

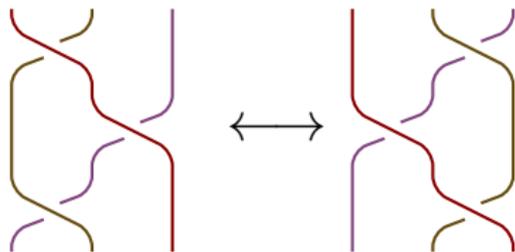
Que savent les tresses sur les tableaux de Young ?

Victoria LEBED

Trinity College Dublin

Lyon, 21 décembre 2017

3		
2	6	6
1	4	5



3		
2	6	6
1	4	5

+ Gadget combinatoire

(Young 1900, Frobenius 1903).

+ Monoïde $(\mathbf{TY}_n, *)$, $A_n = \{1, \dots, n\}$

(Robinson '38, Schensted '61, Knuth '70).

Applications :

✓ Règle de Littlewood–Richardson : une preuve correcte!

(Schützenberger '77)

+ représentations de S_k et $GL_k(\mathbb{C})$;

+ intersections de grassmanniennes ;

+ produit de fonctions symétriques.

✓ Polynômes de Kostka–Foulkes

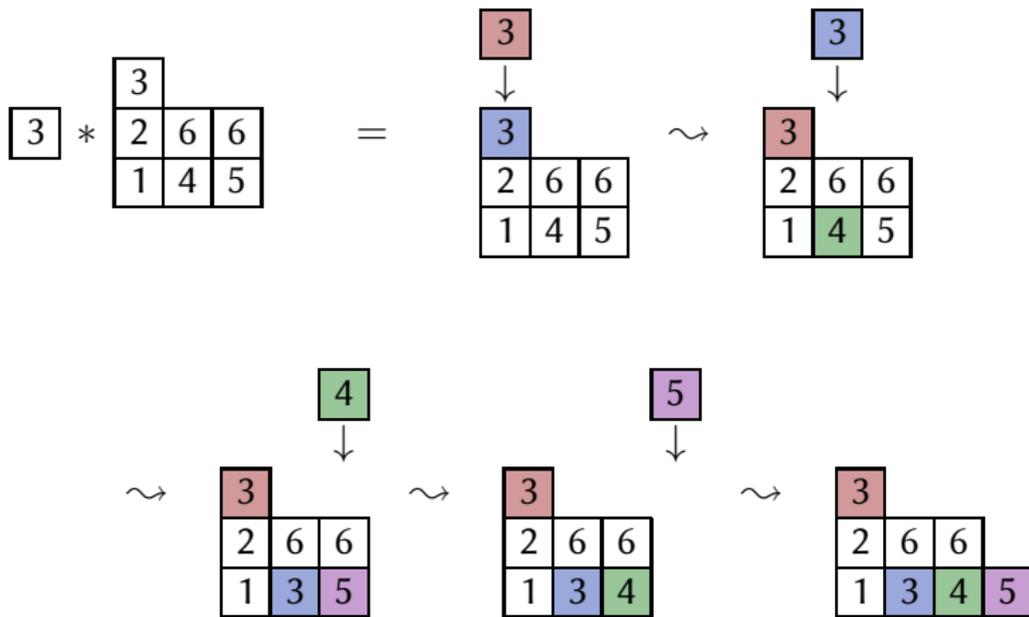
(Lascoux–Schützenberger '78)

+ représentations de $GL_k(\mathbb{F}_q)$;

+ modèles sur réseau.

✓ Bases cristallines pour les groupes quantiques

(Krob, Lascoux, Leclerc, Thibon '95).



3 Monoïde plaxique

Tableaux vs. mots : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : \mathbf{TY}_n \rightleftharpoons \mathbf{A}_n^* : \mathcal{T}$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{a_1} * (\boxed{a_2} * (\dots * \boxed{a_k}))$$

 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$

3 266 145

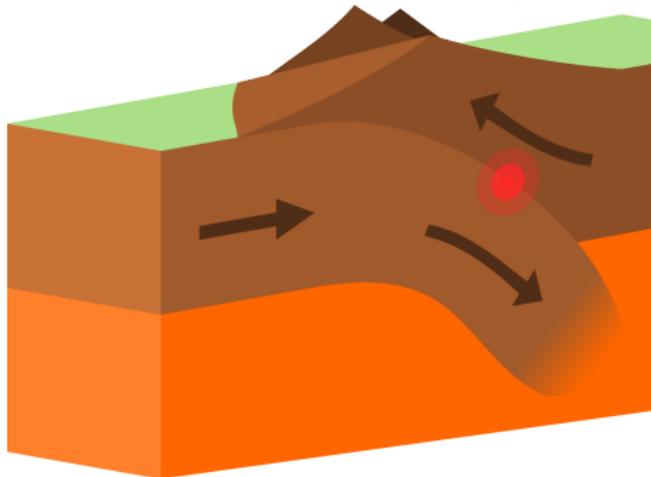
 $\xrightarrow{\mathcal{C}}$

321 64 65

 $\xleftarrow{\mathcal{T}}$

$a_1 a_2 \dots a_k$

Thm (Knuth '70) : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : (\mathbf{TY}_n, *) \xleftrightarrow{\text{iso}} (\mathbf{A}_n^*/\sim, \text{concat}) : \mathcal{T}$



= \mathbf{PI}_n monoïde
plaxique

$$xzy \sim zxy, \quad x \leq y < z;$$

$$yxz \sim yzx, \quad x < y \leq z.$$

Le théorème de Knuth donne une présentation du monoïde plaxique :

$$\mathbf{PI}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle.$$

Hélas, cette présentation ne fournit pas de bon système de réécriture.

On va maintenant en décrire une nouvelle.

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

Thm (Cain et al., Bokut et al., '15) :

- + $\mathbf{PI}_n = \langle \mathbf{Col}_n^\bullet \mid c_1 \cdot c_2 \rightarrow c_1 c_2 \text{ ou } c'_1 \cdot c'_2 \rangle$;
- + système de réécriture convergent, $\mathbf{NForme}(c_1 \cdot \dots \cdot c_k) = \mathcal{C}(c_1 * \dots * c_k)$;
- + base de Gröbner–Shirshov pour $\mathbb{k}\mathbf{PI}_n$.

Exemple : $\mathbf{Col}_2^\bullet = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{bmatrix} \right\}$,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e$ (colonne vide)

$$\begin{aligned} \sigma_n : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n &\rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n, \\ (c_1, c_2) &\mapsto (c_1 c_2, e) \text{ ou } (c'_1, c'_2) = c_1 * c_2. \end{aligned}$$

Thm (L. '16) :

- † σ_n est un **tressage idempotent** sur \mathbf{Col}_n ;
- † e est un **neutre** pour σ_n ;
- † $\mathbf{Pl}_n \simeq \mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_n, e)$;
- + idem pour les tableaux-lignes.

Motivation : \mathbf{Col}_n est plus petit et plus simple que \mathbf{Pl}_n .

Applications : † réécriture ;

† calculs cohomologiques (cf. *Lopatkin* '16).

Données :

- + catégorie monoïdale \mathcal{C} ($= \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$);
- + objet S ;
- + morphisme $\sigma: S \otimes S \rightarrow S \otimes S$.

tressage

YBE : $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: S^{\otimes 3} \rightarrow S^{\otimes 3}$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_S, \sigma_2 = \text{Id}_S \otimes \sigma$$

Avatar topologique :

$$\sigma \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$



$$\text{YBE} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

mouvement de Reidemeister III

① Ensemblistes : $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ (Drinfel'd '90)

linéariser déformer
 \rightsquigarrow \rightsquigarrow solutions linéaires

Exemple : $\sigma(x, y) = (y, x)$

\rightsquigarrow R-matrices ;

$\rightsquigarrow \sigma_{\text{Lie}}(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y] :$

YBE pour σ_{Lie} $\overset{1 \text{ central}}{\iff}$ Jacobi pour $[\]$

② Non-inversibles.

Exemple : structures auto-distributives &
 un ordre sur les groupes de tresses (Dehornoy '91).

③ Idempotents : $\sigma\sigma = \sigma$.

✓ Monoïde $(S, \cdot, 1)$, $\sigma_{\text{Ass}}(x, y) = (1, x \cdot y)$.

YBE pour σ_{Ass} \iff associativité pour \cdot
 1 neutre

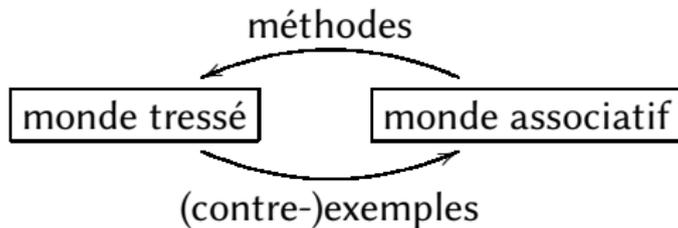
✓ Monoïde factorisé $G = HK$,

$$S = H \cup K, \quad \sigma_{\text{Fact}}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K).$$

✓ Treillis (S, \wedge, \vee) , $\sigma_{\text{Tr}}(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.

✓ Monoïde plaxique : σ_n sur \mathbf{Col}_n .

$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$



Thm : $\sigma^2 = \text{Id} \implies$

- ✓ $\mathbf{Mon}(S, \sigma)$ est de type I, simplifiable, Ore ;
- ✓ $\mathbf{Grp}(S, \sigma)$ est résoluble, Garside, Bieberbach ;
- ✓ $\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma)$ est Koszul, noethérien, Cohen–Macaulay,
Artin–Schelter régulier

(Manin, Gateva-Ivanova & Van den Bergh, Etingof–Schedler–Soloviev, Jespers–Okniński, Chouraqui 80²-...).

$$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$

$$\mathbf{Mon}(S, \sigma, e) := \mathbf{Mon}(S, \sigma) / e = 1$$

Exemples :

✓ Monoïde factorisé $G = HK$, $\sigma_{\text{Fact}}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$:

$$\mathbf{Mon}(H \cup K, \sigma_{\text{Fact}}, 1_G) \simeq G.$$

✓ Alg. Lie V' , $V = V' \oplus \mathbb{k}1$, $\sigma_{\text{Lie}}(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$:

$$\mathbf{Alg}(V, \sigma_{\text{Lie}}, 1) \simeq \mathbf{UEA}(V', []).$$

✓ Monoïde plaxique :

$$\mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_n, e) \simeq \mathbf{Pl}_n.$$

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid \sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1})\}$.

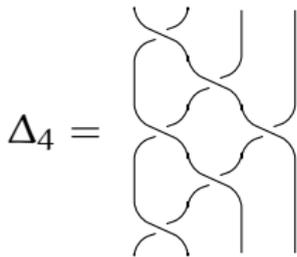
Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

† Pour un tressage idempotent σ sur S ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma) \xleftrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \longmapsto [\mathbf{w}],$$

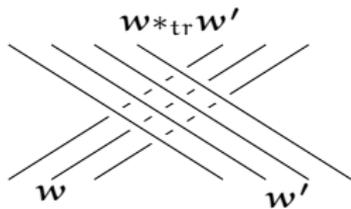
$$\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w} \longleftarrow [\mathbf{w}] : \text{NForme.}$$



† Système de réécriture convergent :

$$xy \rightarrow y'x', \quad (y', x') = \sigma(x, y).$$

† Produit associatif $*_{\text{tr}}$ sur $\mathbf{Norm}(S, \sigma)$:



Un neutre pour $\sigma : e \in S$ t.q.

- + σ préserve $\{(e, x), (x, e)\}$;
- + le mot \mathbf{wew}' est normal $\Rightarrow \mathbf{ww}'$ l'est.

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid \sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1}), x_j \neq e\}$.

Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

- + Pour un tressage idempotent σ sur S avec un neutre e ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) \xleftrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma, e),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \longmapsto [\mathbf{w}],$$

$$\overline{\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w}} \longleftarrow [\mathbf{w}] : \text{RNForme}.$$

- + Système de réécriture convergent :

$$e \rightarrow 1 \quad \& \quad xy \rightarrow y'x', \quad (y', x') = \sigma(x, y).$$

- + Produit associatif $*_{\text{tr}}$ sur $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e)$.

Exemple : $(\mathbf{Norm}(\mathbf{Col}_n, \sigma_n, e), *_{\text{tr}}) \simeq (\mathbf{TY}_n, *_{\text{Sch}})$.

Données :

- † tressage σ sur S ;
- † anneau \mathbb{k} ;
- † $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{k}$ caractère tressé, e.g. $\varepsilon_1 : x \mapsto 1$.

Construction :

- † $C^n := \text{Maps}(S^{\times n}, \mathbb{k})$;
- † $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$, $d^{n+1} d^n = 0$;
- † cohomologie tressée de (S, σ) avec coefficients $(\mathbb{k}, \varepsilon)$:

$$H^n(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon) := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1} ;$$
- † cup produit $\smile : H^n \otimes H^m \rightarrow H^{n+m}$, commutatif si $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Versions :

- † graphique ;
- † algébrique : **battages quantiques** (Rosso '95).

1) Déformations diagonales $\sigma_q(x, y) = q^{\omega(x, y)} \sigma(x, y)$:

ω est un 2-cocycle $\implies \sigma_q$ est un tressage

(Freyd–Yetter '89, Eisermann '05).

2) Invariants de nœuds

$$\mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \left\{ \sum_{\substack{y' \nearrow x' \\ x \searrow y}} \omega(x, y) - \sum_{\substack{x \nearrow y \\ y' \searrow x'}} \omega(x, y) \mid (S, \sigma)\text{-coloriages de } D \right\} :$$

ω est un 2-cocycle $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D)$ est un invariant ;

ω est un 2-cobord $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \{0, 0, \dots\}$.

(Fenn et al. '95, Carter et al. '01, ...).

3) Unification de théories cohomologiques ;

+ transport de techniques ;

+ théories pour de nouvelles structures

(L. '13, ...).

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma, \mathbf{e}; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

$$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma, \mathbf{e}); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un **isomorphisme** quand

- ✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (*Farinati & García-Galofre '16*);
- ✓ $\sigma\sigma = \sigma$ (*L. '16*).

Preuve, cas $\sigma\sigma = \sigma$: théorie de Morse discrète algébrique.

Question ouverte : Dans le cas général ?

Application : généralisation de la formule de Künneth pour les monoïdes factorisés $G = HK$.

$$\mathbb{H}H^*(\mathbb{k}\mathbf{PI}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_n, e; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

Cor : \mathbf{PI}_n est de type $(\mathbf{FP})_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $\mathbb{H}H^*(\mathbb{k}\mathbf{PI}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftrightarrow \Lambda^*(\mathbb{k}\mathcal{A}_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e \mapsto 1$,

Thm : 1) $\mathbb{H}H^1(\mathbb{k}\mathbf{PI}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq \mathcal{A}_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(\mathcal{A}_n, \mathbb{k})$).

2) $\mathbb{H}H^2 \simeq (\boxplus)^\vee$.

3) $\mathbb{H}H^1 \smile \mathbb{H}H^1 = 0$.

4) $\mathbb{H}H^j \neq 0$ pour tout j quand $n > 2$.

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e \mapsto 1$,

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PI}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

2) $HH^2 \simeq (\boxplus)^\vee$.

3) $HH^1 \smile HH^1 = 0$.

4) $HH^j \neq 0$ pour tout j quand $n > 2$.

5) Pour $n = 2$,

$$HH^1 = \mathbb{k}f_{\boxed{1}} \oplus \mathbb{k}f_{\boxed{2}},$$

$$HH^3 = \mathbb{k}f_{\boxed{2, \boxed{1}, \boxed{2}}};$$

$$HH^2 = \mathbb{k}f_{\boxed{1, \boxed{2}}_1} \oplus \mathbb{k}f_{\boxed{2, \boxed{2}}_1},$$

$$HH^k = 0, k > 3.$$

$$f_{\boxed{2}} \smile f_{\boxed{1, \boxed{2}}_1} = -f_{\boxed{2, \boxed{2}}_1} \smile f_{\boxed{1}} = f_{\boxed{2, \boxed{1}, \boxed{2}}_1}.$$

CrI : dimension cohomologique :

n	> 2	2	1
$\text{cd}(\mathbf{PI}_n)$	∞	3	1