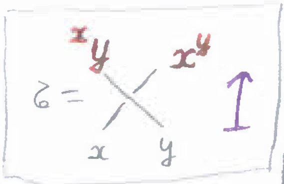
Sur les solutions ensemblistes de l'équation de Young-Baxter

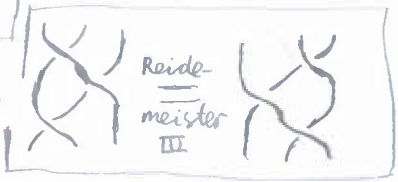
Victoria Lebed
(avec Leandro Vendramin)
06/10/15
Caen

Plan : (1) Trombinoscope
(2) Shelfs associés
(3) Théories (co-)homologiques } outils graphiques communs

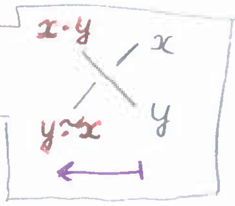
(1) Trombinoscope

Solution ensembliste de l'YBE (déf) :
(ici : = tressage)
ensemble X & $X \times X \xrightarrow{\sigma} X \times X$ t.q.
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 : X^{\times 3} \to X^{\times 3}$
où $\sigma_1 = \sigma \times Id_X$, $\sigma_2 = Id_X \times \sigma$



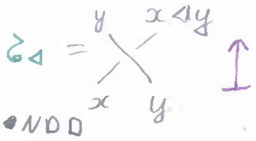


Tressage non-dégénéré à gauche (déf) : $X \xrightarrow{\cdot y} X$, $x \mapsto x^y$ sont bijectives
à droite (déf) : $X \xrightarrow{x\cdot} X$, $y \mapsto {}^x y$ — " —



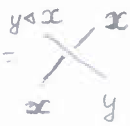
Birack (déf) : tressage inversible non-dégénéré (Fenn-Rourke-Sanderson '92).

Exemples :

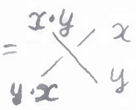
S) **shelf** : ens. X & $X \times X \xrightarrow{\lhd} X$ t.q.
$(x \lhd y) \lhd z = (x \lhd z) \lhd (y \lhd z)$ (AD) $\iff$ $\sigma_\lhd =$  est un tressage sur X

rack : & $X \xrightarrow{\cdot \lhd y} X$, $x \mapsto x \lhd y$ sont bijectives $\iff \sigma_\lhd$ inversible $\iff \sigma_\lhd$ NDG
$\iff \sigma_\lhd$ birack

quandle : & $x \lhd x = x$ $\iff (x,x) \overset{\sigma_\lhd}{\longmapsto} (x,x)$
(Joyce, Matveev '82)

Rmq : tressage alternatif $\sigma'_\lhd =$ 

Ex. : • gpe X, $x \lhd y = y^{-1} x y$
• $X \xrightarrow{f} X$, $x \lhd y = f(x)$

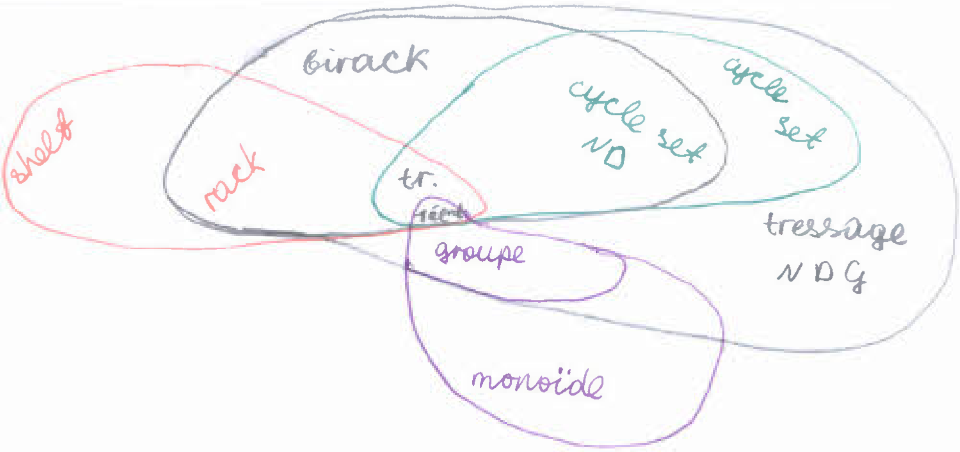
C) **cycle set** : ens. X & $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$ t.q.
$(x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot (y \cdot z)$ $\iff \sigma_\cdot =$  est un tressage sur X

& $X \xrightarrow{x\cdot} X$, $y \mapsto x \cdot y$ sont bijectives
• $\sigma_\cdot^2 = Id$
• NDG

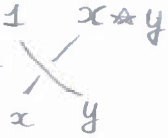
CS non-dégénéré : & $X \to X$, $x \mapsto x \cdot x$ est bijective $\iff \sigma_\cdot$ NDD $\iff \sigma_\cdot$ birack
(Etingof-Schedler-Soloviev '99, Rump '05)

Ex. : • $X \xrightarrow{f} X$, $x \cdot y = f(y)$

T) **tressage trivial** : $\sigma(x,y) = (y,x)$



M) monoïde $(X, \star, 1)$, associativité pour $\star$ $\Longleftrightarrow$ (si 1 est l'élément neutre) $\sigma_\star =$



est un tressage sur X

(L. '13)

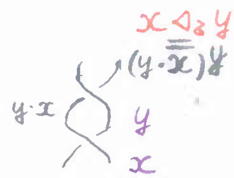
• $\sigma_\star^2 = \sigma_\star$

groupe $\Longrightarrow$ $\sigma_\star$ NDG

2) Shelfs associés

Fixons un tressage NDG (X, σ).

<u>Prop.</u> (L.-V. '15) : X porte la structure de shelf suivante : (↑ déf. shelf associé)

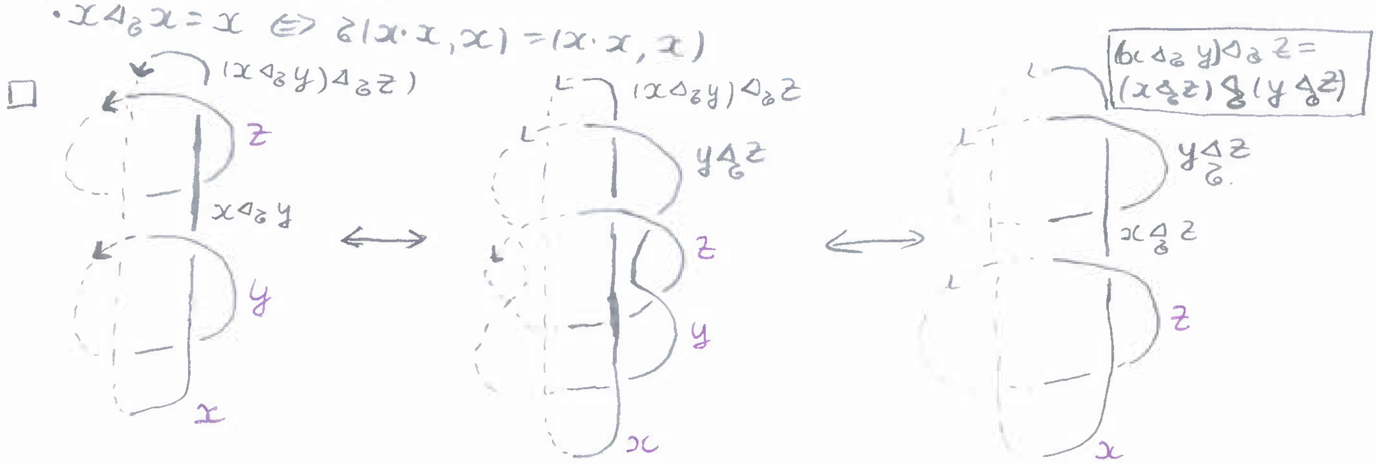


• $(X, \triangleleft_\sigma)$ rack $\Leftrightarrow$ σ inversible

• $(X, \triangleleft_\sigma)$ trivial $\Leftrightarrow$ $\sigma^2 = \mathrm{Id}$
$(x \triangleleft_\sigma y = x)$

• $x \triangleleft_\sigma x = x$ $\Leftrightarrow$ $\sigma(x \cdot x, x) = (x \cdot x, x)$

☐



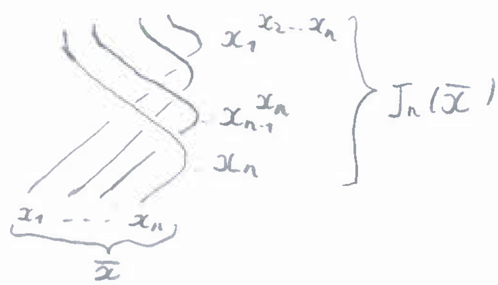
☒

Application(s) guitar$^{\text{déf}}$!

$J_n : X^{\times n} \xrightarrow{\sim} X^{\times n}$

$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1^{x_2 \ldots x_n}, \ldots, x_{n-1}^{x_n}, x_n)$

$x_1^{x_2 \ldots x_n} = (\ldots (x_1^{x_2})^{x_3} \ldots)^{x_n}$



<u>Prop.</u> : $\forall n$, $\forall 1 \leq i \leq n-1$, on a

$$\begin{tikzcd} X^{\times n} \arrow[r, "J_n"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & X^{\times n} \arrow[d, "\sigma'_i"] \\ X^{\times n} \arrow[r, "J_n"] & X^{\times n} \end{tikzcd}$$

où $\sigma' = \sigma_{\triangleleft_\sigma}$.

<u>Crl</u> : σ & σ' donnent des actions $B_n \curvearrowright X^{\times n}$ isomorphes.

⚠ $(X, \sigma) \not\cong (X, \sigma')$ en général.
(en tant que tressages)

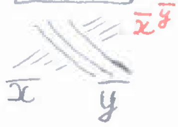
Tressage $\bullet$ RI-compatible $\overset{\text{déf}}{:}$ $\exists\, \mathcal{X} \xrightarrow{t} \mathcal{X}$ t.q. $\sigma(t(x),x) = (t(x),x)$.

$\bullet$ faiblement RI-compat. $\overset{\text{déf}}{:}$ $\exists\, \mathcal{X} \xrightarrow{t} \mathcal{X}$

(semi-) groupe structurel de $(\mathcal{X},\sigma)$ $\overset{\text{déf}}{:}$ $(S)G_{\mathcal{X},\sigma} = \langle \mathcal{X} \mid xy = zv,\ \sigma(x,y) = (z,v) \rangle$.

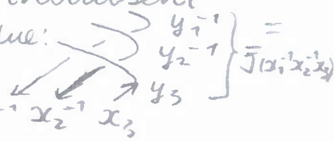
Thm : 1) Les J_n induisent un 1-cocycle bijectif $\boxed{SG_{\mathcal{X},\sigma} \xrightarrow[\sim]{\bar{J}} SG_{\mathcal{X},\sigma'}}$.

$\bar{J}(\bar{x}\,\bar{y}) = \underbrace{\bar{J}(\bar{x})^{\bar{y}}}_{\bar{x}^{\bar{y}}}\,\bar{J}(\bar{y})$



2) Si $(\mathcal{X},\sigma)$ est un birack RI-compatible, alors les $\underbrace{K^{\times n}}\circ\underbrace{J_n}$ induisent un 1-cocycle bijectif $\boxed{G_{\mathcal{X},\sigma} \xrightarrow{\sim} G_{\mathcal{X},\sigma'}}$.

$K(x) = x$, étendue : $K(x^{-1}) = t(x)^{-1}$



Exemples :

S) Pour un rack $(\mathcal{X},\triangleleft)$, on a $\triangleleft_{\sigma_\triangleleft} = \triangleleft$; $\sigma_\triangleleft \overset{J_*}{\longleftrightarrow} \sigma'_\triangleleft$; RI-compat. $\Leftrightarrow x \triangleleft x = x$ $(t(x) = x)$.

C) Pour un cycle set $(\mathcal{X},\bullet)$, $\triangleleft_\sigma$ est triviale, $\sigma \overset{J_*}{\longleftrightarrow}$ flip $(x,y)\mapsto(y,x)$; RI-compat. $\Leftrightarrow$ non-dég. $(t(x) = x\cdot x)$;
$(S)G_{\mathcal{X},\sigma'}$ est le (semi-) gpe ab. libre sur $\mathcal{X}$.

M) Pour un monoïde $(\mathcal{X},\star,1)$, on a $x \triangleleft_{\sigma_\star} y = y$; $\sigma'(x,y) = (x,x)$; $J_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = (x_1\star\ldots\star x_n,\ldots,x_{n-1}\star x_n, x_n)$;
$SG_{\mathcal{X},\sigma_\star} \simeq \mathcal{X}$; $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_1\star\ldots\star x_n$
$SG_{\mathcal{X},\sigma'_\star} \simeq \mathcal{X}$; $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_1$
RI-compat. $\Leftrightarrow \#\mathcal{X} = 1$.

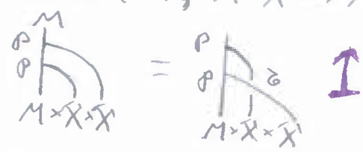
En général, σ' est plus simple que σ.

Rmq : Des cas particuliers (e.g. pour les cycle sets) de certains résultats ci-dessus se trouvent dans Etingof-Schedler-Soloviev '99, Lu-Yan-Zhu '00, Soloviev '00 ; leurs preuves sont souvent techniques et n'utilisent pas d'outils graphiques.

3) Théories (co-)homologiques

Fixons · un tressage (X, σ) ;

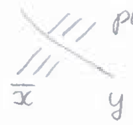
· un (X,σ)-module à droite $(M, M\times X \xrightarrow{\rho} M)$ (ens.)

i.e., on a 

· un (X,σ)-module à gauche $(N, X\times N \xrightarrow{\lambda} N)$

· un gpe abelien A.

Exemples :
1) module trivial : $M = \{*\}$
2) modules adjoints : $M = X^{\times k}$



Posons $\underset{\overset{\shortparallel}{C_k}}{C_k(M,X,N)} = \underbrace{M\times X^{\times k}\times N}_{\text{ensemble}}$, $C_k(M,X,N;A) = \underbrace{A\,M\times X^{\times k}\times N}_{\text{gpe abelien}}$,

Théorie 1

Thm (Carter-Elhamdadi-Saito '04, L.'13) :
On a une structure pré-cubique $(C_k, d^l_{k,i}, d^r_{k,i})$,

où $d^l_i =$  & $d^r_i =$  $: C_k \to C_{k-1}$, $1\le k$, $1\le i\le k$.

pré-cubique : $d^\varepsilon_i d^\zeta_j = d^\zeta_{j-1} d^\varepsilon_i \quad \forall\, i<j,\ \varepsilon,\zeta\in\{l,r\}$.
(i.e., deux structures pré-simpliciales compatibles entre elles)

Crl : $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $\partial^{(\alpha,\beta)}_k = \alpha\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}d^l_{k,i} + \beta\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}d^r_{k,i}$ définissent une différentielle sur $C_k(M,X,N;A)$.

Rmq : La présentation graphique permet d'établir certaines propriétés des théories obtenues, mais le calcul des homologie pour (X,σ) donnés est très compliqué.

Théorie 2

Thm (Fenn-Rourke-Sanderson '92, Ceniceros-Elhamdadi-Green-Nelson '14 : pour les biracks, sans coefficients ; L.-V. '15) :
Si σ est NDG, alors on a une structure pré-cubique $(C_k, \check{d}^l_{k,i}, \check{d}^r_{k,i})$,
où $(m, y_1,\ldots,y_k,n) \overset{\check{d}^l_i}{\longmapsto} (\rho(m, x_i(\bar{y})),\ldots,\widehat{y_i},\ldots,n)$

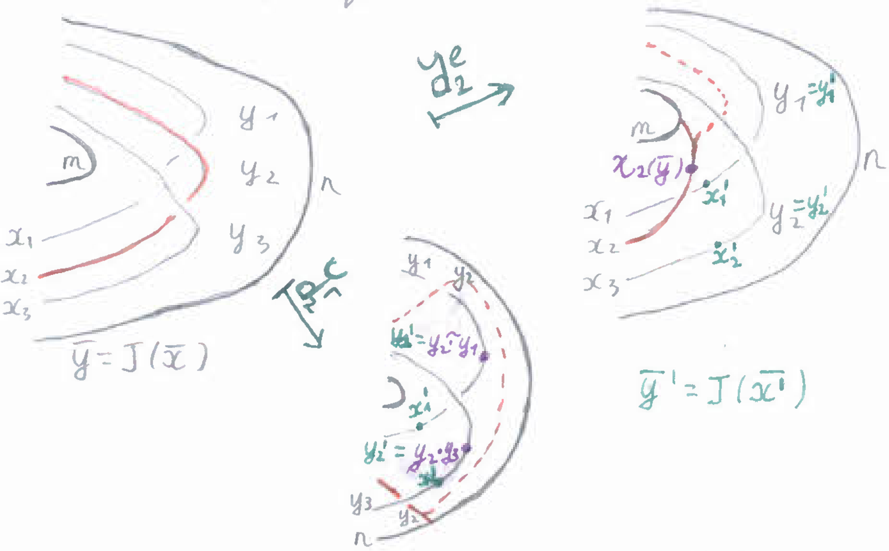
$\overset{\check{d}^r_i}{\longmapsto} (m, y_i\tilde{\cdot}y_1,\ldots,y_i\tilde{\cdot}y_{i-1}, y_i\cdot y_{i+1},\ldots,y_i\cdot y_k, \lambda(y_i,n))$

$x_i : \bar{y} \mapsto x_i \ldots x_{i-1}x_i$
$\bar{x} = J^{-1}(\bar{y})$

Crl : différentielles $\check{\partial}^{(\alpha,\beta)}_k$ sur $C_k(M,X,N;A)$.

Rmq : Une théorie plus adaptée au calcul.

Version graphique :



Thm (L.-V. '15) :
$(C_k, d^l_i, d^r_i) \xrightarrow[\text{iso de str. pré-cubiques}]{Id_M\times J_k\times Id_N} (C_k, \check{d}^l_i, \check{d}^r_i)$.

Crl : $(C_k, \partial^{(\alpha,\beta)}_k) \xrightarrow[\text{iso de c-xes de chaînes}]{\sim} (C_k, \check{\partial}^{(\alpha,\beta)}_k)$

Rmq : Constructions & résultats analogues en cohomologie.

Thm (L.-V. '15) : Si • σ est NDG & faiblement RI-compatible, et
• les applicat^{ns} $M \xrightarrow{\rho(\cdot,x)} M$ admettent toutes des inverses, notées $\hat{\rho}(\cdot,x)$

alors on a une structure cubique oblique (skew cubical) $(C_K, \check{d}^{\ell}_{K,i}, \check{d}^{r}_{K,i}, S_{K,i})$, où

$S_{K;i} : C_K \to C_{K+1}$, $1 \le K$, $1 \le i \le K$ (dégénérescences)

$(m,\bar{y},n) \mapsto (\hat{\rho}(m, t(x_i(\bar{y}))), y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_K, n)$.

• $d^{\varepsilon}_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d^{\varepsilon}_i, & i<j \\ s_j d^{\varepsilon}_{i-1}, & i>j+1 \end{cases}$ $\quad \varepsilon \in \{\ell, r\}$

• $d^r_i s_i = d^r_{i+1} s_i$

• $d^{\ell}_i s_i = d^{\ell}_{i+1} s_i = \mathrm{Id}$

• $s_i s_j = s_{j+1} s_i$, $i \le j$.

(cf. : $[0,1]^K$, $s_i : \bar{x} \mapsto (\ldots, x_i + x_{i+1} - x_i x_{i+1}, \ldots)$

$\delta^{\ell}_i : \bar{x} \mapsto (\ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots)$

$\delta^r_i : \bar{x} \mapsto (\ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots)$

x_i  x_{i+1}

structure cubique classique :

$s_i : \bar{x} \mapsto (\ldots, \widehat{x_i}, \ldots)$ $\quad x_i$  x_{i+1}).

Crl (L.-V. '15) : décomposition de structures cubiques obliques (& de c-xes de chaînes)

$$\boxed{\begin{aligned} C_K &= C^D_K \oplus C^N_K \\ C^D_K &= \sum_{i=1}^{K-1} A\,\mathrm{Im}\, s_i \\ C^N_K &= \mathrm{Im}\, \eta_K \end{aligned}}$$

partie dégénérée $= \sum_{m,\bar{y},n,i} A(m, y_1, \ldots, y_{i-1}, \underline{y_i, y_i}, y_{i+1}, \ldots, n)$

partie normalisée

$\eta_K = (\mathrm{Id} - s_1 \check{d}^{\ell}_2) \ldots (\mathrm{Id} - s_{K-1} \check{d}^{\ell}_K)$

Rmq : Pour les c-xes $(C_K, \check{\partial}^{(\alpha,\beta)}_K)$, on a une décompos^n

$C_K = J^{-1} C^D_K \oplus J^{-1} C^N_K$,

$J^{-1} C^D_K = \sum_{m,\bar{x},n,i} A(m, x_1, \ldots, x_{i-1}, \underline{t(x_i), x_i}, x_{i+1}, \ldots, n)$.

Rmq : Si l'action ρ est triviale ($\rho(m,x) = m$), alors $\eta_K : (m,\bar{y},n) \mapsto (m, y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_K - y_{K-1}, n)$.

Exemples : S) Pour un rack $(X, \triangleleft)$, on a

$d^{\ell}_i : (m,\bar{x},n) \mapsto (m \triangleleft x_i, x_1 \triangleleft x_i, \ldots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \ldots)$

$d^r_i \mapsto (m, \ldots \widehat{x_i} \ldots, \underbrace{(x_i \triangleleft x_{i+1} \ldots x_K) \blacktriangleright n}_{= (\ldots(x_i \triangleleft x_{i+1}) \ldots) \hat{\triangleleft} x_K})$

$\check{d}^{\ell}_i \mapsto (m \triangleleft (x_i \hat{\triangleleft} x_{i+1} \ldots x_K), \ldots \widehat{x_i} \ldots)$

$\check{d}^{r}_i \mapsto (m, x_1 \hat{\triangleleft} x_i, \ldots, x_{i-1} \hat{\triangleleft} x_i, x_{i+1}, \ldots, x_K, x_i \blacktriangleright n)$

$\partial^{(1,0)}_K$: homologie auto-distributive à 1 terme.

$\partial^{(1,-1)}_K$: homologie de rack.

ici $x \mapsto x \hat{\triangleleft} y$ est l'inverse de $x \mapsto x \triangleleft y$

On retrouve des résultats de Przytycki '11.

si en plus $(X, \triangleleft)$ est un quandle, alors on a des dégénérescences

$s_i : (m,\bar{x},n) \mapsto (m \hat{\triangleleft} (x_i \tilde{\triangleleft} x_{i+1} \ldots x_K), \ldots, x_i, x_i, \ldots)$

pour $(C_K, \check{d}^{\ell}_i, \check{d}^{r}_i)$, et l'on retrouve la décomposition $C_K = C^D_K \oplus C^N_K$ de Litherland-Nelson '03 ; $\partial^{(1,-1)}_K|_{C^N_K}$ donnent l'homologie de quandle.

M) Pour un gpe $(X, \star, 1)$, on a

$d^{\ell}_i : (m,\bar{x},n) \mapsto \begin{cases} (\ldots, x_{i-1} \star x_i, \ldots), & i \ge 2 \\ (m \triangleleft x_1, x_2, \ldots), & i = 1 \end{cases}$

$d^r_i \mapsto (m, x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, 1, x_{i+1} \blacktriangleright (\ldots (x_K \blacktriangleright n) \ldots))$

$\check{d}^{\ell}_i \mapsto \begin{cases} (\ldots \widehat{x_i} \ldots), & i \ge 2 \\ ((m \triangleleft x_1) \triangleleft x_2^{-1}, x_3, \ldots), & i = 1. \end{cases}$

$\check{d}^{r}_i \mapsto (m, x_1 \star x_i^{-1}, \ldots, x_{i-1} \star x_i^{-1}, 1, \ldots, 1, x_i \blacktriangleright n)$

$s_i \mapsto (\ldots, x_i, x_i, \ldots)$

On retrouve deux formes du complexe bar.

⚠ Le tressage $\sigma_\star$ est faiblement RI-compatible ($\forall$ monoïde $(X, \star, 1)$) avec $t(x) = 1$.

C) Pour un cycle set $(X, \cdot)$, on obtient une nouvelle théorie homologique (qui encode notamment les extentions de cycle sets).