Théorème de décomposition pour l'homologie cubique oblique

Victoria Lebed,
avec
Leandro Vendramin
11/2015

Plan :

① Zoologie des structures de type cubique.

② Quand le complexe normalisé devient un sous-complexe

exemples :
③ L'homologie des structures auto-distributives
④ L'homologie des cycle-sets
⑤ L'homologie tressé

① Zoologie des structures de type cubique.

Structure pré-cubique dans une catégorie $\mathcal{C}$:

- objets C_K, $K \geq 0$
- m-smes $d_i^+, d_i^- : C_K \to C_{K-1}$, $K \geq 1$, $1 \leq i \leq K$ ← applicat^{ns} bord

t.q. $\underline{d_i^\varepsilon d_j^\xi = d_{j-1}^\xi d_i^\varepsilon}$ $\quad \forall i < j,\ \varepsilon, \xi \in \{+,-\}$ $\qquad$ (1)

Structure cubique oblique faible (skew cubical) :

& m-smes $s_i : C_K \to C_{K+1}$, $K \geq 1$, $1 \leq i \leq K$

↑ dégénérescences

t.q. $\underline{d_i^\varepsilon s_j = s_{j-1} d_i^\varepsilon}$ $\quad \forall i < j,\ \varepsilon \in \{+,-\}$ $\qquad$ (2)

$\underline{d_i^\varepsilon s_j = s_j d_{i-1}^\varepsilon}$ $\quad \forall i > j+1,\ \varepsilon \in \{+,-\}$ $\qquad$ (3)

$\underline{d_i^\varepsilon s_i = d_{i+1}^\varepsilon s_i}$ $\quad \forall i,\ \varepsilon \in \{+,-\}$ $\qquad$ (4)

Structure cubique oblique (semi-forte) :

& $\underline{d_i^\varepsilon s_i = d_{i+1}^\varepsilon s_i = Id}$ $\quad \forall i,\ \varepsilon \in \{+,-\}$ (4*) (resp. $\forall i,\ \varepsilon = +$) (4**)

$\underline{s_i s_j = s_{j+1} s_i}$ $\quad \forall i \leq j$. (5)

Structure cubique : ← notion classique

pré-cubique & $s_i : C_K \to C_{K+1}$, $K \geq 1$, $1 \leq i \leq K+1$

t.q. (2), (3), (5) & $\underline{d_i^\varepsilon s_i = Id}$ $\quad \forall i, \forall \varepsilon$

$\underline{d_{i+1}^\varepsilon s_i = s_i d_i^\varepsilon}$ $\quad \forall i, \forall \varepsilon$

<u>co-exemple</u> : $C^K = [0,1]^K \subset \mathbb{R}^K$

$\delta_i^\pm (x_1, \ldots, x_K) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}, x_i, \ldots, x_K)$

$s_i(x_1, \ldots, x_K) = (\ldots, \widehat{x_i}, \ldots)$ $\qquad \rightsquigarrow$ str. co-cubique classique

x_i 

$s_i(x_1, \ldots, x_K) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \underbrace{x_i + x_{i+1} - x_i x_{i+1}}_{=1-(1-x_i)(1-x_{i+1})}, x_{i+2}, \ldots, x_K)$

x_i  x_{i+1} $\qquad \rightsquigarrow$ str. co-cubique oblique semi-fort

① Quand le complexe normalisé devient un sous-complexe

Thm (L.-V. '15). On travaille dans la catégorie Mod_R.

$\boxed{1}$ Si $(C_K, d_i^\pm)$ est une str. pré-cubique, alors $\forall \alpha, \beta \in R$, on a un complexe de chaînes $(C_K, \partial_K^{(\alpha,\beta)})$, où

$$\partial_K^{(\alpha,\beta)} = \alpha \sum_{i=1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^+ + \beta \sum_{i=1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^-$$

$\boxed{2}$ Si $(C_K, d_i^\pm, s_i)$ est une str. cubique oblique faible, alors $C_K^D = \sum_{i=1}^{K-1} \mathrm{Im}\, s_i$ est un sous-complexe de $(C_K, \partial_K^{(\alpha,\beta)})$.

↑ l'homologie dégénérée

$\boxed{3}$ Si notre str. est en plus semi-forte, alors on a une décompos^n $\boxed{C_K = C_K^D \oplus C_K^N}$ de R-modules, où

$C_K^N = \mathrm{Im}\, \eta_K$ ← l'homologie normalisée

$\eta_K = (\mathrm{Id} - s_1 d_2^+)(\mathrm{Id} - s_2 d_3^+) \cdots (\mathrm{Id} - s_{K-1} d_K^+) : C_K \to C_K$.

Elle fournit une décompos^n du complexe $(C_K, \partial_K^{(\alpha,\beta)})$, $\forall \alpha, \beta \in R$.

Cor: Dans $\boxed{3}$, on a des décompos^{ns} en homologie.

□ $\boxed{3}$ On doit montrer :

(a) $\underbrace{\sum_{i=1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon \eta_K}_{=:A} = \underbrace{\eta_{K-1} \sum_{i=1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon}_{=:B}$, $\varepsilon \in \{+,-\}$.

(b) $C_K = C_K^D \oplus C_K^N$.

(a) $p_i := \mathrm{Id} - s_i d_{i+1}^+$, $\eta_K = p_1 \cdots p_{K-1}$

$(1)-(4) \Rightarrow$ $d_i^\varepsilon p_j = \begin{cases} p_{j-1} d_i^\varepsilon, & i < j \\ p_j d_i^\varepsilon, & i > j+1 \end{cases}$

$(d_i^\varepsilon - d_{i+1}^\varepsilon) p_i = d_i^\varepsilon - d_{i+1}^\varepsilon$

$(4**) \Rightarrow p_i d_{i+1}^\varepsilon p_{i+1} = d_{i+1}^\varepsilon p_{i+1}$.

$B = p_1 \cdots p_{K-2} \sum_{i=1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{K-1} (-1)^{i-1} p_1 \cdots p_{i-1} d_i^\varepsilon p_{i+1} \cdots p_{K-1} + (-1)^{K-1} p_1 \cdots p_{K-2} d_K^\varepsilon$

$\sum_{i=s}^{K} (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon p_s \cdots p_{K-1} = \sum_{i=s+2}^{K} (-1)^{i-1} p_s d_i^\varepsilon p_{s+1} \cdots p_{K-1} + ((-1)^{s-1} d_s^\varepsilon + (-1)^s d_{s+1}^\varepsilon) p_{s+1} \cdots p_{K-1}$

$= (-1)^{s-1} d_s^\varepsilon p_{s+1} \cdots p_{K-1} + p_s \left(\sum_{i=s+1}^{K} (-1)^{i-1} d_i^\varepsilon\right) p_{s+1} \cdots p_{K-1}$

En itérant cet argument, on obtient $A = B$.

(b) Lemme : $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{B} M$, $B\alpha = 0$ & $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-B) \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha \Rightarrow M = \mathrm{Im}\,\alpha \oplus \mathrm{Im}\,B$.

▪ $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-B) \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{Im}\,\alpha + \mathrm{Im}\,B = M$

$B\alpha = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\cup\!\!\mid \\ \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-B)}}{\mathrm{Im}\,\alpha} \subseteq \mathrm{Ker}\,B$ $\Rightarrow B^2 = B \Rightarrow \underset{\substack{\cup\!\!\mid \\ \mathrm{Im}\,\alpha}}{\mathrm{Ker}\,B} \cap \mathrm{Im}\,B = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}\,\alpha \cap \mathrm{Im}\,B = \{0\}$ ▪

Maintenant, (b) découle de

$C_K^D \overset{i_K}{\hookrightarrow} C_K \xrightarrow{\eta_K} C_K$

- $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-\eta_K) \subseteq \Sigma\, \mathrm{Im}\, s_i$ (par déf^n)
- $\eta_K s_i = 0 \Leftarrow$ $p_j s_i = \begin{cases} s_i p_{j-1}, & i<j, \\ 0, & i=j. \end{cases}$

$\boxtimes$

Rmq : Eilenberg-MacLane '53 utilisent les applicat^{ns}

- η_K dans l'homologie simpliciale (pour prouver $C_K \xrightarrow{\text{qu.-iso}} C_K^N$)
- $\eta'_K = (\mathrm{Id} - s_1 d_1^+) \dots (\mathrm{Id} - s_K d_K^+)$ dans l'hom. cubique

Rmq : Pour une str. cubique, C_K^D est un sous-complexe de $(C_K, \partial_K^{(\alpha,B)})$ seulement quand $B = -\alpha$

③ Exemple : homologies des structures auto-distributives.

On considère un ens. S & une opération binaire $\triangleleft$ sur S, et les cond^{ns}

(SD) $(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$,

(R) $a \mapsto a \triangleleft b$ bijective, $\forall b$,

(I) $a \triangleleft a = a$.

Vocabulaire : (SD) $\Rightarrow$ shelf

(SD) + (R) $\Rightarrow$ rack

(SD) + (I) $\Rightarrow$ spindle

(SD) + (R) + (I) $\Rightarrow$ quandle.

Posons $C_k = \mathbb{R}S^{\times k}$

$d_i^{\triangleleft} : (x_1, .., x_k) \mapsto (x_1 \triangleleft x_i, .., x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, .., x_k)$

$d_i^{0} : \qquad \mapsto (.., \widehat{x_i}, ..)$

$s_i : \qquad \mapsto (.., x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, ..)$

Thm : • Pour un shelf, $(C_k, d_i^0, d_i^{\triangleleft})$ est une str. pré-cubique

• Pour un spindle, $(C_k, d_i^0, d_i^{\triangleleft}, s_i)$ ... cubique oblique semi-forte.

⚠ ni forte, ni cubique classique.

Cas particuliers :

• $\partial^{(-1,1)}$: H_k = l'homologie de rack,

H_k^N = l'homologie de quandle,

Litherland-Nelson '03 : $(C_k, \partial) = C_k^D \oplus C_k^N$, $C_k^N = \operatorname{Im} \eta_k$,

$\eta_k : (x_1, .., x_k) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, .., x_k - x_{k-1})$.

• $\partial^{(0,-1)}$: H_k = l'homologie à 1 terme (Przytycki '11)

④ Exemple : homologies des cycle-sets.

Ens. S, op. binaire $\cdot$ sur S, cond^{ns}

(CS1) $(a\cdot b)\cdot(a\cdot c) = (b\cdot a)\cdot(b\cdot c)$ } cycle-set } cycle-set non-dégénéré

(CS2) $a \mapsto b\cdot a$ bij., $\forall b$

(ND) $a \mapsto a\cdot a$ bij.

(Rump '05).

Posons $C_k = RS^{\times k}$

$d_i^\bullet : (x_1, .., x_k) \mapsto (x_i\cdot x_1, .., x_i\cdot x_{i-1}, x_i\cdot x_{i+1}, .., x_i\cdot x_n)$

$d_i^\circ :$ $\mapsto (\ldots \widehat{x_i} \ldots)$

$s_i :$ $\mapsto (\ldots, x_i, x_i, \ldots)$

Thm : Pour un cycle-set, $(C_k, d_i^\circ, d_i, s_i)$ est une str. cubique oblique semi-forte.

⚠ ni forte, ni cubique classique

Rmq : Dans ③ & ④, les constructions homologiques admettent des versions à coefficients (pour lesquelles on a besoin d'un quandle / cycle-set non-dég. respectivement).

⑤ Exemple unificateur : l'homologie tressée.

Thm (L.-V. '15) :

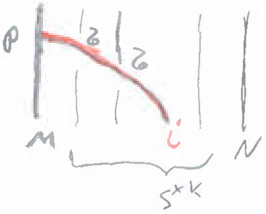
$\boxed{1}$ (S, σ) ensemble tressé, $(M, \rho) \in Mod_{(S,\sigma)}$, $(N, \lambda) \in {}_{(S,\sigma)}Mod$

valable ∀ cat. monoïdale pré-additive — pas néc^{nt} inversible — ens. $M \times S \to M$

t.q.

$\Rightarrow$ $C_k(S; M, N) = M \times S^{\times k} \times N$

$d_i^e =$



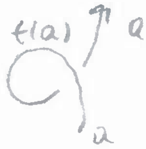
$d_i^r =$

forment une structure pré-cubique.

$\boxed{2}$ Si en plus

- σ est non-dégénérée à gauche

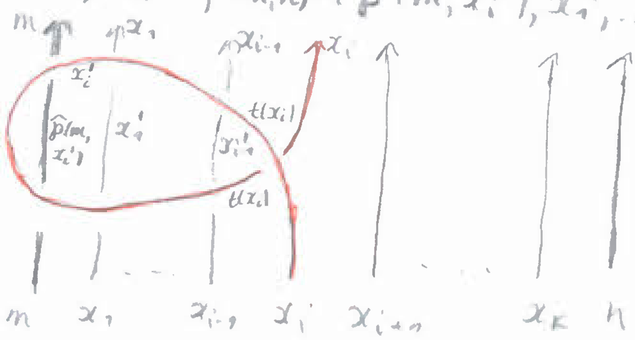
- σ est RI-compatible : $\exists t : S \to S$ t.q. $(t(a), a) \overset{\sigma}{\longmapsto} (t(a), a)$



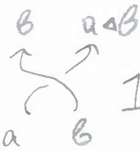
- (M, ρ) est un (S, σ)-module solide : $\rho(\cdot, a)$ sont bijectives (l'inverse est notée $\widetilde{\rho}(\cdot, a)$)

alors notre structure se complète en une structure cubique oblique semi-forte, avec

$s_i(m, x_1, \ldots, x_k, n) = (\widetilde{\rho}(m, x_i^!), x_1', \ldots, x_{i-1}', t(x_i), x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k, n)$



5 ⇒ 3

shelf $(S,\triangleleft) \rightsquigarrow$ ens. tressé $(S, \sigma_\triangleleft$: 

I)

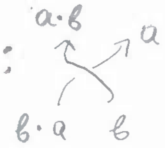
$\sigma_\triangleleft$ est • n.-d. à gauche $\Leftrightarrow$ $(S,\triangleleft)$ est un rack ($\Leftrightarrow \exists\, \sigma_\triangleleft^{-1}$)

• RI- compatible $\Leftrightarrow$ $(S,\triangleleft)$ est un spindle

$\Downarrow$

$t(a)=a$

5 ⇒ 4

Cycle set $(S,\cdot) \rightsquigarrow$ ens. tressé $(S, \sigma_\cdot$: 

)

$\sigma_\cdot$ est • tjrs involutive, n.-d. à gauche & RI- compat.

$\Updownarrow$

$t(a)=a\cdot a$

• n.-d. à droite $\Leftrightarrow$ $(S,\cdot)$ est un cycle-set non-dégénéré.

<u>Rmq</u> : Pour $\sigma_\cdot$, notre théorème donne une structure pré-cubique ou cubique oblique semi-forte isomorphe à celle de Section 4.