Aspects catégoriques de la virtualité

Victoria LEBED

Plan: I) Intro : tresses et tresses virtuelles.

II) Une version catégorique des tresses virtuelles.

III) Applications :

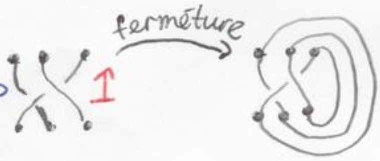
1) Une interprétation catégorique des structures auto-distributives virtuelles.

2) "Vrillage" des représentations des VB_n.

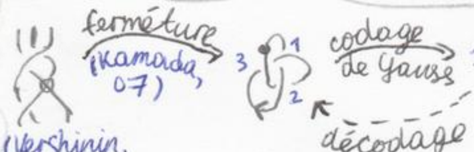
pt de vue \ tresses	usuelles	virtuelles
algébrique	$B_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle / \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ \forall \lvert i-j\rvert > 1$ (Comm), $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \ \forall i$ (YB) $S_n \simeq B_n / \sigma_i^2 = 1 \ \forall i$ (S)	$VB_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \varsigma_1, \dots, \varsigma_{n-1} \rangle /$ → (Comm) & (YB) pour les σ_i; → (Comm) & (YB) & (S) pour les ς_i; → relations mixtes : * $\sigma_i\varsigma_j = \varsigma_j\sigma_i \ \forall \lvert i-j\rvert > 1$ * $\varsigma_i\varsigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\varsigma_i\varsigma_{i+1} \ \forall i$ (YB_m)

topologique

usuelles

$\sigma_2\sigma_1^{-1} \longleftrightarrow$  noeuds/entrelacs

virtuelles

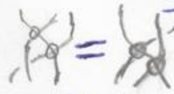


(Vershinin, 01)

$1D^+ 2U^+ 3D^+ 1U^+ 2D^+ 3U^+$

pb :  ← - - - $1U^- 2U^- 1D^- 2D^-$

solution : noeuds virtuels (Kauffman, 99)



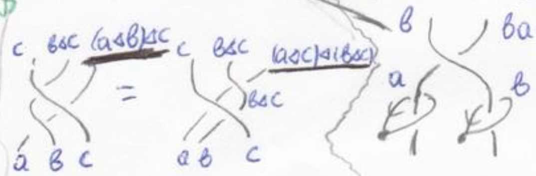
(YB_m)

⚠  "YB interdit"

représentations

usuelles

$B_n \curvearrowright G^{\times n}$ ← gpe ← $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$: rep^n de Wirtinger



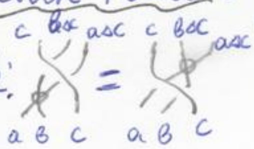
Rack (ou ensemble auto-distributif ; Joyce, Matveev, 82) :
ensemble S, $\triangleleft : S \times S \to S$ t.q.
(AD) $(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) \ \forall a,b,c \in S$
(R) $\exists \tilde{\triangleleft} : S \times S \to S$ t.q. $(a \triangleleft b)\tilde{\triangleleft} b = (a \tilde{\triangleleft} b) \triangleleft b = a \ \forall a,b \in S$.
Ex. : S est un gpe, $a \triangleleft b = bab^{-1}$.

$\boxed{B_n \curvearrowright S^{\times n}}$

virtuelles

$\boxed{VB_n \curvearrowright S^{\times n}}$

(1) action "réelle" : 

pb :  (YB interdit)

(2) action "virtuelle" (Manturov, 02) :
rack virtuel = rack $(S, \triangleleft)$ + autom-sme de rack f :
(RV) $f(a \triangleleft b) = f(a) \triangleleft f(b) \ \forall a,b \in S$

caté-gorique

On travaille ici avec des catégories monoïdales strictes.

Une telle cat. $\mathcal{C}$ est dite

→ tressée si elle est munie d'une famille $c_{M,N} \in Hom_{\mathcal{C}}(M \otimes N, N \otimes M)$, $M, N \in Ob(\mathcal{C})$

* naturelle : $c_{M',N'} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ c_{M,N}$ $\forall f : M \to M'$, $g : N \to N'$
* les $c_{M,N}$ sont inversibles
* $c_{M,N \otimes L} = (Id_N \otimes c_{M,L}) \circ (c_{M,N} \otimes Id_L)$

  $c_{M \otimes N, L} = \ldots$

→ "symétressée" si en plus

* $c_{M,N} \circ c_{N,M} = Id_{N \otimes M}$ $\forall N, M$.

Th. Soit $\mathcal{C}_{tr}$ la cat. tressée libre engendrée par un objet V. Alors

$$\boxed{End_{\mathcal{C}_{tr}}(V^{\otimes n}) \simeq B_n}$$

$c_i := Id_V^{\otimes i-1} \otimes c_{V,V} \otimes Id_V^{n-i-1} \longleftrightarrow \sigma_i$.

Objet tressé dans $\mathcal{C}$ $\overset{déf}{:}$ $(V, \sigma \in Aut_{\mathcal{C}}(V \otimes V))$ tq

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \in Aut_{\mathcal{C}}(V^{\otimes 3}), \qquad (YB)$$

où $\sigma_1 = \sigma \otimes Id_V$, $\sigma_2 = Id_V \otimes \sigma$.

<u>Rmq</u> : une notion « locale ».

<u>Ex.</u> : (1) $(V, c_{V,V})$ si $\mathcal{C}$ est tressée

(2) $(\underset{\text{rack}}{S}, \; {}_{a}{}^{b} \times {}_{b}{}^{a \triangleleft b} =: \sigma_{AD})$ dans $(Set, \times)$.

Th. (L., 12) : Soit $\mathcal{C}_{bitr}$ la cat. symétressée libre engendrée par un objet tressé (V, σ).

	cat.	alg.
	$\boxed{End_{\mathcal{C}_{bitr}}(V^{\otimes n}) \simeq VB_n}$	$VB_n \cong B_n * S_n$ / relations mixtes
tressage local	$\sigma_i \longleftrightarrow \sigma_i$	B_n
symétressage global	$c_i \longleftrightarrow \zeta_i$	S_n

<u>Crl</u> : Soit (V, σ) un objet tressé dans $(\mathcal{C}, c)$ cat. sym. Alors $\boxed{VB_n \curvearrowright V^{\otimes n}}$.

<u>Notation</u> : On dit que l'action ci-dessus est donnée par σ et $c_{V,V}$.

<u>Rmq</u> : Une construction flexible.

(X) Une interprétation catégorique des racks virtuels.

Th. (L., 12) : Soient
- $(\mathcal{C}, c)$ une catégorie symétressée
- $V \in Ob(\mathcal{C})$
- $f \in Aut_{\mathcal{C}}(V)$

Alors : (1) On a une sous-catégorie monoïdale $\mathcal{C}_{V,f}$ de $\mathcal{C}$, avec
- objets $V^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$
- $Hom(V^{\otimes n}, V^{\otimes m}) := \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m}) \text{ t.q.} \\ f^{\otimes m} \circ \varphi = \varphi \circ f^{\otimes n} \end{array} \right\}$

(2) $c^f := (f^{-1} \otimes f) \circ c_{V,V} \in Aut_{\mathcal{C}}(V^{\otimes 2})$ définit un symétressage pour $\mathcal{C}_{V,f}$.

<u>Prop.</u> : Soit (S, f) un rack virtuel. Alors l'action de VB_n sur l'objet tressé $(S, \sigma_{\triangleleft})$ dans $(\mathbf{Set}_{S,f}, \underset{\uparrow}{\tau^f})$ est l'action virtuelle de Manturov.
$\tau((a,b)) = (b,a)$

<u>Lemme</u> : $\sigma_{\triangleleft}$ est un m-sme dans $\mathbf{Set}_{S,f} \Leftrightarrow f(a \triangleleft b) = f(a) \triangleleft f(b)$ $\forall a, b \in S$.

(XX) "Vrillage" des représentations des VB_n.

Th. (L., 12) ① Soit (V, σ) un objet tressé dans $(\mathcal{C}, c)$. Alors
$\sigma^c := c_{V,V} \circ \sigma \circ c_{V,V}$
définit un tressage pour V.

② Si en plus $\mathcal{C}$ est munie d'un 2ème symétressage b, alors $(\sigma, c_{V,V})$ et $((\sigma^c)^b, (c_{V,V})^b)$ définissent des VB_n-reps isomorphes dans $V^{\otimes n}$.

On a déjà rencontré 2 symétressages sur la m̂ catégorie en étudiant $\mathcal{C}_{V,f}$.

<u>Crl</u> : Soit (V, σ) un objet tressé dans $(\mathcal{C}, c)$, et $f \in Aut_{\mathcal{C}}(V)$ t.q. $\sigma_V \circ (f \otimes f) = (f \otimes f) \circ \sigma_V$.
Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(\sigma, c^{f^k}_{V,V})$ et ( $, c^{f^{k-2}}_{V,V})$ définissent des VB_n-reps isomorphes dans $V^{\otimes n}$.

<u>Ex</u> : rack d'Alexander : $A \in {}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}Mod$, $a \triangleleft b := t \cdot a + (1-t) \cdot b$.
$\rightsquigarrow \boxed{VB_n \circlearrowleft A^{\oplus n}}$

(1) rep. "réelle" : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ $\rightsquigarrow$ rep. de Bureau virtuelle (Vershinin, 01)

(2) rep. "virtuelle" $\leftarrow$ rack d'Alexander virtuel

ⓐ $f(a) = a + \varepsilon$, $\varepsilon \in A$ fixé $\rightsquigarrow$ polynôme d'Alexander virtuel (Manturov, 02)
⚠ f n'est pas linéaire

ⓑ $A \in {}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]}Mod$, $f(a) = s\,a$ $\rightsquigarrow$ rép. $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s^{-1} \\ s & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Crl $\Rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s^{-k} \\ s^k & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & s^2 \\ ts^{-2} & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s^{-(k-2)} \\ s^{k-2} & 0 \end{pmatrix}\right)$ définissent des VB_n-reps isomorphes

matrice de Burau tordue (Silver & Williams, 01)

Supposons $s = \tilde{s}^2$, et prenons $k = 2$:

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s^{-1} \\ s & 0 \end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & s \\ ts^{-1} & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

rep "virtuelle" (Manturov) — rep "vrillée"