Les 2-catégories associées au groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_n)$

buts : (1) introduire une version "catégorifiable" $\dot{U}_{n+1}$ du gpe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ et sa forme entière ${}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}\dot{U}_{n+1}$

(2) présenter la 2-catégorie $\dot{\mathcal{U}}_n$ qui catégorifie ${}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}_{n+1}$, i.e. $\overset{\text{anneau scindé de Grothendieck}}{K_0(\dot{\mathcal{U}}_{n+1})} \simeq {}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}_{n+1}$

(3) définir une forme sémi-linéaire sur $\dot{U}_{n+1}$ et étudier son lien avec la catégorification

notations : • le monde des gpes quantiques : lettre droites (U, E)
• le monde des 2-catégories : lettre rondes ($\mathcal{U}, \mathcal{E}$)

rmq : la construction de $\mathcal{U}$ présentée ici se généralise à une algèbre de Lie semi-simple qcq, mais l'isomorphisme $K_0(\dot{\mathcal{U}}) \simeq {}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}$ n'est pas (encore ?) établi

$\boxed{1}$ Algèbre quantique enveloppante ($=$ QUE) de $\mathfrak{sl}_n$: la version standard et la version de Lusztig

• matrice de Cartan : $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

• on travaille sur le corps k, $car(k)=0$

algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}$:

gén. : $\boxed{E_i, E_{-i}, H_i}$ $1\le i\le n$; $E_i = M_{i,i+1}$, $E_{-i} = M_{i+1,i}$, $H_i = M_{i,i} - M_{i+1,i+1}$

rel. : $[H_i, H_j] = 0$

$[H_i, E_{\pm j}] = \pm a_{ij} E_j$, $1\le i,j\le n$

$[E_i, E_{-j}] = \delta_{ij} H_i$, $1\le i,j\le n$

rel^{ns} de Serre : $\underbrace{[E_i,[E_i,\dots,[E_i,E_j]\dots]]}_{1-a_{ij}\text{ fois}} = 0$, $i\neq j$, $ij>0$

$\xleftarrow{q=1}$ **QUE $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ standard :**

gén. : $\boxed{E_{\pm i}, K_{\pm i}}$ "$=$" $\exp(\pm q H_i)$

rel. : $K_iK_j = K_jK_i$, $1\le |i|,|j| \le n$; $K_iK_{-i} = 1$, $1\le i\le n$

$K_i E_{\pm j} = q^{\pm a_{ij}} E_{\pm j} K_i$, $1\le i,j\le n$

$[E_i, E_{-j}] = \delta_{ij} \dfrac{K_i - K_{-i}}{q-q^{-1}}$, $1\le i,j\le n$

$\sum\limits_{\alpha+\beta = 1-a_{ij}} (-1)^\alpha E_i^{(\alpha)} E_j E_i^{(\beta)} = 0$, $i\neq j$, $ij>0$

$E_i^{(\alpha)} := \dfrac{E_i^\alpha}{[\alpha]!}$, $[\alpha]! = [1]\cdots[\alpha]$, $[n] = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q-q^{-1}}$

$\xrightarrow[K_i 1_{\bar m} = q^{\sum a_{ij} m_j} 1_{\bar m}]{\text{ajouter } 1_{\bar m}}$ **QUE $\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$: version de Lusztig**

gén. $\boxed{E_{\pm i} 1_{\bar m}}$, $1\le i\le n$; $\boxed{1_{\bar m}}$, $\bar m \in \mathbb{Z}^n$

rel. : $1_{\bar n} \cdot 1_{\bar m} = \delta_{\bar n, \bar m} 1_{\bar n}$ $\leftarrow$ idempot. orth.

$E_i \cdot 1_{\bar m} = 1_{\bar m + \varepsilon_i} E_i 1_{\bar m}$, $\bar m\in\mathbb{Z}^n$, $1\le |i|\le n$

où $\varepsilon_{\pm i} = \pm(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$, $1\le i\le n$

$[E_i, E_{-j}] 1_{\bar m} = \delta_{ij} [\bar m_i] \cdot 1_{\bar m}$, $1\le i,j\le n$

$\sum\limits_{\alpha+\beta = 1-a_{ij}} (-1)^\alpha E_i^{(\alpha)} E_j E_i^{(\beta)} 1_{\bar m} = 0$, $i\neq j$, $ij>0$.

idée : V est un U_q-module, $V = \bigoplus\limits_{\bar m\in\mathbb{Z}^n} V_{\bar m}$, $K_i v = q^{\sum a_{ij} m_j} v$, $\forall v\in V_{\bar m}$

$1_{\bar m} := \mathrm{proj}_{V_{\bar m}}$

$\bar m_i := \sum_j a_{ij} m_j$

$\boxed{\text{rmq :}}$ (1) "recollement" de n copies de $\mathfrak{sl}_2$ / $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ / $\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$, "colle" $=$ relation de Serre

(2) forme entière ${}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}U_q(\mathfrak{sl}_2)$, engendrée par $E_i^{(\alpha)}$ et K_i | — " — ${}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ — " — $E_{\pm i}^{(\alpha)} \cdot 1_{\bar m}$ et $1_{\bar m}$

(3) U et $\dot{U}$ possèdent des bases canoniques de Lusztig, avec les propriétés
• d'intégralité et
• de positivité
} c'est nécessaire pour la catégorification !

(4) il y a une "bonne" forme bilinéaire (on en reviendra plus tard)

[2] Généralités sur la catégorification

anneau "idempotenté" $\mathcal{U}=\bigoplus_{\lambda,\beta\in S} 1_\lambda \mathcal{U} 1_\beta$	$1_\lambda \mathcal{U} 1_\beta$	multiplic^n	$k(q)$-algèbre	plus de structure sur $\mathcal{U}$
catégorification ↓ ↑ anneau de Grothendieck	↑	↕	β ↕ B ; $\sum q^n \cdot B, \lambda\in k$ ↕ $\lambda\cdot B\{n\}$ shift	↕
catégorie préadditive $\mathcal{U}$, $Ob(\mathcal{U})=S$	$Hom_{\mathcal{U}}(\lambda, B)$	composition	catégorie graduée k-linéaire	2-catégorie grad. k-lin. $\mathcal{U}$

en particulier, la forme bilinéaire $\langle -,- \rangle$

↑ $gdim(H)=\sum_{t\in\mathbb{Z}} q^t \dim(H_t)$ (dim^n graduée)

$Hom_{\mathcal{U}}: \{1\text{-m.}\}^{*}\times\{1\text{-m.}\} \to Gr\,Vect_k$ (1-morphisme ; espaces vect. gradués)

[3] La 2-catégorie $\mathcal{U}^*_{n+1}$

idée : "recoller" n copies de $\mathcal{U}^*_2$.

définition : $\mathcal{U}^*_{n+1}$ est une 2-cat. graduée, additive k-linéaire

objets : $\overline{m}\in\mathbb{Z}^n$ (avec translation)

1-morphismes : sommes directes des compositions de $1_{\overline{m}}\{s\}\in Hom(\overline{m},\overline{m})$ et $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}\in Hom(\overline{m},\overline{m}+\varepsilon_i)$, $1\le |i|\le n$.

calcul graphique : $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}} = \uparrow_i \overline{m}$ et $\mathcal{E}_{-i}1_{\overline{m}} = \downarrow_i \overline{m}$ pour $i>0$, i.e. points coloriés et munis d'un signe $\pm$.

1-morphisme typique : $\uparrow_i\uparrow_j\downarrow_k \overline{m} \oplus \uparrow_k\uparrow_i\downarrow_j \overline{m} \in Hom(\overline{m}, \overline{m}+\varepsilon_i+\varepsilon_k-\varepsilon_j)$

2-morphismes (2-m.) : combinaisons k-lin. des comp^{ns} (horizontales & verticales) de :

$1_{\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}} = \uparrow_i \overline{m}$, $1_{\mathcal{E}_{-i}1_{\overline{m}}} = \downarrow_i\overline{m}$, $1\le i\le n$; $sh^s_{\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}}$: $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\} \to \mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}$; $sh^{-s}_{\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}}$: $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}} \to \mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}$; $1\le|i|\le n$, $0<s$

deg = $\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{s}$, $\boxed{-s}$

cups et caps, $1\le i\le n$: deg = $1+\frac{1}{2}\overline{m}_j a_{ij}$, $1-\frac{1}{2}\overline{m}_j a_{ij}$, $1+\frac{1}{2}\overline{m}_j a_{ij}$, $1-\frac{1}{2}\overline{m}_j a_{ij}$

$z_{i,\overline{m}}$ = (point sur $\uparrow_i$) $\overline{m}$, deg $\boxed{2}$; $u_{i,j,\overline{m}}$ = (croisement i, j) $\overline{m}$, $i,j>0$, deg $\boxed{-a_{ij}}$

interprétation graphique : diagrammes n-coloriés

rmq : un brin non-orienté représente deux 2-morphismes, un pour chaque orientation.

→ réalise le "recollement" de 2 copies de $\mathcal{U}^*_2$

On choisit les structures évidentes de composition et d'identité, et on quotiente par les relations locales, qui préservent le degré :

(1) $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}} \simeq \mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}$ via $sh^{\pm s}_{\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}}$, $\forall s\in\mathbb{Z}$, $1\le|i|\le n$

(2) $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}$ et $\mathcal{E}_{-i}1_{\overline{m}+\varepsilon_i}\{-s\}$ sont biadjoints via (cups et caps), $1\le|i|\le n$

• $z_{i,\overline{m}} = {}^*z_{i,\overline{m}} = z^*_{-i,\overline{m}}$; $u_{i,j,\overline{m}} = {}^*u_{i,j,\overline{m}} = u^*_{i,j,\overline{m}}$

interprétation graphique : (zigzags) = identités

corollaires : (1) tout 1-m. a un biadjoint et tout 2-m. est cyclique (2) déformations topologiques d'un diagramme ne changent pas le 2-m. présenté

(3) relations NilHecke :

• (double croisement i, j) $= \begin{cases} 0, & i=j \\ \uparrow_i\uparrow_j, & a_{ij}=0 \\ (\text{point sur } i) + (\text{point sur } j), & a_{ij}<0 \end{cases}$

• (triple croisement i,j,k) − (triple croisement i,j,k) $= \begin{cases} \uparrow_i\uparrow_j\uparrow_k, & \text{si } i=k \,\&\, a_{ij}=-1 \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$

• (croisement, point en bas à gauche) − (croisement, point en haut à droite) = (croisement, point en haut à gauche) − (croisement, point en bas à droite) $= \delta_{ij}\, \uparrow_i\uparrow_j$

relations de "recollement" de 2 copies de $\mathcal{U}^*_2$

rmq : $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}) \le \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ - ss-algèbre engendrée par $1_{\overline{m}}$ et $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}$, $i>0$

↕

$\mathcal{U}^+_{n+1}\le\mathcal{U}^*_{n+1}$ - ss-catégorie, • Ob $=\mathbb{Z}^n$ • 1-m. $=\bigoplus$ des comp^{ns} de $1_{\overline{m}}\{s\}$ et $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}$, $i>0$ • 2-m. $=$ comp^{ns} de $1_{\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}}$, $z_{i,\overline{m}}$, $u_{i,j,\overline{m}}$, $i,j>0$, modulo NilHecke

↕

(tresses) $\le$ (enchevêtrements)

(4) positivité des bulles : (bulle i, sens horaire, ℓ points) $\overline{m} = 0$ si $\ell < \sum_j m_j a_{ij} - 1$

$\tilde{m}_i := \sum_j a_{ij} m_j$; deg $= 2(1-\frac{1}{2}\sum_j m_j a_{ij} + \ell)$

(bulle i, sens antihoraire, ℓ points) $\overline{m} = 0$ si $\ell < -\sum_j m_j a_{ij} - 1$

rmq : on définit les "fausses bulles" (bulle i)$^{\overline{m}}_{\tilde{m}_i-1+\ell}$, $\ell<0$ et (bulle i)$^{\overline{m}}_{-\tilde{m}_i-1+\ell}$, $\ell<0$ par récurrence via la rel^n infinie de Grassmann :

$\left((\text{bulle})^{\overline{m}}_{-\tilde{m}_i-1} + (\text{bulle})^{\overline{m}}_{-\tilde{m}_i} t + \dots + (\text{bulle})^{\overline{m}}_{-\tilde{m}_i+\ell} t^\ell + \dots \right)\left((\text{bulle})^{\overline{m}}_{\tilde{m}_i-1} + \dots + (\text{bulle})^{\overline{m}}_{\tilde{m}_i-1+\ell} t^\ell + \dots \right) = 1$

(5) réduction aux bulles : (boucle à droite sur $\uparrow_i$) $\overline{m} = -\sum_{f+g=-\tilde{m}_i} (\uparrow_i$ avec f points$)$ (bulle)$^{\overline{m}}_{-\tilde{m}_i-1+g}$ et (boucle à gauche sur $\uparrow_i$) $\overline{m} = \sum_{f+g=\tilde{m}_i}$ (bulle)$_{-\tilde{m}_i-1+g}$ ($\uparrow_i$ avec f points) $\overline{m}$

(6) décomposition de $\mathcal{E}_i\mathcal{E}_{-i}$:

$\uparrow_i\downarrow_i\overline{m} = -$ (double croisement) $\overline{m} + \sum_{\ell=0}^{\tilde{m}_i-1}\sum_{j=0}^{\ell}$ (cap avec $\tilde{m}_i-1-\ell$ points) (bulle)$_{-\tilde{m}_i-1+j}$ (cup avec $\ell-j$ points) $\overline{m}$

et $\downarrow_i\uparrow_i\overline{m} = -$ (double croisement) $\overline{m} + \sum_{\ell=0}^{-\tilde{m}_i-1}\sum_{j=0}^{\ell}$ (cap avec $-\tilde{m}_i-1-\ell$ points) (bulle)$_{\tilde{m}_i-1+j}$ (cup avec $\ell-j$ points) $\overline{m}$

cré : rel^n de commutation entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_{-i}$

(7) (double croisement i, j) $= \uparrow_i\downarrow_j\overline{m}$ et (double croisement j, i) $\overline{m} = \downarrow_j\uparrow_i\overline{m}$, $i\ne j$

$\boxed{4}$ Rectification de $\mathcal{U}^*_{n+1}$

(α) **pb**: $\mathcal{E}_i 1_{\overline{m}} \simeq \mathcal{E}_i 1_{\overline{m}}\{s\}$ dans $\mathcal{U}^*_{n+1}$

or $E_i 1_{\overline{m}} \neq q^s E_i 1_{\overline{m}}$ dans $\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$!

solution: $\widetilde{\mathcal{U}}_{n+1}(x,y) := (\mathcal{U}^*_{n+1})_0(x,y)$ $\qquad \mathcal{U}^*_{n+1}(x,y) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{U}}_{n+1}(x\{s\},y)$

les 2-m. qui préservent le degré

(β) **pb**: on veut un système d'indécomposables $\dot{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{U}_{n+1}$ qui donnerait une bonne base $\dot{\mathbb{B}}$ de $\dot{U}$
- on veut catégorifier $E_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}}$, avec $E_i^\alpha 1_{\overline{m}} = [\alpha]!\, E_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}}$.

→ intégralité
→ positivité

solution: $\dot{\mathcal{U}}_{n+1}(x,y) := \mathrm{Kar}(\widetilde{\mathcal{U}}_{n+1}(x,y))$ - l'enveloppe de Karoubi

[on scinde les idempotents]

On choisit des idempotents dans $\mathrm{End}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}_i^\alpha 1_{\overline{m}})$:

$e^\alpha_{i;\overline{m}} := (\mathrm{signe}(i))^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} z_{\alpha-1} z_{\alpha-2}^2 \cdots z_1^{\alpha-1} u_{\alpha-1} u_{\alpha-2} u_{\alpha-1} \cdots u_1 u_2 \cdots u_{\alpha-1}$

$1\leq |i| \leq n$

ex: $e^3_{i;\overline{m}} =$  $\overline{m}$

$e^3_{-i} 1_{\overline{m}} = -$  $\overline{m}$

où u_t signifie $u_{i,i;\overline{m}'}$ appliquée aux facteurs t et $t+1$ de $\mathcal{E}_i^\alpha 1_{\overline{m}}$,

z_t signifie $z_{i;\overline{m}'}$ appliquée au facteur t de $\mathcal{E}_i^\alpha 1_{\overline{m}}$,

et $\overline{m}'$ s'exprime en fonction de $\overline{m}$ d'une manière évidente.

On pose $\mathcal{E}_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}} := (\mathcal{E}_i^\alpha 1_{\overline{m}}, e^\alpha_{i;\overline{m}})\{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}}_{n+1}(\overline{m}, \overline{m}+\alpha\varepsilon_i))$,

et l'on vérifie $\mathcal{E}_i^\alpha 1_{\overline{m}} = (\mathcal{E}_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}})^{\oplus[\alpha]!}$,

où pour un 1-m. $\mathcal{E}$ de $\dot{\mathcal{U}}_{n+1}$ et pour un polynôme de Laurent $f(x) = \sum_{j\geq \ell}^{\ell} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}^{\oplus f(q)} := \bigoplus_{j\geq\ell}^{\ell} (\mathcal{E}\{j\})^{\oplus a_j}$.

$\boxed{5}$ Théorème principal (Khovanov, Lauda):

La 2-catégorie $\dot{\mathcal{U}}_{n+1}$ catégorifie l'algèbre de Lusztig ${}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$; plus précisément,

$K_0(\dot{\mathcal{U}}) \simeq_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]} \dot{U}$ $\qquad$ [c.f. paragraphe $\boxed{2}$] $\quad$ - isomorphisme de $\mathbb{Z}[q^{\pm1}]$-algèbres

$\mathcal{E}_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}} \longleftrightarrow E_i^{(\alpha)} 1_{\overline{m}}$

$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}}(\cdot,\cdot) \xrightarrow{\mathrm{gdim}} \langle\cdot,\cdot\rangle$

symétries du calcul graphique $\longleftrightarrow$ (anti-) homomorphismes intéressants

$\dot{\mathcal{U}} \circlearrowright$ cohomologie des variétés des drapeaux itérés $\longleftrightarrow$ représentations irréductibles de $\dot{U}$ $\Big\}$ un ingrédient important de la preuve du théorème

la base $\dot{\mathcal{B}}$ $\xleftrightarrow[\text{vrai pour } \mathfrak{sl}_2]{?}$ la base canonique de Lusztig

6 Interprétation graphique de la forme semi-linéaire sur $\dot{U}_q(sl_n)$

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \dot{U}\times\dot{U}\to k(q)$
$\;{}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}^{\times}{}_{\mathbb{Z}[q^{\pm1}]}\dot{U}\to \mathbb{Z}[[q^{\pm1}]]$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(1) k-semi-linéaire : $\langle f(q)x, g(q)y\rangle = f(q^{-1})g(q)\langle x,y\rangle$ $\forall f,g$-polynômes de Laurent en q

(2) propriété "Hom" : $\langle 1_{\overline{n}}x1_{\overline{m}}, 1_{\overline{n}'}y1_{\overline{m}'}\rangle = 0$ si $\overline{n}\neq\overline{n}'$ ou $\overline{m}\neq\overline{m}'$

(3) adjonction : $\langle ux, y\rangle = \langle x, \tau(u)y\rangle$ $\forall x,y,u\in\dot{U}$

rotation : $E_{\overline{i}} := E_{i_1}E_{i_2}\dots E_{i_p}$ pour $\overline{i}=(i_1,i_2,\dots,i_p)$;
$\overline{i}>0 \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} i_s>0\ \forall s$

- $\tau : \dot{U}\xrightarrow{\sim}\dot{U}^{op}$, $k(q)$-antilinéaire, défini par $\tau(1_{\overline{m}})=1_{\overline{m}}$, $\tau(E_i1_{\overline{m}}) = q^{-1-\Sigma a_{ij}m_j}E_{-i}1_{\overline{m}+\varepsilon_i}$

(4) symétrique : $\langle E_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, E_{\overline{j}}1_{\overline{m}}\rangle = \langle E_{\overline{j}}1_{\overline{m}}, E_{\overline{i}}1_{\overline{m}}\rangle$

(5) normalisation : $\langle 1_{\overline{m}}, 1_{\overline{m}}\rangle = 1$

(6) propriété grassmannienne : $\langle E_i1_{\overline{m}}, E_j1_{\overline{m}}\rangle = \delta_{ij}(1-q^2)^{-1}$

(7) propriété de Hopf : $\langle E_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, E_{\overline{j}}E_{\overline{k}}1_{\overline{m}}\rangle = \langle\Delta(E_{\overline{i}})(1_{\overline{m}}\otimes 1_{\overline{m}}), E_{\overline{j}}1_{\overline{m}}\otimes E_{\overline{k}}1_{\overline{m}}\rangle$; $\overline{i},\overline{j},\overline{k}>0$,

- $\Delta : \dot{U}^+\to(\dot{U}^+\tilde{\otimes}\dot{U}^+$, avec $(E_{\overline{i}}\tilde{\otimes}E_{\overline{j}})\cdot(E_{\overline{k}}\tilde{\otimes}E_{\overline{\ell}}) = q^{-\sum_{\alpha,\beta} a_{j_\alpha k_\beta}}E_{\overline{i}\overline{k}}\tilde{\otimes}E_{\overline{j}\overline{\ell}}$) est l'isomorphisme d'algèbre donné par $\Delta(E_i)=E_i\otimes1+1\otimes E_i$

Prop. : $\exists!$ forme sur $\dot{U}$ qui satisfait (1)-(7) ;
elle est en plus non-dégénérée.

Dans le cas sl_2, on a vu comment $\langle,\rangle$ donne l'intuition pour construire $\dot{U}$.
Inversement, montrons comment une sous-catégorie de $\mathcal{U}^*$ permet de calculer $\langle,\rangle$ graphiquement.

$\mathcal{D}(\overline{i},\overline{j}) := \{(\overline{i},\overline{j})$-diagrammes coloriés orientés minimaux$\}$, c.f. le dessin
↦ sans auto-intersection
↳ avec au plus une intersection des deux brins

$\mathcal{D}' := \mathcal{D}/$isotopie

rmq : $\mathcal{D}'(\overline{i},\overline{j}) \overset{bij}{\longleftrightarrow}\{(\overline{i},\overline{j})$-couplages$\}$

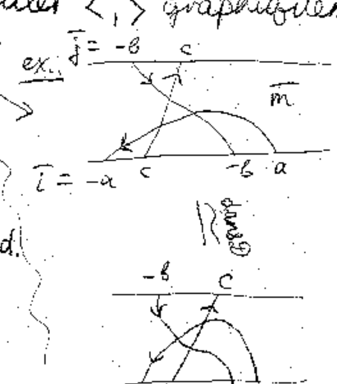
$(d\in\mathcal{D}(\overline{i},\overline{j}), \overline{m}\in\mathbb{Z}^n)\mapsto d_{\overline{m}}\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{E}_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, \mathcal{E}_{\overline{j}}1_{\overline{m}})$

Prop. : $d\sim d'$ dans $\mathcal{D}(\overline{i},\overline{j}) \Rightarrow \deg(d_{\overline{m}}) = \deg(d'_{\overline{m}}) =: \deg(d',\overline{m})$, où $d'\in\mathcal{D}'$ est la classe de d.

Prop. : $\langle E_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, E_{\overline{j}}1_{\overline{m}}\rangle = (1-q^2)^{-\frac{|\overline{i}|+|\overline{j}|}{2}}\cdot\sum_{d'\in\mathcal{D}'(\overline{i},\overline{j})} q^{\deg(d',\overline{m})}$

idée de la preuve : récurrence ; utiliser :
$\deg(\underset{i\ \ j}{\times}) = 0$, $\forall 1\leq i,j\leq n$; $\deg(\underset{i\ \ j}{\times}) = 0$ si $a_{ij}=0$

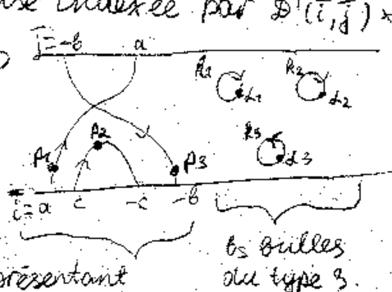
Cl. : on en déduit une définition combinatoire de $\dot{U}$.



7 Description de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*_{n}}(\mathcal{E}_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, \mathcal{E}_{\overline{j}}1_{\overline{m}})$.

Prop. : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*_{n}}(\mathcal{E}_{\overline{i}}1_{\overline{m}}, \mathcal{E}_{\overline{j}}1_{\overline{m}})$ a une base indexée par $\mathcal{D}'(\overline{i},\overline{j})\times\mathbb{N}^{\frac{|\overline{i}|+|\overline{j}|}{2}}\times\mathbb{N}^{B^+}$ (fini), où $B^+ := \{$bulles de deg $>0\}$,

$d'\times(p_1,\dots,p_{\frac{|\overline{i}|+|\overline{j}|}{2}})\times(b_1,b_2,\dots)\longmapsto$



idée de la preuve :
montrer que ces 2-morphismes agissent sur la cohomologie des variétés des drapeaux itérés linéairement indépendamment

rmq : pour une algèbre de Lie semi-simple quelconque, l'indépendance linéaire de ces 2-m. permettrait d'établir l'analogue de notre théorème principal