Un enchevêtrement de structures algébriques

Victoria LEBED
23/01/13

Plan :

1. Algèbres de Leibniz
2. Cogèbre de battage quantique
3. Homologie tressée
4. structure de Leibniz en termes de tressages
5. Hyper-bord de Loday
6. Systèmes tressés

1) Algèbres de Leibniz

Algèbre de Leibniz $\overset{\text{déf}}{:}$ $V \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$, $[\,]: V\otimes V \to V$ t.q.

$$\boxed{[v,[w,u]] = [[v,w],u] - [[v,u],w]} \quad \forall\, u,v,w \in V \qquad \text{(Lei)}$$

Rmq : La déf^n est valable dans une catégorie symétrique pré-additive qcq.

Ex. : (1) + antisymétrie = algèbre de Lie

(2) $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$: 4 str. de Leibniz dont 2 sont de Lie

e.g. $[e,e]=[f,f]=[f,e]=0$, $[e,f]=e$

(3) A : AAU (alg. ass. unitaire), $D \in \mathrm{End}(A)$, $D(a\,D(b)) = D(a)D(b) = D(D(a)\,b) \Rightarrow [x,y]_D := x\cdot D(y) - D(y)\cdot x$ est un crochet de Leibniz

(a) D : morphisme d'alg. & $D^2=0$

(b) D : dérivation & $D^2=0$

(c) A est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, $D(x)=x_+$.

Module de Leibniz sur $(V,[\,])$ $\overset{\text{déf}}{:}$ $M \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$, $[\,]: M\otimes V \to M$ t.q. (Lei) est vraie $\forall\, v \in M$, $w,u \in V$.

Complexe de Leibniz : $C_\cdot(V,M) = M\otimes T(V)$, $\boxed{d_{Lei}(\underset{\in M}{v_0}\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = \sum_{0\le i<j\le n} (-1)^j\, v_0\otimes\cdots\otimes \underset{i}{[v_i,v_j]}\otimes\cdots\otimes \hat{v_j}\otimes\cdots\otimes v_n}$

Prop. : Pour une algèbre de Lie V, d_{Lei} induit la différentielle de Chevalley-Eilenberg sur $M\otimes\Lambda(V)$.

Historique :

- D-algèbres de A. Bloh, '65
- Loday, Cuvier, ~'90
- Kinyon ('07), Covez ('10) : pb de coquecigrue

Mon but : Une explication conceptuelle de la déf^n de d_{Lei}.

② Cogèbre de battage quantique

E.v. tressé $\overset{\text{déf}}{:}$ $V \in \mathrm{Vect}_k$, $\sigma \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ t.q. $\{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\}$ (YB)

$\sigma_1 = \sigma \otimes \mathrm{Id}_V$, $\sigma_2 = \mathrm{Id}_V \otimes \sigma \in \mathrm{End}(V^{\otimes 3})$

Rmq: • on ne demande pas $\exists\, \sigma^{-1}$

• on pourrait travailler dans une cat. monoïdale qcq.

(YB) $\Rightarrow$ $B_n^+ \xrightarrow{\rho_\sigma} \mathrm{End}(V^{\otimes n})$
$\sigma_i \longmapsto \mathrm{Id}^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-i-1)}$

& $S_n \overset{i}{\hookrightarrow} B_n^+$
$s = \underbrace{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}}_{\text{une écriture minimale des}} \mapsto \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$

⚠ i n'est pas un morphisme de monoïdes

Notation: $\forall s \in S_n$, $T_s^\sigma := \rho_\sigma \circ i(s) \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$

Ensembles de battage $\overset{\text{déf}}{:}$ $Sh_{p,q} := \left\{ s \in S_{p+q} \;\middle|\; \begin{matrix} s(1) < \dots < s(p) \\ s(p+1) < \dots < s(p+q) \end{matrix} \right\}$

Coproduit de battage quantique pour un e.v. tressé (V, σ):

$\overline{\sqcup\!\sqcup}_\sigma := \sum \overline{\sqcup\!\sqcup}_\sigma^{p,q}$, où $\overline{\sqcup\!\sqcup}_\sigma^{p,q} := \sum_{s \in Sh_{p,q}} T_{s^{-1}}^\sigma : V^{\otimes(p+q)} \to V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$

Th. (Rosso): $(T(V), \cdot = \text{concaténat}^n, 1, \overline{\sqcup\!\sqcup}_\sigma, \varepsilon: \begin{matrix} v \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{matrix}, S|_{V^{\otimes n}} = (-1)^n T^\sigma_{(n,\dots,1)})$ est une algèbre de Hopf tressée

ε

③ Homologie tressée

Module tressé sur (V, σ) à droite $\overset{\text{déf}}{:}$ $M \in \mathrm{Vect}_k$, $p: M \otimes V \to M$, t.q.

$\boxed{p \circ p_1 = p \circ p_1 \circ \sigma_2} : M \otimes V \otimes V \to M$ Rmq: $\Leftrightarrow p \circ p_1 \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \underbrace{\overline{\sqcup\!\sqcup}^{1,1}_{-\sigma}}_{= \mathrm{Id} - \sigma}) = 0$.

Th.: • e.v. tressé (V, σ)
• mod. tr. à droite (M, p)
• – " – gauche (N, λ) } sur (V, σ)

$\Rightarrow$ on a un bicomplexe $(M \otimes T(V) \otimes N, {}^p d, d^\lambda)$, où ${}^p d_n = p_1 \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \overline{\sqcup\!\sqcup}^{1,n-1}_{-\sigma} \otimes \mathrm{Id}_N)$,

$d^\lambda_n = (-1)^{n-1} \lambda_{n+1} \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \overline{\sqcup\!\sqcup}^{n-1,1}_{-\sigma} \otimes \mathrm{Id}_N)$.

◇ ${}^p d \circ {}^p d = p_1 \circ p_1 \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \overline{\sqcup\!\sqcup}^{1,n-2}_{-\sigma}) \circ \overline{\sqcup\!\sqcup}^{1,n-1}_{-\sigma} \underset{\substack{\text{coass-té} \\ \text{de } \overline{\sqcup\!\sqcup}}}{=} \underbrace{p_1 \circ p_1 \circ (\overline{\sqcup\!\sqcup}^{1,1}_{-\sigma}}_{= 0 \text{ (c.f. la rmq)}} \otimes \mathrm{Id}_V^{\otimes n-2}) \circ \overline{\sqcup\!\sqcup}^{n,n-2}_{-\sigma}$ ◇

Rmq: (1) On peut préciser la structure sur $M \otimes T(V) \otimes N$
→ str. pré-bisimpliciale
→ $\hat{m}$ faiblement bisimpliciale si V est munie d'une "bonne" comult^n Δ
→ opérations sur les bicomplexes
(2) Interprétation graphique (graphes trivalents).
(3) Fonctorialité.

④ Tressages « structurels »

structure algébrique $\overset{\text{cas par}}{\underset{\text{cas}}{\rightsquigarrow}}$ tressage $\overset{\text{Th.}}{\longmapsto}$ complexe différentiel

Ex. : (1) e.v. V $\rightsquigarrow \sigma(v\otimes w) = w\otimes v \longmapsto$ Koszul
(flip)

(2) AAU $(V, \cdot, 1)$ $\rightsquigarrow \sigma_{Ass}(v\otimes w) = 1\otimes v\cdot w \longmapsto$ bar, Hochschild

(3) ALU $(V, [\,], 1)$ $\rightsquigarrow \sigma_{Lei}(v\otimes w) = w\otimes v + 1\otimes [v,w] \longmapsto$ Leibniz
algèbre de Leibniz unitaire; $[\cdot,1] = [1,\cdot] = 0$

(4) ensemble auto-distributif $(S, \triangleleft)$, $\rightsquigarrow \sigma_{AD}((a,b)) = (b, a\triangleleft b) \longmapsto$ complexes AD

plus précisément,

Prop. : * $\mathrm{Lei}_{k} \underset{\text{pleinement fidèle}}{\overset{\text{foncteur}}{\hookrightarrow}} \mathrm{Tr}^{\bullet}_{k}$

Lei_k = la cat. des k-ALU; $\mathrm{Tr}^{\bullet}_k$ = la cat. des k-e.v. tressés avec un élément préféré

$(V, [\,], 1) \longmapsto (V, \sigma_{Lei}, 1)$

$f \longmapsto f$

* (Lei) pour $[\,]$ $\overset{}{\underset{1 \text{ est central pour } [\,]}{\Longleftrightarrow}}$ (YB) pour σ_{Lei}

* $\boxed{\mathrm{Mod}_{(V,[\,],1)} \simeq \mathrm{Mod}_{(V,\sigma_{Lei},1)}}$

* $\boxed{d_{Lei} = \mathcal{P}d}$

* Si $V = V' \oplus k1$, où V' est une sous-algèbre de Leibniz de V, alors
$\Delta : \begin{cases} v \mapsto v\otimes 1 + 1\otimes v \quad \forall v \in V' \\ 1 \mapsto 1\otimes 1 \end{cases}$ est une "bonne" comultiplication.

Rmq : Des résultats analogues ont lieu pour AAU & σ_{Ass}.

⑤ Hyper-bord de Loday

$^{P}d_n^{(k)} := \underbrace{p_1 \circ \cdots \circ p_1}_{k} \circ (Id_M \otimes \underset{-\sigma}{\coprod}^{k,n-k} \otimes Id_N) : M \otimes V^{\otimes n} \otimes N \to M \otimes V^{\otimes (n-k)} \otimes N$

But : comprendre $^{P}d_{n-m}^{(k)} \circ {}^{P}d_n^{(m)}$.

Ex : $^{P}d_n^{(1)} = {}^{P}d_n \Rightarrow {}^{P}d_n^{(1)} \circ {}^{P}d_n^{(1)} = 0$.

Th. : $\boxed{^{P}d^{(k)} \circ {}^{P}d^{(m)} = \binom{k+m}{k}_{-1} {}^{P}d^{(m+k)}}$, où $\binom{k+m}{k}_{-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } mk \text{ est impair}, \\ \binom{E[\frac{m+k}{2}]}{E[\frac{m}{2}]} \text{ sinon}. \end{cases}$

⑥ Systèmes tressés

Système tressé : $\overset{\text{déf}}{}$ $V_1, \ldots, V_k \in Vect_k$; $\sigma_{ij} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i$ $\forall \underline{i \leq k}$; (YB) sur $V_i \otimes V_j \otimes V_k$ $\underline{\forall i \leq j \leq k}$

Rmq : un tressage
→ positif
→ local
→ partiel

Module multi-tressé.

⇓ Une généralisation de la théorie homologique tressée.

Ex : (1) $(V, \underbrace{\overbrace{\cdot, [\,]}^{AAU}, 1}_{ALU})$ – « algèbre de Poisson non-commutative »

$[u \cdot v, w] = u \cdot [v, w] + [u, w] \cdot v$

$\rightsquigarrow (V, V ; \sigma_{11} = \sigma_{Ass}, \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{Lie})$

(2) H : bigèbre, $\dim_k H < \infty$ $\rightsquigarrow (H, H^* ; \sigma_{11} = \sigma_{Ass}, \sigma_{22} = \sigma_{Ass}, \underset{\overline{H}_{Bi}}{\overset{!!}{\sigma_{12}}}) \mapsto$ c-xe de Gerstenhaber-Schack

$Mod_{\overline{H}_{Bi}} \simeq \underset{\text{modules de Hopf}}{\underset{\uparrow}{Mod_H^H}}$

(3) bimodules de Hopf

(4) modules de Yetter-Drinfel'd

(5) produits smash