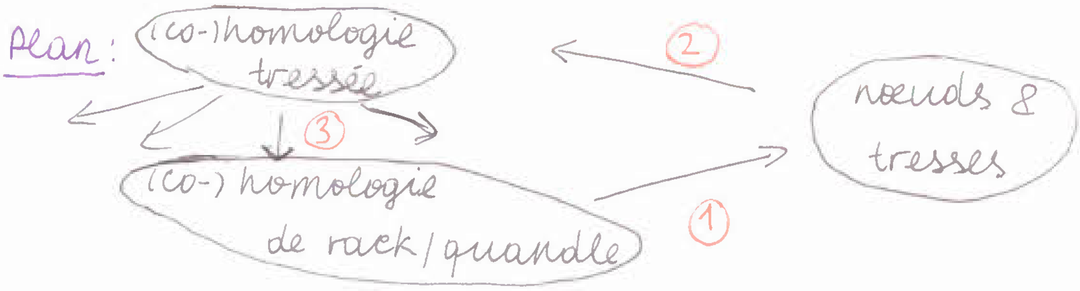
Tresses & homologies de structures algébriques : un aller-retour

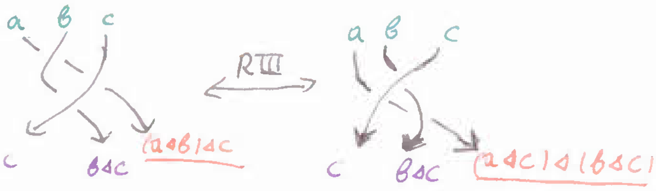
Victoria Lebed
09/10/2014
Séminaire de Topologie, Géométrie et Algèbre
Nantes

Plan :



① Cohomologie de structures auto-distributives

Coloriages de diagrammes par $(S, \triangleleft)$:



Algèbre :		**Topologie :**
shelf : $(a\triangleleft b)\triangleleft c = (a\triangleleft c)\triangleleft(b\triangleleft c)$ (AD)	$\longleftrightarrow$ RIII	tresses positive
rack : $\begin{cases} S \to S \\ a \mapsto a\triangleleft b \end{cases}$ est bijective	$\longleftrightarrow$ RII : $\rangle\!\langle = ||$	tresses
quandle : $a\triangleleft a = a$	$\longleftrightarrow$ RI : $= |$	noeuds orientés ↳ & entrelacs
kei : $(a\triangleleft b)\triangleleft b = a$	$\longleftrightarrow$ indépendence d'orient^n	noeuds non-or.

Ex. :

- (grpe G, $a\triangleleft b = b^{-n}ab^{n}$) est un quandle
- (grpe G, $a\triangleleft b = ba^{-1}b$) est un kei
  ↳ ($\mathbb{Z}_n$, $a\triangleleft b = 2b-a$)
- ($\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-mod. M, $a\triangleleft b = ta+(1-t)b$) est un quandle
- ($\mathbb{Z}$, $a\triangleleft b = a+1$) est un rack
- shelf libres

etc...

tresses	noeuds
$B_n \circlearrowleft F_n$	Wirtinger
	(n-)coloriages de Fox, $n=3$
Burau	Alexander
longueur des mots	entortillement (wr), enlacement (ek)
ordre de Dehornoy sur B_n	

Théorie : Joyce, Matveev : $\boxed{\text{Nœuds}/_{K=-K^*} \hookrightarrow \text{Quandles}}$ ← invariant universel faible de nœuds

$K \longmapsto \underline{FQ}(K)$

quandle fondamental

Pratique : un quandle "gentil"

$\mathrm{Hom}_{Qu}(FQ(K), Q) \simeq \{\,Q\text{-coloriages d'un diag. de } K\}$

$\#$ ↙ nombre

Ex. : Fox

↓ poids de Boltzmann

multi-ensemble

$\{\!\{ W_w(\mathcal{C}) = \sum \pm w(a,b) \mid \mathcal{C} \in Col_Q(D)\}\!\} \leftarrow w: S\times S \to A$ (gpe abélien)

est un invariant de nœuds ssi

(W1) $w(a,a)=0$

(W3) $w(a\triangleleft c, b\triangleleft c) + w(a,c) = w(a,b) + w(a\triangleleft b, c)$

Général^{ns} :

- colorier les régions par un Q-module $(M, \blacktriangleleft : M\times Q \to M)$ ($m \xrightarrow{a} m\blacktriangleleft a$)
  - $(m\blacktriangleleft a)\blacktriangleleft b = (m\blacktriangleleft b)\blacktriangleleft(a\triangleleft b)$
  - $m \mapsto m\blacktriangleleft a$ est bijective
- $K^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$

$\rightsquigarrow w : M\times S^{\times(n+1)} \to A$ t.q. ...

Monde auto-distributif

- $(Q,\triangleleft)$ quandle $\rightsquigarrow V = \mathbb{Z}Q$
- $(\widetilde{M},\blacktriangleleft)$ Q-module $\rightsquigarrow M = \mathbb{Z}\widetilde{M}$

Monde associatif

- $(V,\cdot,1)$ algèbre ass. unitaire
- $(M,\cdot)$ V-module

structure pré-(bi-)simpliciale

$$\begin{cases} d_i^g \ (\& \ d_i^d) : M\otimes V^{\otimes n} \to M\otimes V^{\otimes(n-1)}, \quad 1\le i\le n \\ \text{t.q. } d_i^\varepsilon \circ d_j^\zeta = d_{j-1}^\zeta \circ d_i^\varepsilon, \quad i\le j,\ \varepsilon,\zeta\in\{g,d\} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Pour } \partial = \alpha\partial^g + \beta\partial^d, \\ \partial^\varepsilon = \sum_i (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon, \\ \text{on a } \partial\circ\partial = 0 \end{array}$$

$(m,a_1,\dots,a_n) \xmapsto{d_i^g} (m\blacktriangleleft a_i, a_1\triangleleft a_i, \dots, a_{i-1}\triangleleft a_i, a_{i+1},\dots)$

$(m,a_1,\dots,a_n) \xmapsto{d_i^d} (m,a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots)$

$m\otimes v_1\otimes\dots\otimes v_n \xmapsto{d_i^g} \dots\otimes v_{i-1}\cdot v_i\otimes\dots$

dégénérescences

$$\begin{cases} s_i : M\otimes V^{\otimes n} \to M\otimes V^{\otimes(n+1)}, \quad 1\le i\le n \\ \text{t.q. } d_j^\varepsilon \circ s_i = \begin{cases} s_i\circ d_{j-1}^\varepsilon, & j>i+1 \\ d_{i+1}^\varepsilon \circ s_i, & j=i \\ s_{i-1}\circ d_j^\varepsilon, & j<i \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (\textstyle\sum_i \mathrm{Im}(s_i), \partial_*) \hookrightarrow (M\otimes T(V), \partial_*) \twoheadrightarrow \dots$$

$H_*(M,V)$ $\quad H_*^N(M,V)$

$H^*(M,V,A)$ $\quad H_N^*(M,V,A)$

$(m,a_1,\dots,a_n) \xmapsto{s_i} (\dots,a_i,a_i,\dots)$

$m\otimes v_1\otimes\dots\otimes v_n \xmapsto{s_i} \dots\otimes v_{i-1}\otimes 1\otimes v_i\otimes\dots$

$\to \partial^g$: (co-)homologie distributive

$\to \partial^g - \partial^d$: (co-)homologie de rack

$\to \partial^g - \partial^d$ & normal^n : (co-)hom. de quandle

- 2-cocycles $\Leftrightarrow$ (W1) & W(2) $\rightsquigarrow$ invariants de nœuds
- 2-cobords $\rightsquigarrow$ invar. trivial
- $w\in H_N^{n+1} \rightsquigarrow$ invar. de $K^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$

$\to$ bar

$\to$ Hochschild

etc.

? (J. Przytycki)

② L'homologie tressée : quand des théories parallèles se croisent

E. v. tressé : $(V, \tau : V\otimes V \to V \otimes V)$ t.q. $\underline{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_2}$ (YBE) $\tau_1 = \tau \otimes Id_V$, $\tau_2 = Id_V \otimes \tau$

⚠ On n'a pas besoin de τ^{-1}.

V-module tressé : $(M, M\otimes V \xrightarrow{\rho} M)$ t.q.

Cogèbre tressée : $(\underbrace{V, \tau}_{\text{e.v. tressé}}, \Delta : V \to V\otimes V)$ t.q.

Cf : graphes trivalents noués.

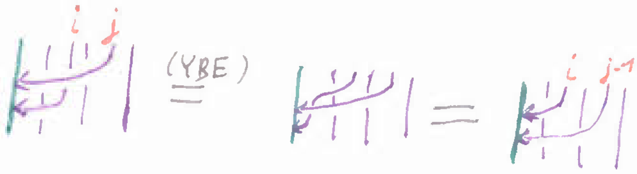
Th. (L., 2013) :

① $\begin{cases} (V, \tau) \\ (M, \rho) \end{cases}$ ⇝ une structure pré-simpliciale sur $M \otimes T(V)$:

$d_i =$  $= \rho \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{i-1}$

② $\begin{cases} (V, \tau, \Delta) \\ (M, \rho) \end{cases}$ ⇝ dégénérescences : $s_i =$  $= \Delta_i$

Preuve : ①



⊠

Remarques :

- versions bilatère (d_i^g, d_i^d)
- combiner (M, ρ) & (M, ρ')
- on peut travailler das une catégorie monoïdale pré-additive
- fonctorialité
- interprét° via battages quantiques
- hyperbords de Loday
- tresses coloriées & systèmes tressés à plusieurs composants

③ Structures AD / associatives ⟷ E.v. tressés

méthodes classiques ↘ Théorie (co-)homologique ↙ Théorème

	AD	Ass.	Leibniz
σ	$(a, b) \mapsto (b, a \triangleleft b)$	$v \otimes w \mapsto 1 \otimes v \cdot w$	$v \otimes w \mapsto w \otimes v + 1 \otimes [v, w]$
(YBE) ⟺	(AD)	associativité (si $v \cdot 1 = v$)	$[v,[w,u]] + [[v,u],w] = [[v,w],u]$ (Lei) (si $[v,1] = [1,v] = 0$)
$\exists \sigma^{-1}$?	⟺ rack	non	oui
module tressé	notions usuelles de module		
Δ	$a \mapsto a \otimes a$	$v \mapsto 1 \otimes v$	$v \mapsto 1 \otimes v + v \otimes 1$, $v \in V'$; $1 \mapsto 1 \otimes 1$; $V = V' \oplus R \cdot 1$, $[V', V'] \subseteq V'$
= ⟺	$a \triangleleft a = a$	$1 \cdot v = v$	
(co-) hom. tressées ∋	• distributive • de rack • de quandle	• bar • Hochschild	• Leibniz Leibniz $\underset{[v,w]+[w,v]=0}{\rightleftarrows}$ Lie $T(V)$, Leibniz $\downarrow$ $\Lambda(V)$, Chevalley-Eilenberg

D'autres structures "tressables" :

- bigèbre
- (bi-)modules de Hopf
- modules de Yetter-Drinfel'd
- algèbres de Poissons (faibles)
- quandles de multi-conjugaison : $(Q = \sqcup_i G_i, \triangleleft)$.