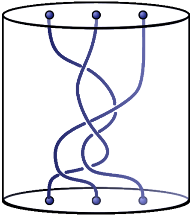
Tables de Laver : aspects ensemblistes, algébriques et topologiques

Victoria LEBED (Université de Nantes)

Caen, 25 novembre 2014

$0, 1, 2, 3, \ldots;$
$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots;$
$\aleph_\omega, \ldots$

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8



Origines ensemblistes
et mystères combinatoires

Définitions de base

Un shelf (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \qquad \text{(AD)}$$

Exemples :

❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;

❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;

❀ $a \triangleright b = f(b), \quad f : S \to S$;

Définitions de base

Un shelf (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \qquad \text{(AD)}$$

Exemples :

- ❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;
- ❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;
- ❀ $a \triangleright b = f(b)$, $\quad f : S \to S$;

❀ $\mathcal{F}_1$ est le shelf libre engendré par un seul élément γ ;

Définitions de base

Un shelf (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \qquad \text{(AD)}$$

Exemples :
- ❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;
- ❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;
- ❀ $a \triangleright b = f(b)$, $\quad f : S \to S$;

❀ $\mathcal{F}_1$ est le shelf libre engendré par un seul élément γ ;

❀ **table de Laver** A_n est l'unique shelf $(\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}, \triangleright)$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n} \qquad \text{(Init)}$$

Définitions de base

Un **shelf** (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \qquad \text{(AD)}$$

Exemples : ❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;
❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;
❀ $a \triangleright b = f(b)$, $\quad f : S \to S$;

❀ $\mathcal{F}_1$ est le shelf libre engendré par un seul élément γ ;

❀ **table de Laver** A_n est l'unique shelf $(\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}, \triangleright)$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n} \qquad \text{(Init)}$$

Théorème (Laver, '95) : (AD) et (Init) définissent $\triangleright$.

⚠ Faux pour $\{1, 2, 3, \ldots, q\}$ avec $q \neq 2^n$.

Définitions de base

Un shelf (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \tag{AD}$$

Exemples :

- ❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;
- ❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;
- ❀ $a \triangleright b = f(b)$, $\quad f : S \to S$;

❀ $\mathcal{F}_1$ est le shelf libre engendré par un seul élément γ ;

❀ **table de Laver** A_n est l'unique shelf $(\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}, \triangleright)$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n} \tag{Init}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma & (\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma & \\ \gamma \triangleright \gamma & ((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \triangleright \gamma & \ldots \end{array}$$

Définitions de base

Un shelf (= une structure auto-distributive = LD-système)

est un ensemble S muni d'une opération $\triangleright$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)} \qquad \text{(AD)}$$

Exemples :

❀ groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$;
❀ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$;
❀ $a \triangleright b = f(b)$, $\quad f : S \to S$;

❀ $\mathcal{F}_1$ est le shelf libre engendré par un seul élément γ ;

❀ **table de Laver** A_n est l'unique shelf $(\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}, \triangleright)$ t.q.

$$\boxed{a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n} \qquad \text{(Init)}$$

$$\gamma = 1 \qquad\qquad (\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma = 3$$

$$\gamma \triangleright \gamma = 2 \qquad\qquad ((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \triangleright \gamma = 4 \qquad \ldots$$

Tables de Laver dans la théorie des ensembles

Richard Laver

Ensembles $\longrightarrow$ Shelf libre $\mathcal{F}_1$

❀ $\mathcal{F}_1$ est réalisé dans le shelf des auto-plongements d'un grand cardinal :

$$\mathcal{F}_1 \cong F \subseteq \mathrm{Emb}(V_\lambda).$$

Tables de Laver dans la théorie des ensembles

Richard Laver

Ensembles

$$
\begin{array}{ccc}
 & \textbf{Ensembles} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{Tables de Laver } A_n & & \text{Shelf libre } \mathcal{F}_1
\end{array}
$$

❀ $\mathcal{F}_1$ est réalisé dans le shelf des auto-plongements d'un grand cardinal :

$$\mathcal{F}_1 \cong F \subseteq \mathrm{Emb}(V_\lambda).$$

❀ F a des quotients de taille 2^n. $\leadsto$ Tables de Laver !

Tables de Laver dans la théorie des ensembles

Richard Laver

$$\begin{tikzcd} & \textbf{Ensembles} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Tables de Laver } A_n \arrow[rr, "\text{approximation}"] & & \text{Shelf libre } \mathcal{F}_1 \end{tikzcd}$$

❀ $\mathcal{F}_1$ est réalisé dans le shelf des auto-plongements d'un grand cardinal :

$$\mathcal{F}_1 \cong F \subseteq \mathrm{Emb}(V_\lambda).$$

❀ F a des quotients de taille 2^n. $\rightsquigarrow$ Tables de Laver !

❀ $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \mathcal{F}_1$ $\rightsquigarrow$ A_n sont des approximations finies de $\mathcal{F}_1$.

Tables de Laver dans la théorie des ensembles

Richard Laver

$$\begin{tikzcd} & \textbf{Ensembles} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ \text{Tables de Laver } A_n \arrow[rr, dotted, "\text{approximation}"] & & \text{Shelf libre } \mathcal{F}_1 \end{tikzcd}$$

❀ $\mathcal{F}_1$ est réalisé dans le shelf des auto-plongements d'un grand cardinal :

$$\mathcal{F}_1 \cong F \subseteq \mathrm{Emb}(V_\lambda).$$

❀ F a des quotients de taille 2^n. $\leadsto$ Tables de Laver !

❀ $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \mathcal{F}_1$ $\leadsto$ A_n sont des approximations finies de $\mathcal{F}_1$.

⚠ Tout marche uniquement sous l'indémontrable

Axiome I3

V_λ est ultra-infini (= admet un auto-plongement élémentaire non-bijectif f_0).

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Définition élémentaire

$A_n = (\{\,1, 2, 3, \dots, 2^n\,\}, \triangleright)$ t.q.

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c) \qquad \& \qquad a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n.$$

Définition élémentaire

$A_n = (\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}, \triangleright)$ t.q.

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c) \qquad \& \qquad a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n.$$

Propriétés élémentaires

❀ Un système projectif de shelfs.

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_2	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

$\xrightarrow{\text{mod } 2}$

	1	2	1	2
1	2	2	2	2
2	1	2	1	2
1	2	2	2	2
2	1	2	1	2

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- Un système projectif de shelfs.
- Lignes périodiques.

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- ❀ Un système projectif de shelfs.
- ❀ Lignes périodiques.

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

$\pi_3(1) = 4$

$\pi_3(2) = 4$

$\pi_3(3) = 2$

$\pi_3(4) = 4$

$\pi_3(5) = 2$

$\pi_3(6) = 2$

$\pi_3(7) = 1$

$\pi_3(8) = 8$

Propriétés élémentaires

- Un système projectif de shelfs.
- Lignes périodiques.
- Solutions de $p \triangleright q = q$.

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

$\pi_3(1) = 4$
$\pi_3(2) = 4$
$\pi_3(3) = 2$
$\pi_3(4) = 4$
$\pi_3(5) = 2$
$\pi_3(6) = 2$
$\pi_3(7) = 1$
$\pi_3(8) = 8$

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- ❀ Un système projectif de shelfs.
- ❀ Lignes périodiques.
- ❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.
- ❀ On comprend certaines lignes et colonnes.

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8	
				8				8	
				8				8	
				8				8	
4	5	6	7	8	5	6	7	8	$\pi_3(4) = 4$
				8				8	
				8				8	
7	8	8	8	8	8	8	8	8	$\pi_3(7) = 1$
8	1	2	3	4	5	6	7	8	$\pi_3(8) = 8$

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- ❀ Un système projectif de shelfs.
- ❀ Lignes périodiques.
- ❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.
- ❀ On comprend certaines lignes et colonnes.
  - ⚠ Pas de formules explicites pour $p \triangleright q$, ni pour $\pi_n(p)$.

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	2	4	6	8	2	4	6	8	$\pi_n(1) = ?$
				8				8	
				8				8	
4	5	6	7	8	5	6	7	8	$\pi_3(4) = 4$
				8				8	
				8				8	
7	8	8	8	8	8	8	8	8	$\pi_3(7) = 1$
8	1	2	3	4	5	6	7	8	$\pi_3(8) = 8$

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- ❀ Un système projectif de shelfs.
- ❀ Lignes périodiques.
- ❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.
- ❀ On comprend certaines lignes et colonnes.
  - ⚠ Pas de formules explicites pour $p \triangleright q$, ni pour $\pi_n(p)$.
- ❀ A_n sont monogènes (générateur : 1).

$$\boxed{A_n \cong \mathcal{F}_1 / (\cdots((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \cdots) \triangleright \gamma = \gamma}$$

$$1 \leftrightarrow \gamma$$

$$2 \leftrightarrow \gamma \triangleright \gamma$$

$$3 \leftrightarrow (\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma$$

$$4 \leftrightarrow ((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \triangleright \gamma \qquad \ldots$$

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

- ❀ Un système projectif de shelfs.
- ❀ Lignes périodiques.
- ❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.
- ❀ On comprend certaines lignes et colonnes.
  - ⚠ Pas de formules explicites pour $p \triangleright q$, ni pour $\pi_n(p)$.
- ❀ A_n sont monogènes (générateur : 1).

$$\boxed{A_n \cong \mathcal{F}_1 / (\cdots((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \cdots) \triangleright \gamma = \gamma}$$

- ❀ $A_n \rightsquigarrow$ tous les shelfs monogènes finis (A. Drápal).

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

❀ Un système projectif de shelfs.

❀ Lignes périodiques.

❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.

❀ On comprend certaines lignes et colonnes.

⚠ Pas de formules explicites pour $p \triangleright q$, ni pour $\pi_n(p)$.

❀ A_n sont monogènes (générateur : 1).

$$\boxed{A_n \cong \mathcal{F}_1 \big/ (\cdots((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \cdots) \triangleright \gamma = \gamma}$$

❀ $A_n \rightsquigarrow$ tous les shelfs monogènes finis (A. Drápal).

Conjectures élémentaires

❀ $\pi_n(1) \underset{n \to \infty}{\to} \infty$.

❀ $\pi_n(1) \leqslant \pi_n(2)$.

❀ $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \mathcal{F}_1$.

Aller au-delà de la théorie des ensembles ?

Propriétés élémentaires

❀ Un système projectif de shelfs.

❀ Lignes périodiques.

❀ Solutions de $p \triangleright q = q$.

❀ On comprend certaines lignes et colonnes.

⚠ Pas de formules explicites pour $p \triangleright q$, ni pour $\pi_n(p)$.

❀ A_n sont monogènes (générateur : 1).

$$\boxed{A_n \cong \mathcal{F}_1 / (\cdots((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma) \cdots) \triangleright \gamma = \gamma}$$

❀ $A_n \rightsquigarrow$ tous les shelfs monogènes finis (A. Drápal).

Conjectures élémentaires

❀ $\pi_n(1) \underset{n \to \infty}{\to} \infty$.

❀ $\pi_n(1) \leqslant \pi_n(2)$.

❀ $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \mathcal{F}_1$.

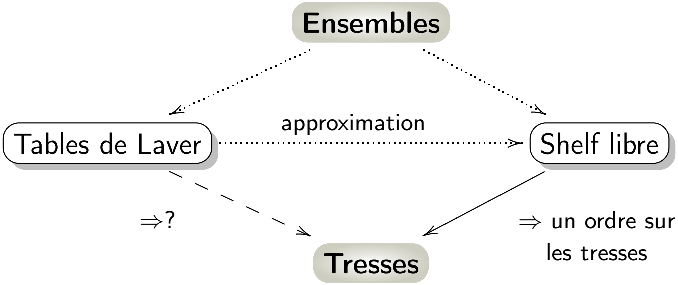
⚠ Théorèmes sous l'Axiome I3 !

A_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16
2	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16
3	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16
4	5	6	7	8	13	14	15	16	5	6	7	8	13	14	15	16
5	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16
6	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16
7	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16
10	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16
11	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16
12	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
13	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
14	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

⚠ Une riche combinatoire.

Rêves topologiques

Tables de Laver en topologie

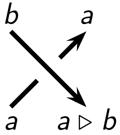


Richard Laver

Patrick Dehornoy

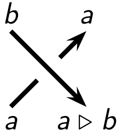
Coloriages

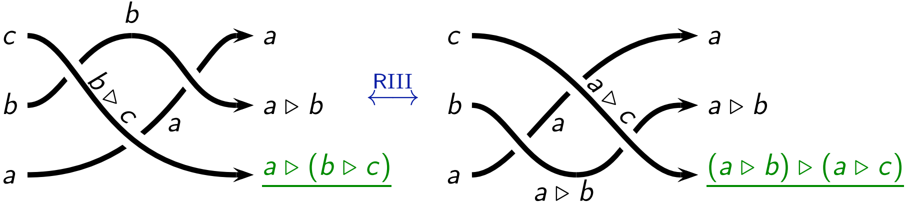
Coloriages par $(S, \triangleright)$:



Coloriages

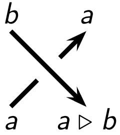
Coloriages par $(S, \triangleright)$:

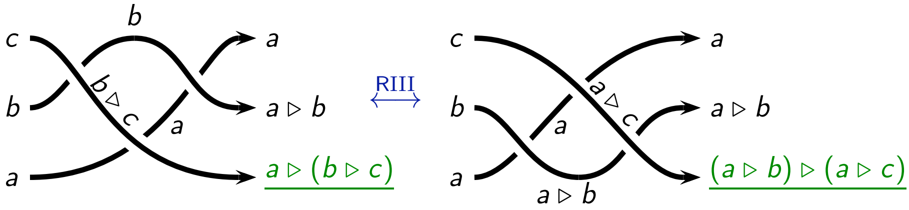




Coloriages

Coloriages par $(S, \triangleright)$:



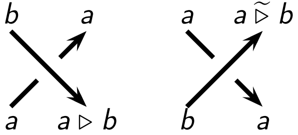


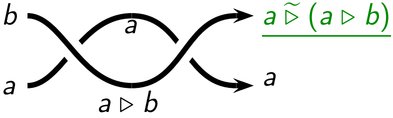
RIII $\leftrightarrow$ $a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$ (AD)

invariant de tresses positives $\rho(\beta) \in \mathrm{End}(S^{\times n})$ $\leftrightsquigarrow$ shelf $(S, \triangleright)$

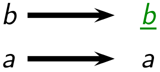
Coloriages

Coloriages par $(S, \triangleright)$:





$\xleftrightarrow{\text{RII}}$

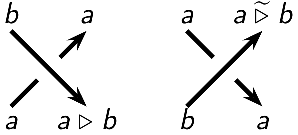


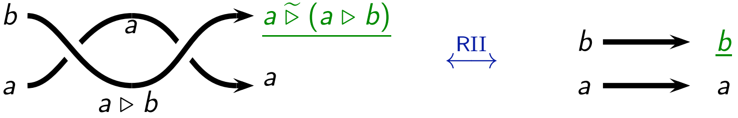
RIII	$\leftrightarrow$	$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$	(AD)
RII	$\leftrightarrow$	$a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b)$	(Inv)

invariant de tresses positives $\rho(\beta) \in \mathrm{End}(S^{\times n}) \rightsquigarrow$ shelf $(S, \triangleright)$

Coloriages

Coloriages par $(S, \triangleright)$:



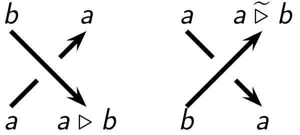


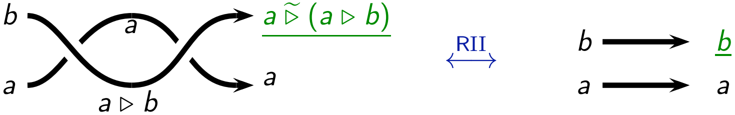
$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{RIII} & \leftrightarrow & a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c) & \text{(AD)} \\ \mathrm{RII} & \leftrightarrow & a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b) & \text{(Inv)} \end{array}\right\} \quad \textbf{rack}$$

invariant de tresses $\rho(\beta) \in \mathrm{Aut}(S^{\times n})$ $\leftsquigarrow$ rack $(S, \triangleright, \widetilde{\triangleright})$

Coloriages

Coloriages par $(S, \triangleright)$:





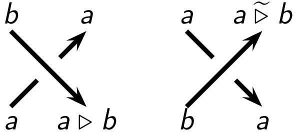
$$\left.\begin{array}{lll} \text{RIII} & \leftrightarrow & a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c) \quad \text{(AD)} \\ \text{RII} & \leftrightarrow & a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b) \quad \text{(Inv)} \end{array}\right\} \textbf{ rack}$$

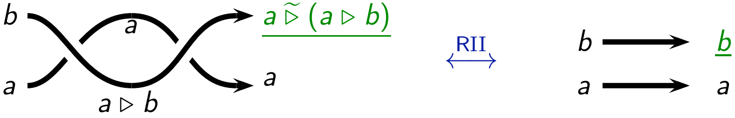
invariant de tresses $\rho(\beta) \in \mathrm{Aut}(S^{\times n}) \leftsquigarrow$ rack $(S, \triangleright, \widetilde{\triangleright})$

Exemples : ❀ rack (groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$, $a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b = a^{-1}ba$) $\rightsquigarrow$ $G^{\times n} \curvearrowleft B_n$, rep. d'Artin $B_n \curvearrowright F_n$ (gpe libre) ;

Coloriages

Coloriages par $(S, \triangleright)$:





RIII	$\leftrightarrow$	$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$	(AD)
RII	$\leftrightarrow$	$a \,\widetilde{\triangleright}\, (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \,\widetilde{\triangleright}\, b)$	(Inv)

$\}$ **rack**

invariant de tresses $\rho(\beta) \in \mathrm{Aut}(S^{\times n})$ $\leftsquigarrow$ rack $(S, \triangleright, \widetilde{\triangleright})$

Exemples : ❀ rack (groupe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$, $a \,\widetilde{\triangleright}\, b = a^{-1}ba$)

$\rightsquigarrow$ $G^{\times n} \curvearrowleft B_n$, rep. d'Artin $B_n \curvearrowright F_n$ (gpe libre) ;

❀ rack ($\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-mod. M, $a \triangleright b = tb + (1-t)a$)

$\rightsquigarrow$ rep. de Burau $B_n \to GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$.

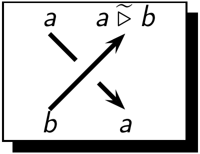
$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses positives $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

Problème : $\mathcal{F}_1$ et A_n sont des shelfs, pas des racks.



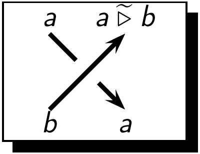
rack $\iff$ $a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b)$

$\iff$ $\forall\, a$, la translation $b \mapsto a \mathbin{\widetilde{\triangleright}} b$ est l'inverse de $T_a \colon b \mapsto a \triangleright b$

$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

Problème : $\mathcal{F}_1$ et A_n sont des shelfs, pas des racks.



$$\begin{aligned} \text{rack} \iff & \quad a \,\widetilde{\triangleright}\, (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \,\widetilde{\triangleright}\, b) \\ \iff & \quad \forall\, a, \text{ la translation } b \mapsto a \,\widetilde{\triangleright}\, b \\ & \quad \text{est l'inverse de } T_a : b \mapsto a \triangleright b \end{aligned}$$

Solution pour $\mathcal{F}_1$ (Dehornoy) :

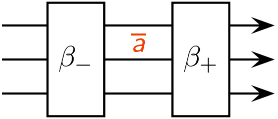
Les T_a sont injectives $\rightsquigarrow$ opération $\widetilde{\triangleright}$ partielle $\rightsquigarrow$ coloriage partiel :

forme normale de tresses :

$$\beta = \beta_- \beta_+,$$

β_- négative, β_+ positive

$(\overline{a})\beta_-^{-1}$

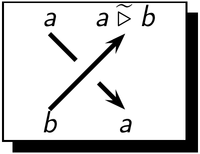


$(\overline{a})\beta_+$

$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

Problème : $\mathcal{F}_1$ et A_n sont des shelfs, pas des racks.



rack $\iff$ $a \,\widetilde{\triangleright}\, (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \,\widetilde{\triangleright}\, b)$

$\iff$ $\forall\, a$, la translation $b \mapsto a \,\widetilde{\triangleright}\, b$
est l'inverse de T_a : $b \mapsto a \triangleright b$

Solution pour $\mathcal{F}_1$ (Dehornoy) :

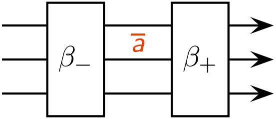
Les T_a sont injectives $\rightsquigarrow$ opération $\widetilde{\triangleright}$ partielle $\rightsquigarrow$ coloriage partiel :

forme normale de tresses :

$$\beta = \beta_- \beta_+,$$

β_- négative, β_+ positive

$(\overline{a})\beta_-^{-1}$



$(\overline{a})\beta_+$

❀ $\forall$ k-tresses β et β', $\exists$ un $\overline{a}$ t.q. $(\overline{a})\beta$ et $(\overline{a})\beta'$ sont définis.

❀ $(\overline{a})\beta = (\overline{a})\beta' \iff \beta \simeq \beta'$.

$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

Solution pour $\mathcal{F}_1$ (Dehornoy) :

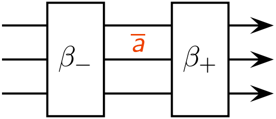
Les T_a sont injectives $\rightsquigarrow$ opération $\widetilde{\triangleright}$ partielle $\rightsquigarrow$ coloriage partiel :

forme normale de tresses :

$$\beta = \beta_- \beta_+,$$

β_- négative, β_+ positive

$(\overline{a})\beta_-^{-1}$



$(\overline{a})\beta_+$

❀ $\forall$ k-tresses β et β', $\exists$ un $\overline{a}$ t.q. $(\overline{a})\beta$ et $(\overline{a})\beta'$ sont définis.

❀ $(\overline{a})\beta = (\overline{a})\beta' \iff \beta \simeq \beta'$.

❀ La **divisibilité à gauche** induit un ordre total sur $\mathcal{F}_1$ et sur $\mathcal{F}_1^{\times k}$:

$$\boxed{a \,|_g\, b \quad \iff \quad b = a \triangleright c \text{ pour un certain } c}$$

$\mathcal{F}_1$-coloriages pour les tresses arbitraires

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ $\mathcal{F}_1$ ou A_n

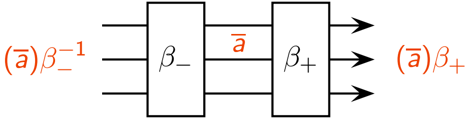
Solution pour $\mathcal{F}_1$ (Dehornoy) :

Les T_a sont injectives $\rightsquigarrow$ opération $\widetilde{\triangleright}$ partielle $\rightsquigarrow$ coloriage partiel :

forme normale de tresses :

$$\beta = \beta_- \beta_+,$$

β_- négative, β_+ positive



❀ $\forall$ k-tresses β et β', $\exists$ un $\overline{a}$ t.q. $(\overline{a})\beta$ et $(\overline{a})\beta'$ sont définis.

❀ $(\overline{a})\beta = (\overline{a})\beta' \iff \beta \simeq \beta'$.

❀ La **divisibilité à gauche** induit un ordre total sur $\mathcal{F}_1$ et sur $\mathcal{F}_1^{\times k}$:

$$\boxed{a \,|_g\, b \iff b = a \triangleright c \text{ pour un certain } c}$$

❀ Pour les tresses, la relation $\boxed{\beta < \beta' \iff (\overline{a})\beta \,|_g\, (\overline{a})\beta'}$

est un ordre total invariant à gauche ($\beta < \beta' \implies \alpha\beta < \alpha\beta'$).

A_n-coloriages pour les tresses arbitraires ?

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ A_n

Problème : Les translations $T_a\colon b \mapsto a \triangleright b$ ne sont pas injectives !

Exemple : $(2^n - 1) \triangleright a = 2^n$ pour tout a.

$\Longrightarrow$ On n'a même pas de coloriages partiels !

A_n-coloriages pour les tresses arbitraires ?

invariants de tresses arbitraires ? $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ A_n

Problème : Les translations $T_a \colon b \mapsto a \triangleright b$ ne sont pas injectives !

Exemple : $(2^n - 1) \triangleright a = 2^n$ pour tout a.

$\Longrightarrow$ On n'a même pas de coloriages partiels !

Pourquoi persister ?

❀ Conjecturalement, $A_n \underset{n \to \infty}{\to} A_\infty \supseteq \mathcal{F}_1$.

❀ A_n sont finis.

❀ A_n sont très différentes des racks usuellement utilisés en topologie.

Une passerelle homologique

Coloriages pondérés

But : Rendre les coloriages plus flexibles.

But : Rendre les coloriages plus flexibles.
Méthode : Les enrichir avec des poids.

Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito, '99 :

shelf S, groupe abélien A, $\phi\colon S \times S \to A \rightsquigarrow$ **ϕ-poids** :

$$\boxed{\text{diagramme } S\text{-colorié } D \quad \longmapsto \quad \sum \pm\phi(a,b)}$$

Coloriages pondérés

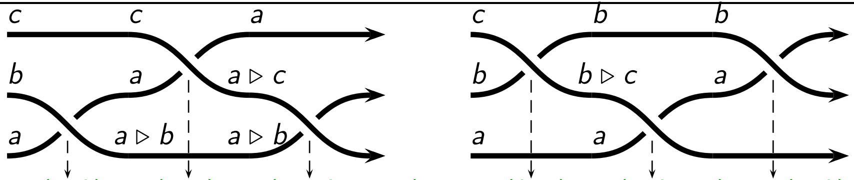
But : Rendre les coloriages plus flexibles.
Méthode : Les enrichir avec des poids.

Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito, '99 :

shelf S, groupe abélien A, $\phi\colon S \times S \to A \rightsquigarrow$ **ϕ-poids** :

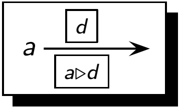
$$\boxed{\text{diagramme } S\text{-colorié } D \quad \longmapsto \quad \sum \pm\phi(a,b)}$$

$\{\, \phi\text{-poids de tous les coloriages de } D \,\}$ est un invariant de tresses positives si



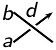
$$\cancel{\phi(a,b)} + \phi(a,c) + \phi(a \triangleright b, a \triangleright c) = \phi(b,c) + \phi(a, b \triangleright c) + \cancel{\phi(a,b)}$$

Variante : coloriage des régions

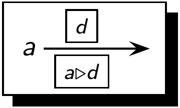


$\psi \colon S \times S \times S \to A \rightsquigarrow$ **ψ-poids :**

diagramme S-colorié $D \quad \longmapsto \quad \sum \pm\psi(a, b, d)$

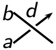


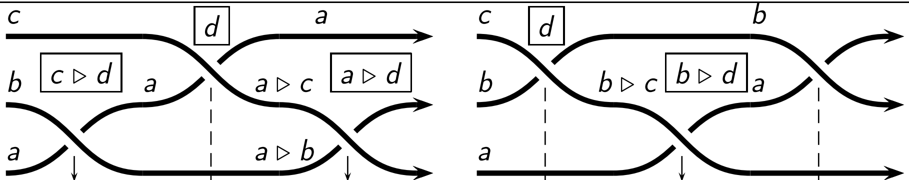
Variante : coloriage des régions



$\psi\colon S \times S \times S \to A \rightsquigarrow$ **ψ-poids :**

diagramme S-colorié $D \quad \longmapsto \quad \sum \pm\psi(a, b, d)$





$$\psi(a, b, c \triangleright d) + \psi(a, c, d) + \psi(a \triangleright b, a \triangleright c, a \triangleright d) = \psi(b, c, d) + \psi(a, b \triangleright c, b \triangleright d) + \psi(a, b, d)$$

Cocycles $\rightsquigarrow$ poids

Cohomologie des racks (Fenn-Rourke-Sanderson, '95)

Shelf $(S, \triangleright)$ $\rightsquigarrow$ complexe $(\mathrm{Hom}(S^{\times k}, A), d_{\mathrm{R}}^k)$ $\rightsquigarrow$ $H_{\mathrm{R}}^k(S, A)$

$$(d_{\mathrm{R}}^k f)(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} (f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \triangleright a_{i+1}, \ldots, a_i \triangleright a_{k+1}) \\ - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{k+1})).$$

Cocycles $\rightsquigarrow$ poids

Cohomologie des racks (Fenn-Rourke-Sanderson, '95)

Shelf $(S, \triangleright)$ $\rightsquigarrow$ complexe $(\mathrm{Hom}(S^{\times k}, A), d_{\mathrm{R}}^k)$ $\rightsquigarrow$ $H_{\mathrm{R}}^k(S, A)$

$$(d_{\mathrm{R}}^k f)(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} (f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \triangleright a_{i+1}, \ldots, a_i \triangleright a_{k+1}) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{k+1})).$$

2-cocycles : applications $\phi \colon S \times S \to A$ t.q.

$$\boxed{\phi(a, c) + \phi(a \triangleright b, a \triangleright c) = \phi(b, c) + \phi(a, b \triangleright c)}$$

3-cocycles : applications $\psi \colon S \times S \times S \to A$ t.q.

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi(a, b, c \triangleright d) + \psi(a, c, d) + \psi(a \triangleright b, a \triangleright c, a \triangleright d) = \\ &\psi(b, c, d) + \psi(a, b \triangleright c, b \triangleright d) + \psi(a, b, d) \end{aligned}}$$

Cocycles $\rightsquigarrow$ poids

Cohomologie des racks (Fenn-Rourke-Sanderson, '95)

Shelf $(S, \triangleright)$ $\rightsquigarrow$ complexe $(\mathrm{Hom}(S^{\times k}, A), d_{\mathrm{R}}^k)$ $\rightsquigarrow$ $H_{\mathrm{R}}^k(S, A)$

$$(d_{\mathrm{R}}^k f)(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} (f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \triangleright a_{i+1}, \ldots, a_i \triangleright a_{k+1}) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{k+1})).$$

2-cocycles : applications $\phi \colon S \times S \to A$ t.q.

$$\boxed{\phi(a, c) + \phi(a \triangleright b, a \triangleright c) = \phi(b, c) + \phi(a, b \triangleright c)}$$

3-cocycles : applications $\psi \colon S \times S \times S \to A$ t.q.

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi(a, b, c \triangleright d) + \psi(a, c, d) + \psi(a \triangleright b, a \triangleright c, a \triangleright d) = \\ &\psi(b, c, d) + \psi(a, b \triangleright c, b \triangleright d) + \psi(a, b, d)\end{aligned}}$$

invariants de tresses positives $\overset{\text{coloriages \&}}{\underset{\text{poids}}{\leftsquigarrow}}$ shelf & 2- ou 3-cocycle

Théorème (Dehornoy-L., '14)

1. $B^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2^n-1}$, base : pour $1 \leqslant q < 2^n$,
$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in Colonne(b),\ q \notin Colonne(a \triangleright b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2- et 3-cocycles pour les tables de Laver

Théorème (Dehornoy-L., '14)

1. $B^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2^n-1}$, base : pour $1 \leqslant q < 2^n$,
$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in \mathit{Colonne}(b),\ q \notin \mathit{Colonne}(a \triangleright b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $B^3_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^{2n}-2^n}$, base : cobords explicites, valeurs dans $\{0, \pm 1\}$.

2- et 3-cocycles pour les tables de Laver

Théorème (Dehornoy-L., '14)

1. $B^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2^n-1}$, base : pour $1 \leqslant q < 2^n$,
$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in \mathit{Colonne}(b),\ q \notin \mathit{Colonne}(a \triangleright b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $B^3_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^{2n}-2^n}$, base : cobords explicites, valeurs dans $\{0, \pm 1\}$.
3. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const} : \overline{a} \mapsto 1]$ $(k \leqslant 3)$.
4. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$ $(k \leqslant 3)$.

2- et 3-cocycles pour les tables de Laver

Théorème (Dehornoy-L., '14)

1. $B^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2^n - 1}$, base : pour $1 \leqslant q < 2^n$,
$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in \mathit{Colonne}(b),\ q \notin \mathit{Colonne}(a \triangleright b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $B^3_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^{2n} - 2^n}$, base : cobords explicites, valeurs dans $\{0, \pm 1\}$.
3. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const} : \overline{a} \mapsto 1]$ $(k \leqslant 3)$.
4. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$ $(k \leqslant 3)$.

2- et 3-cocycles pour les tables de Laver

Théorème (Dehornoy-L., '14)

1. $B^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2^n-1}$, base : pour $1 \leqslant q < 2^n$,
$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in \mathit{Colonne}(b),\ q \notin \mathit{Colonne}(a \triangleright b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $B^3_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^{2n}-2^n}$, base : cobords explicites, valeurs dans $\{0, \pm 1\}$.
3. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const} : \overline{a} \mapsto 1]$ $(k \leqslant 3)$.
4. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$ $(k \leqslant 3)$.

Remarque : Les $\phi_{q,n}$ captent la combinatoire des A_n (e.g., les périodes).

$\phi_{1,3}$	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	·

$\phi_{2,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	·	·	·
2	1	1	·	·	1	·	·	·
3	1	1	·	·	1	·	·	·
4	·	1	·	·	·	·	·	·
5	1	1	·	·	1	·	·	·
6	1	1	·	·	1	·	·	·
7	1	1	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{3,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	·	·
2	·	·	1	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	·	·
4	·	·	1	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	·	·
6	1	·	1	·	1	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{4,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	·	·	1	·	·	·	·
2	·	·	·	1	·	·	·	·
3	·	1	·	1	·	1	·	·
4	·	·	·	1	·	·	·	·
5	·	1	·	1	·	1	·	·
6	·	1	·	1	·	1	·	·
7	1	1	1	1	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{5,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	·	·	1	·	·	·
2	1	·	·	·	1	·	·	·
3	1	·	·	·	1	·	·	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	·	·	1	·	·	·
6	1	·	·	·	1	·	·	·
7	1	·	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{6,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	1	·	·
2	·	1	·	·	·	1	·	·
3	1	1	1	·	1	1	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	·	1	·	·	·	1	·	·
6	·	1	·	·	·	1	·	·
7	1	1	1	·	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{7,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	1	·
2	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	1	·
6	·	·	·	·	·	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{1,3}$	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	·

$\phi_{2,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	·	·	·
2	1	1	·	·	1	·	·	·
3	1	1	·	·	1	·	·	·
4	·	1	·	·	·	·	·	·
5	1	1	·	·	1	·	·	·
6	1	1	·	·	1	·	·	·
7	1	1	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{3,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	·	·
2	·	·	1	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	·	·
4	·	·	1	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	·	·
6	1	·	1	·	1	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{4,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	·	·	1	·	·	·	·
2	·	·	·	1	·	·	·	·
3	·	1	·	1	·	1	·	·
4	·	·	·	1	·	·	·	·
5	·	1	·	1	·	1	·	·
6	·	1	·	1	·	1	·	·
7	1	1	1	1	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{5,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	·	·	1	·	·	·
2	1	·	·	·	1	·	·	·
3	1	·	·	·	1	·	·	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	·	·	1	·	·	·
6	1	·	·	·	1	·	·	·
7	1	·	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{6,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	1	·	·
2	·	1	·	·	·	1	·	·
3	1	1	1	·	1	1	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	·	1	·	·	·	1	·	·
6	·	1	·	·	·	1	·	·
7	1	1	1	·	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{7,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	1	·
2	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	1	·
6	·	·	·	·	·	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

Divisibilité à droite pour les tables de Laver

Un ingrédient clé de la preuve : un changement de base, qui utilise la **divisibilité à droite** :

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longleftrightarrow \quad b = c \triangleright a \text{ pour un certain } c}$$

Divisibilité à droite pour les tables de Laver

Un ingrédient clé de la preuve : un changement de base, qui utilise la **divisibilité à droite** :

$$\boxed{a \,|_d\, b \quad \Longleftrightarrow \quad b = c \triangleright a \text{ pour un certain } c}$$

Théorème (Dehornoy-L., 14)

1. $|_d$ est un ordre partiel sur A_n.
2. $a \,|_d\, b \quad \Longleftrightarrow \quad Colonne(a) \supseteq Colonne(b)$.

Divisibilité à droite pour les tables de Laver

Un ingrédient clé de la preuve : un changement de base, qui utilise la **divisibilité à droite** :

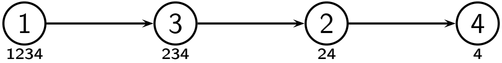
$$\boxed{a \,|_d\, b \quad \Longleftrightarrow \quad b = c \triangleright a \text{ pour un certain } c}$$

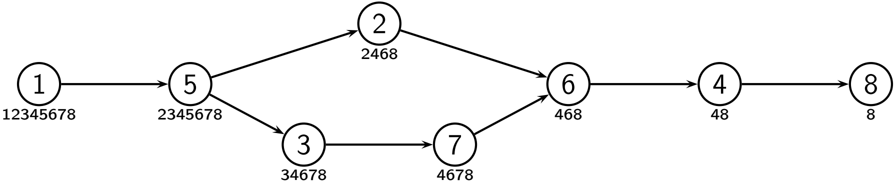
Théorème (Dehornoy-L., 14)

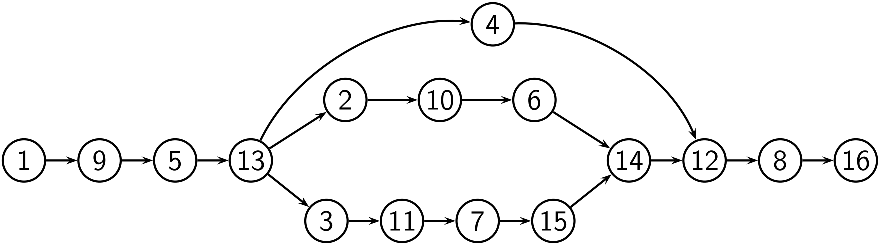
1. $|_d$ est un ordre partiel sur A_n.
2. $a \,|_d\, b \quad \Longleftrightarrow \quad \mathit{Colonne}(a) \supseteq \mathit{Colonne}(b)$.

Propriétés :

❀ Élément minimal : 1.
❀ Élément maximal : 2^n.
❀ Non-linéaire pour $n \geqslant 3$.
❀ N'est pas un treillis pour $n \geqslant 5$.


1
3
2
4
1234
234
24
4


2
2468
1
12345678
5
2345678
6
468
4
48
8
8
3
34678
7
4678


4
2
10
6
1
9
5
13
14
12
8
16
3
11
7
15

Transitivité de la relation $|_d$

Théorème (Laver, Drápal, '95)

L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

$$(a \circ b) \triangleright c = a \triangleright (b \triangleright c), \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

$$a \triangleright (b \circ c) = (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), \qquad 2^n \circ a = a,$$

$$a \circ b = (a \triangleright b) \circ a, \qquad a \circ 2^n = a.$$

$A_3, \triangleright$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

$A_3, \circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	5	7	1	3	5	7	1
2	3	6	7	2	3	6	7	2
3	7	3	7	3	7	3	7	3
4	5	6	7	4	5	6	7	4
5	7	5	7	5	7	5	7	5
6	7	6	7	6	7	6	7	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Transitivité de la relation $|_d$

Théorème (Laver, Drápal, '95)

L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

$$(a \circ b) \triangleright c = a \triangleright (b \triangleright c), \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$
$$a \triangleright (b \circ c) = (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), \qquad 2^n \circ a = a,$$
$$a \circ b = (a \triangleright b) \circ a, \qquad a \circ 2^n = a.$$

$A_3, \triangleright$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

$A_3, \circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	5	7	1	3	5	7	1
2	3	6	7	2	3	6	7	2
3	7	3	7	3	7	3	7	3
4	5	6	7	4	5	6	7	4
5	7	5	7	5	7	5	7	5
6	7	6	7	6	7	6	7	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8

$$a \,|_d\, b \,|_d\, c \;\Rightarrow\; c = e \triangleright \underbrace{(d \triangleright a)}_{b} = (e \circ d) \triangleright a \;\Rightarrow\; a \,|_d\, c.$$

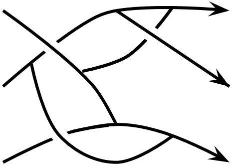
Digression : tresses bifurquées

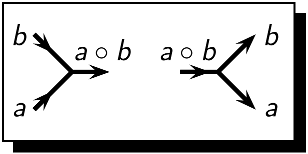
Théorème (Laver, Drápal, '95)

L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

$$(a \circ b) \triangleright c = a \triangleright (b \triangleright c), \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$
$$a \triangleright (b \circ c) = (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), \qquad 2^n \circ a = a,$$
$$a \circ b = (a \triangleright b) \circ a, \qquad a \circ 2^n = a.$$

Application : coloriage de tresses bifurquées positives.





Digression : tresses bifurquées

Théorème (Laver, Drápal, '95)

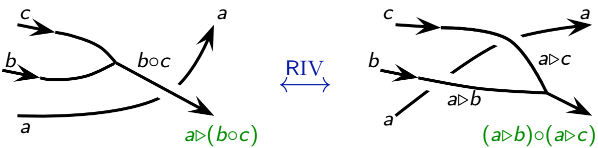
L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

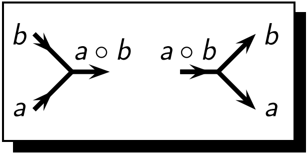
$$(a \circ b) \triangleright c = a \triangleright (b \triangleright c), \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

$$a \triangleright (b \circ c) = (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), \qquad 2^n \circ a = a,$$

$$a \circ b = (a \triangleright b) \circ a, \qquad a \circ 2^n = a.$$

Application : coloriage de **tresses bifurquées** positives.





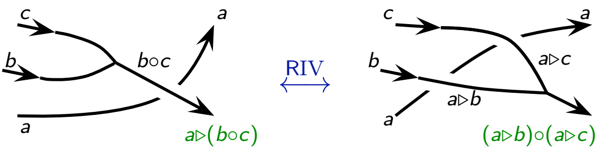
Digression : tresses bifurquées

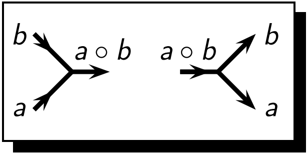
Théorème (Laver, Drápal, '95)

L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

$$(a \circ b) \triangleright c = a \triangleright (b \triangleright c), \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$
$$a \triangleright (b \circ c) = (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), \qquad 2^n \circ a = a,$$
$$a \circ b = (a \triangleright b) \circ a, \qquad a \circ 2^n = a.$$

Application : coloriage de **tresses bifurquées** positives.





invariants de tresses bifurquées positives $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ A_n

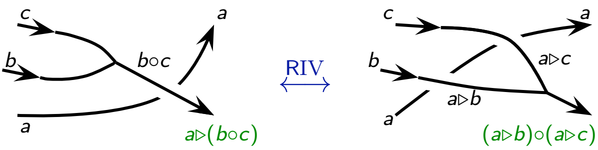
Digression : tresses bifurquées

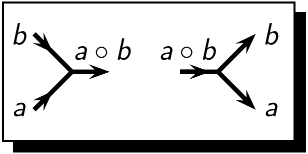
Théorème (Laver, Drápal, '95)

L'opération $\boxed{p \circ q = p \triangleright (q+1) - 1}$ sur A_n satisfait à

$$
\begin{aligned}
(a \circ b) \triangleright c &= a \triangleright (b \triangleright c), & (a \circ b) \circ c &= a \circ (b \circ c),\\
a \triangleright (b \circ c) &= (a \triangleright b) \circ (a \triangleright c), & 2^n \circ a &= a,\\
a \circ b &= (a \triangleright b) \circ a, & a \circ 2^n &= a.
\end{aligned}
$$

Application : coloriage de **tresses bifurquées** positives.





invariants de tresses bifurquées positives $\overset{\text{coloriages}}{\leftsquigarrow}$ A_n

⚠ Cela ne marche pas pour $\mathcal{F}_1$!

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	
$\mathcal{F}_1$		induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$		induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d\colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d\colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d\colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

❀ $\mid_d$ est plus fine que d : $\qquad a \mid_d b \quad \not\Leftarrow \quad d(b) = d(a) + 1.$

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

❀ $\mid_d$ est plus fine que d : $\qquad a \mid_d b \quad \not\Leftarrow \quad d(b) = d(a) + 1.$

$$b = \gamma \triangleright (\gamma \triangleright \gamma), \qquad\qquad d(b) = 3,$$

$$a = \Big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma\big)\Big) \triangleright \gamma, \qquad\qquad d(a) = 2.$$

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d \colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

❀ $\mid_d$ est plus fine que d : $\quad a \mid_d b \quad \not\Leftarrow \quad d(b) = d(a) + 1.$

$$b = \gamma \triangleright (\gamma \triangleright \gamma), \qquad d(b) = 3,$$

$$a = \Big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma \big) \Big) \triangleright \gamma, \qquad d(a) = 2.$$

Si $a \mid_d b$ dans $\mathcal{F}_1$, alors $\Big((1 \triangleright 1) \triangleright \big((1 \triangleright 1) \triangleright 1 \big) \Big) \triangleright 1 \ \mid_d \ 1 \triangleright (1 \triangleright 1)$ dans tous les A_n.

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d \colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

❀ $\mid_d$ est plus fine que d : $\qquad a \mid_d b \quad \not\Leftarrow \quad d(b) = d(a) + 1.$

$$b = \gamma \triangleright (\gamma \triangleright \gamma), \qquad d(b) = 3,$$

$$a = \Big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma\big)\Big) \triangleright \gamma, \qquad d(a) = 2.$$

Si $a \mid_d b$ dans $\mathcal{F}_1$, alors $\Big((1 \triangleright 1) \triangleright \big((1 \triangleright 1) \triangleright 1\big)\Big) \triangleright 1 \;\mid_d\; 1 \triangleright (1 \triangleright 1)$ dans tous les A_n. Mais $8 \nmid_d 4$ dans A_3 !

Diverses relations de divisibilité

	$a \mid_d b$ si $b = c \triangleright a$	$a \mid_g b$ si $b = a \triangleright c$
A_n	est un ordre partiel $\rightsquigarrow$ une bonne base de $Z^2_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z})$	induit une relation triviale
$\mathcal{F}_1$	induit un ordre partiel $\rightsquigarrow$?	induit un ordre total $\rightsquigarrow$ un ordre sur les tresses

Profondeur $d \colon \mathcal{F}_1 \to \mathbb{N}$, $d(\gamma) = 1$, $d(c \triangleright a) = d(a) + 1$.

$$\boxed{a \mid_d b \quad \Longrightarrow \quad d(b) = d(a) + 1}$$

❀ $\mid_d$ est anti-symétrique, mais pas transitive sur $\mathcal{F}_1$.

❀ $\mid_d$ est plus fine que d : $\quad a \mid_d b \quad \not\Leftarrow \quad d(b) = d(a) + 1.$

$$b = \gamma \triangleright (\gamma \triangleright \gamma), \qquad d(b) = 3,$$

$$a = \Big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \big((\gamma \triangleright \gamma) \triangleright \gamma\big)\Big) \triangleright \gamma, \qquad d(a) = 2.$$

Si $a \mid_d b$ dans $\mathcal{F}_1$, alors $\Big((1 \triangleright 1) \triangleright \big((1 \triangleright 1) \triangleright 1\big)\Big) \triangleright 1 \ \mid_d \ 1 \triangleright (1 \triangleright 1)$ dans tous les A_n. Mais $8 \nmid_d 4$ dans A_3 !

Compléments sur la cohomologie des tables de Laver

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Compléments sur la cohomologie des tables de Laver

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Conjecture

Tous les shelfs monogènes finis ont ce comportement cohomologique.

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Conjecture

Tous les shelfs monogènes finis ont ce comportement cohomologique.

❀ $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[f_{const}]}$ pour une large classe de shelfs (généralisation du cas des racks finis, Etingof-Graña '03).

Compléments sur la cohomologie des tables de Laver

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Conjecture

Tous les shelfs monogènes finis ont ce comportement cohomologique.

❀ $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[f_{const}]}$ pour une large classe de shelfs (généralisation du cas des racks finis, Etingof-Graña '03).

❀ Vraie pour les **shelfs cycliques** $C_{r,m} = \{-r, \ldots, m-2, m-1\}$,

$\boxed{a \triangleright b = b+1}$ (avec $(m-1)+1 = 0$).

⚠ $[f_{const}]$ n'engendre plus $H^k_{\mathrm{R}}(C_{r,m}, \mathbb{Z})$.

Compléments sur la cohomologie des tables de Laver

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Conjecture

Tous les shelfs monogènes finis ont ce comportement cohomologique.

❀ $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[f_{const}]}$ pour une large classe de shelfs (généralisation du cas des racks finis, Etingof-Graña '03).

❀ Vraie pour les **shelfs cycliques** $C_{r,m} = \{-r, \ldots, m-2, m-1\}$,

$\boxed{a \triangleright b = b+1}$ (avec $(m-1)+1 = 0$).

⚠ $[f_{const}]$ n'engendre plus $H^k_{\mathrm{R}}(C_{r,m}, \mathbb{Z})$.

❀ A_n • shelfs monogènes finis • $C_{r,m}$ (A. Drápal)

Compléments sur la cohomologie des tables de Laver

Théorème (L., '14)

1. $B^k_{\mathrm{R}}(A_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$.
2. $H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, base : $[f_{const}]$.
3. $Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq B^k_{\mathrm{R}}(A_n) \oplus H^k_{\mathrm{R}}(A_n)$.

Conjecture

Tous les shelfs monogènes finis ont ce comportement cohomologique.

❀ $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[f_{const}]}$ pour une large classe de shelfs (généralisation du cas des racks finis, Etingof-Graña '03).

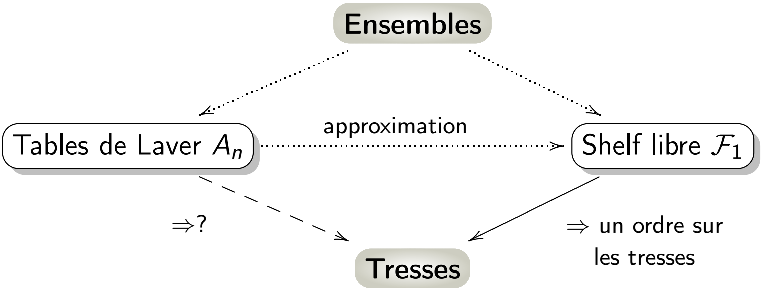
❀ Vraie pour les **shelfs cycliques** $C_{r,m} = \{-r, \ldots, m-2, m-1\}$, $\boxed{a \triangleright b = b+1}$ (avec $(m-1)+1 = 0$).

⚠ $[f_{const}]$ n'engendre plus $H^k_{\mathrm{R}}(C_{r,m}, \mathbb{Z})$.

❀ A_n • shelfs monogènes finis • $C_{r,m}$ (A. Drápal)

Question : La cohomologie de $\mathcal{F}_1$?

A suivre...


Ensembles
approximation
Tables de Laver A_n
Shelf libre $\mathcal{F}_1$
$\Rightarrow$?
$\Rightarrow$ un ordre sur les tresses
Tresses