfrak{g}_J$ engendrée par e_i, f_i $(i \in J)$ et q^h $(h \in P^\vee)$ est de dim. finie), le cristal $\Psi_J(B)$ (i.e. B regardé sur $U_q(\mathfrak{g}_J)$) est isomorphe au crisal associé à un $M \in \mathcal{O}^q_{int.}(\mathfrak{g}_J)$.

Rmq : $\Updownarrow$ la m̂ condition $\forall\, J \subseteq I$ t.q. $\# J \leq 2$.

Prop. : $\lambda \in P^+$ & B un $U_q(\mathfrak{g})$-crisal connexe ; si $\varphi : B(\lambda) \to B$ est un m-sme strict t.q. $\varphi(B(\lambda)) \subseteq B$, alors c'est un isom-sme.

Ex. : (1) un cristal $B \xrightarrow[\text{des flèches}]{\text{renversement}} B^\vee$

(2) $\lambda \in P^+$, $B(-\lambda) := B(\lambda)^\vee$, ass. au module simple $V(-\lambda)$ sur $U_q(\mathfrak{g})$ de + bas poids $-\lambda$; normal.

(3) $T_\lambda = \{t_\lambda\}$, $wt(t_\lambda) = \lambda$, $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$, $\tilde{e}_i t_\lambda = \tilde{f}_i t_\lambda = 0$; non semi-normal ;

- $T_\lambda \otimes T_\mu \simeq T_{\lambda+\mu}$
- $T_0 \otimes B \simeq B \simeq B \otimes T_0$ $\forall$ cristal $B \Rightarrow T_0$ est ~~un~~ objet neutre pour $\otimes$

(4) $B(0)$ est un objet neutre dans la catégorie tens. des cristaux semi-normaux ;

(5) $B_i = \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{0\}$, $wt(b_i(n)) = n\alpha_i$, $\varepsilon_i(b_i(n)) = -\varphi_i(b_i(n)) = -n$, $\varepsilon_j(b_i(n)) = \varphi_j(b_i(n)) = -\infty$ $\forall j \neq i$,

$\tilde{e}_i b_i(n) = b_i(n+1)$, $\tilde{f}_i b_i(n) = b_i(n-1)$, $\tilde{e}_j b_i(n) = \tilde{f}_j b_i(n) = 0$ $\forall j \neq i$.

- non semi-normal
- $\mathcal{G}(B_i) = \cdots \xrightarrow{i} b_i(1) \xrightarrow{i} b_i(0) \xrightarrow{i} b_i(-1) \xrightarrow{i} \cdots$
- $T_\lambda \otimes B_i \simeq B_i \otimes T_{s_i\lambda}$

  $t_\lambda \otimes b_i(n) \leftrightarrow b_i(n + \lambda(h_i)) \otimes t_{s_i\lambda}$
- $B_i \otimes B_i \simeq \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_i \otimes T_{n\alpha_i}$

(6) $M(0)$ sur $U_q(sl_2)$: $B(\infty) = \{f^{(k)}u \mid k \in \mathbb{N}_0\}$, $\varepsilon(f^{(k)}u) = -\varphi(f^{(k)}u) = k$, $\tilde{e}(f^{(k)}u) = f^{(k-1)}u$, $\tilde{f}(f^{(k)}u) = f^{(k+1)}u$.

$u \to fu \to f^{(2)}u \to \cdots$

- pour $B(\infty) \otimes B(\infty)$, on a : $\varepsilon(f^{(k)}u \otimes f^{(l)}u) = l + 2k$, $\varphi(\cdot) = -l$, $\tilde{e}(\cdot) = f^{(k)}u \otimes f^{(l-1)}u$, $\tilde{f}(\cdot) = f^{(k)}u \otimes f^{(l+1)}u$.
- sur $U_q(sl_2)$, on a $B(m) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_m$ — un plongement non strict

  $f^{(k)}u \mapsto f^{(k)}u \otimes t_m$, $0 \leq k \leq m$