Les groupes de tresses sont linéaires

$B_n \underset{\text{gpe}}{\overset{\rho}{\hookrightarrow}} GL_N(\mathbb{R})$

Victoria LEBED, juin 2015

$\boxed{1}$ De l'histoire

Pourquoi s'intéresser à / soupçonner la linéarité des B_n?

✓ B_2 & B_3 sont linéaires.
$B_2 \cong \mathbb{Z}$; B_3 via Burau (Magnus-Peluso '69)

✓ B_n sont "linéaires par morceaux" (Fathi-Laudenbach-Poenaru '79).

✓ B_4 linéaire $\Leftrightarrow$ $Aut(F_2)$ l'est (Dyer-Formanek-Grossman '82).

⚠ $Aut(F_n)$ n'est pas linéaire pour $n \geq 3$ (Formanek-Procesi '92).

✓ Alternative de Tits pour B_n & tous les $MCG(\Sigma)$ (McCarthy '89, Ivanov '92)

$\forall H \leq B_n$, · soit $H \geq F_2$
· soit H virtuellement résoluble

Candidats pour ρ:

✓ Burau réduit : non-fidèle pour
- $n \geq 9$ Moody '91 $\rightsquigarrow$ 88 croisements dans le contre-exemple
- $n \geq 6$ Long-Paton '93 $\rightsquigarrow$ 76 cr.
- $n \geq 5$ Bigelow '99 $\rightsquigarrow$ exemple trouvé par un ordinateur...

✓ reps de Jones '87 : plus fidèles que Burau

✓ LKB (Lawrence '90) sont fidèles pour
- $n = 4$ (Krammer '00)
- $\forall n$ (Bigelow '01, Krammer '02)

arguments : top. alg.

Points de vue sur LKB:

✓ homologique : Law '90 etc.

✓ f-les explicites : Kra '02

✓ via algèbres BMW : Zinno '01

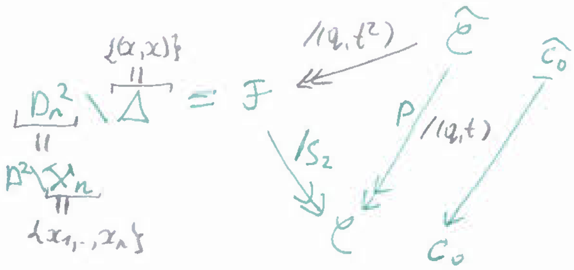
✓ via gpes quantiques : Jackson-Kerler '11

✓ $B_{n+1} \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow[\text{à la Magnus}]{\text{construct}^{\text{n}}} B_n \xrightarrow{\rho^+} GL(V^n)$: Long-Moody '94,

$\boxed{\exists \text{ variante "auto-distributive"}}$

rep. triviale $\rightsquigarrow$ Burau $\rightsquigarrow$ LKB

[2] Rappels sur LKB



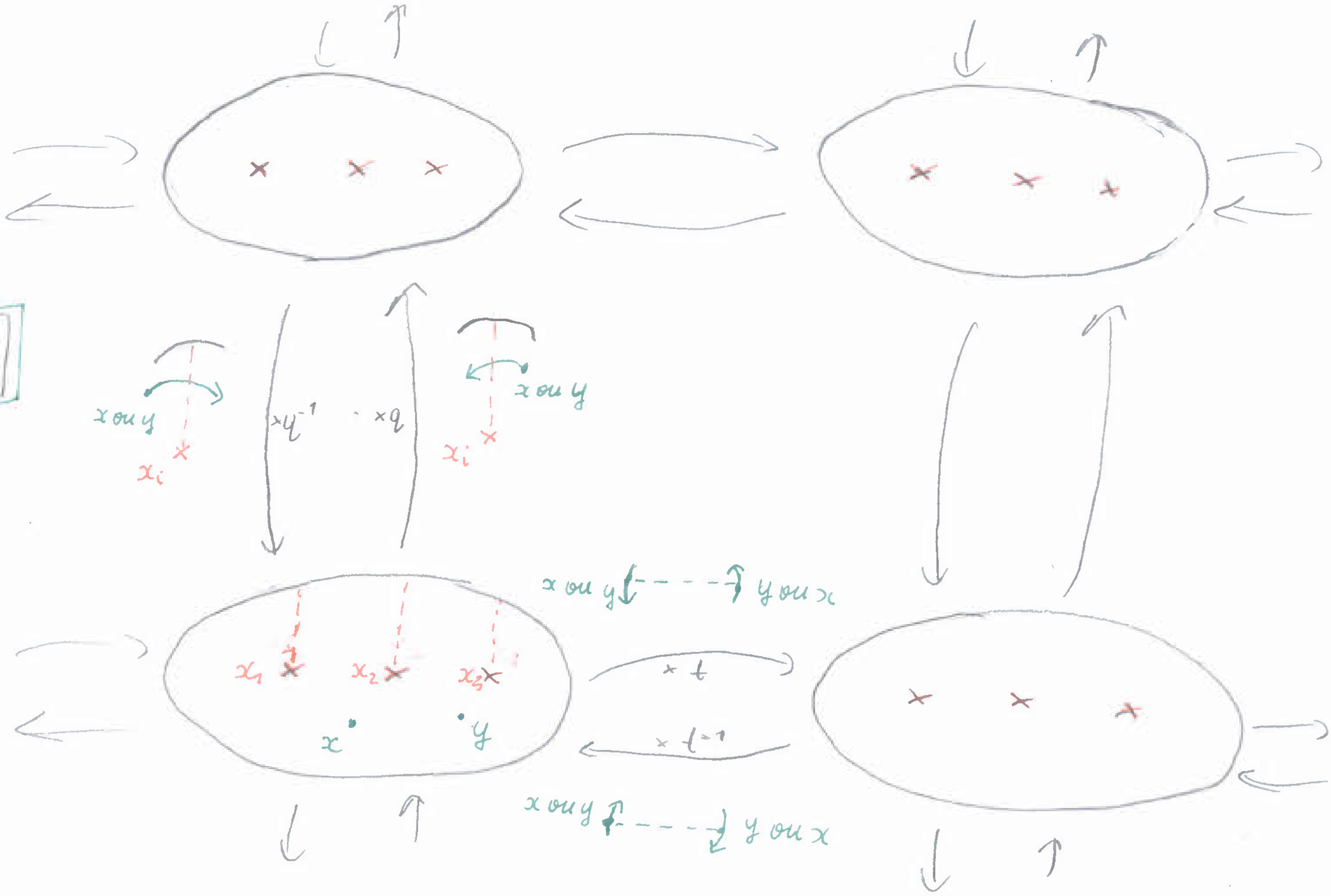
4-variétés non-compactes connexes orientées à bord

$\varphi : \pi_1(\mathcal{E}, c_0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^2$
$\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\qquad (d, d')$

$\pi_1(\hat{\mathcal{E}}, \hat{c}_0) = \operatorname{Ker} \varphi$

$\operatorname{Aut}(p) = \mathbb{Z}^2 = \langle q, t \rangle.$

$\boxed{\hat{\mathcal{E}}}$



$\mathcal{H} = H_2(\hat{\mathcal{E}}; \mathbb{Z}) \in {}_{\Lambda}\mathrm{Mod} \qquad \Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$

Thm 1 : $\mathcal{H} \simeq \Lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (Paoluzzi-Paris'01, Big'03).

à faire !

$B_n \curvearrowright D_n \rightsquigarrow B_n \xrightarrow{L} \operatorname{Aut}_{\Lambda}(\mathcal{H})$

Rmq : On peut écrire des matrices explicites pour L dans les bases du Thm 1.

Thm 2 : L est injective.

à finir

Concrètement,
$f \in MCG(D^2, X_n)$

$\mathcal{E} \xrightarrow[\text{homéo}]{\hat{f}} \mathcal{E}$, $c_0 \mapsto c_0$ $\rightsquigarrow$ $\pi_1(\mathcal{E}, c_0) \xrightarrow[\text{auto}]{\hat{f}_\#} \pi_1(\mathcal{E}, c_0)$

$\Leftarrow \varphi \circ \hat{f}_\# = \varphi$

$\mathcal{H} \xrightarrow[\text{auto}]{\tilde{f}_\#} \mathcal{H}$ Λ-lin. $\leftsquigarrow$ $\hat{\mathcal{E}} \xrightarrow[\text{homéo}]{\tilde{f}} \hat{\mathcal{E}}$ Λ-lin, $\hat{c}_0 \mapsto \hat{c}_0$

[3] Thm 2 $\Rightarrow$ la linéarité des B_n

[a] Avec Thm 1 : $\Lambda = \mathbb{Z}[q^{\pm1}, t^{\pm1}] \hookrightarrow \mathbb{R}$

$q, t \mapsto$ nbs algébriquement indépendants

[b] Sans Thm 1 :

Lemme : ${}_\Lambda\mathrm{Mod} \ni M \hookrightarrow \Lambda^N \Rightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda M \hookrightarrow GL_N(\mathbb{R})$.

□ Frac $\Lambda = \mathbb{Q}(q,t) =: Q$

$\bar{M} := Q \otimes_\Lambda M \hookleftarrow M$ (pas de torsion !)

$\mathrm{Aut}_\Lambda M \hookrightarrow GL_{\underbrace{\dim_Q(\bar M)}_{=m}}(Q) \hookrightarrow GL_m(\mathbb{R})$

$\bar{M} \hookrightarrow Q \otimes_\Lambda \Lambda^N = Q^N \Rightarrow m \leq N$ ⊠

À montrer : $\mathcal{H} \hookrightarrow \Lambda_0^{n(n+1)}$, $\Lambda_0 = \mathbb{Z}[q^{\pm1}, t^{\pm2}] \hookrightarrow \Lambda$

□ $\mathring{F} \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} \mathring{D}_n \xrightarrow[\text{par déform}^n]{\text{retract}^n} \vee^n S^1$

C'est un fibré loc^{nt} trivial, de fibre $\mathring{D}_{n+1} \simeq \vee^{n+1} S^1$.

Ainsi $\mathring{F} \simeq \mathcal{X}$: CW-complexe, avec

produit d'un (1,n)-complexe avec un (1,n+1)-complexe

dim	# cellules
0	1
1	$1\cdot n + (n+1)\cdot 1 = 2n+1$
2	$n(n+1)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \longleftrightarrow & \hat{\mathcal{E}} \\ {\scriptstyle p_{\mathcal{X}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle /(q,t^2)} \\ \mathcal{X} \hookrightarrow \mathring{F} & \hookrightarrow & F \end{array}$$

$\mathrm{Aut}(p_{\mathcal{X}}) \simeq \mathbb{Z}^2$

équivalence d'htpie

$H_*(\hat{\mathcal{X}}; \mathbb{Z})$: $\Lambda_0^{n(n+1)} \xrightarrow{\partial_2} \Lambda_0^{2n+1} \xrightarrow{\partial_1} \Lambda_0$

$\mathcal{H} = H_2(\tilde{\mathcal{E}}; \mathbb{Z}) = H_2(\hat{\mathcal{X}}; \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}\, \partial_2 \underset{\Lambda_0\text{-lin.}}{\hookrightarrow} \Lambda_0^{n(n+1)}$ ⊠

Rmq : Lawrence travaille avec $F \otimes \Lambda_0$ au lieu de $\mathcal{E} \otimes \Lambda$.
Avec un peu plus de travail, on a :

Prop : $\dim_Q Q \otimes_\Lambda \mathcal{H} = \frac{n(n-1)}{2}$.

□ $$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\sim} & F \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle /S_2} \\ \mathcal{X}_e & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E} \end{array}$$

$\mathcal{X}_e$:

dim	# cellules
0	1
1	$n-1$
2	$\frac{n(n-1)}{2}$

Big'01 : descript^n explicite de $\mathcal{X}_e$ & de $H_*(\mathcal{X}_e)$

Budney'02 : interprét^n via la théorie de Morse ⊠

Rmq : D'après Kra'02, on peut dire plus : $B_n \hookrightarrow GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{Z}[t^{\pm1}])$

avec spécialisat^n $q = q_0 \in]0,1[$

4 Sur la structure de $\mathcal{H}$

(a) Première estimation de la taille

Notatⁿ : pour $M \in {}_{\Lambda_0}\mathrm{Mod}$, $\mathrm{rk}\, M := \dim_{Q_0} Q_0 \otimes_{\Lambda_0} M$, $Q_0 = \mathbb{Q}(q, t^2)$.

On a $\mathrm{rk}\,\mathcal{H} - \mathrm{rk}\, H_1(\widehat{X};\mathbb{Z}) + \underbrace{\mathrm{rk}_0(\widehat{X};\mathbb{Z})}_{=0} = \chi(X) = n(n-1)$;

$\Leftarrow [(1-q)p] = 0 \ \forall p \in \widehat{X}$

$\Uparrow$

dans $\widehat{X}$ $\exists$ un chemin $p \longrightarrow q\cdot p$

$p = \{x, y\}$

d'où $\mathrm{rk}\,\mathcal{H} \geq n(n-1)$.

Rmq : Thm 1 $\Rightarrow \mathcal{H} \simeq \Lambda_0^{n(n-1)}$.

(b) Une version relative de $\mathcal{H}$.

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{C}} \arrow[d] & \widehat{\mathcal{U}}^{\varepsilon} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ \mathcal{C} & \mathcal{U}^{\varepsilon} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$\widehat{\mathcal{U}}^{\varepsilon}$, q- et t-stable

$\mathcal{U}^{\varepsilon} = \{\{x,y\} \mid x, y \in D_n,\ |x - x_i| < \varepsilon$ ou $|y - x_j| < \varepsilon$ ou $|x - y| < \varepsilon\}$

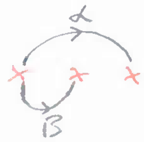
$= \{$paires "ε-problématiques"$\}$

$\mathcal{H}^{\mathcal{U}} := H_2(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{U}}) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_2(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{U}}^{\varepsilon})$

$\mathcal{H}^{\partial} := H_2(\widehat{\mathcal{C}}, \partial\widehat{\mathcal{C}})$

$\mathcal{H}^{\mathcal{U},\partial} := H_2(\widehat{\mathcal{C}}, \partial\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{U}}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ldots$

Ex :



$[\alpha] \in \mathcal{H}_1^{\mathcal{U}}$

$[\alpha * \beta] \in \mathcal{H}^{\mathcal{U}}$

Notⁿ : On utilise les notⁿˢ $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}_1^{\mathcal{U}}$ etc. pour les constructions analogues pour l'espace de configurations d'un point dans D_n.

(c) Formes d'intersection

$\mathcal{H} \times \mathcal{H}^{\mathcal{U},\partial}$ ou $\mathcal{H}^{\mathcal{U}} \times \mathcal{H}^{\partial} \xrightarrow{\langle , \rangle} \Lambda$

$\langle x, y\rangle = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} (q^a t^b x \cdot y)\, q^a t^b$.

$\cdot$: nb algébrique d'intersection

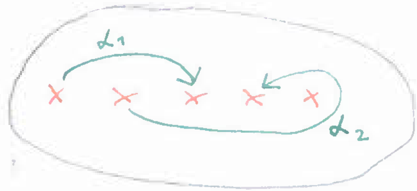
- bien déf. (Kawauchi '96)
- B_n-invariante
- Λ-sesquilinéaire : $\langle \lambda x, \lambda' y\rangle = \bar{\lambda}\lambda' \langle x, y\rangle$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ $\quad \bar{q} = q^{-1}$, $\bar{t} = t^{-1}$
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- non-singulière : $\det \mathrm{Mat}_{\langle , \rangle} \neq 0$
- une forme Hermitienne définie négative pour une spécialisatⁿ $q_0, t_0 \in \mathbb{C}$
  $\Rightarrow B_n \hookrightarrow U_{\frac{n(n-1)}{2}}$

Budney '05

Qu. (François) : crochet de Goldman ?

ⓓ Quelques éléments de $\mathcal{H}^{u,\partial}$ (Big'03)

(on travaille à $q^a t^b$ près)

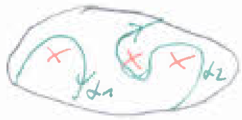
- 

$\alpha_1(\mathring{I}) \cap \alpha_2(\mathring{I}) = \emptyset$

$\mathring{I} \times \mathring{I} \overset{\alpha_1 \times \alpha_2}{\hookrightarrow} \widetilde{\mathcal{C}}$

$\Downarrow$

$\widetilde{S}_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{H}^u$
↑"square"

- 

$\widetilde{S}_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{H}^\partial$

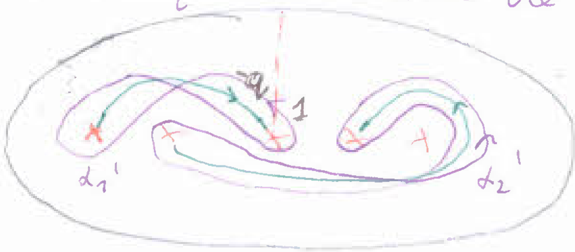
- 

$\widetilde{S}_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{H}^{u,\partial}$

- $\{0 < x < y < 1\} \overset{\alpha \times \alpha}{\hookrightarrow} \widetilde{\mathcal{C}}$ $\rightsquigarrow$ $\widehat{T}_\alpha \in \mathcal{H}^u$ ou $\mathcal{H}^{u,\partial}$
↑triangle

ⓔ Quelques éléments de $\mathcal{H}$

modulo $\widehat{u}$

- 

$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset = \alpha_1' \cap \alpha_2'$

$S^1 \times S^1 \overset{\alpha_1' \times \alpha_2'}{\hookrightarrow} \mathcal{C}$

$\pi_1(S^1 \times S^1) \in \operatorname{Ker} \varphi$.

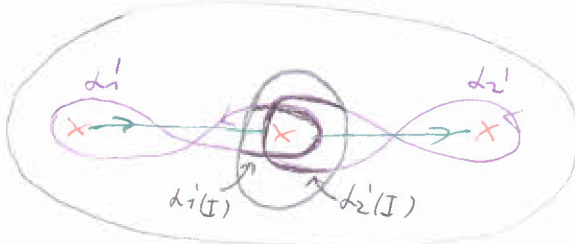
$\Downarrow$

$\widehat{\Sigma}^1_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{H}$
↑tore

$\widehat{\alpha'} = (1-q)\widehat{\alpha}$

$\Downarrow$

$\widehat{\Sigma}^1_{\alpha_1,\alpha_2} = (1-q)\widehat{S}_{\alpha_1,\alpha_2}$

- 

$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{x_i\}$, $\alpha_1' \cap \alpha_2' = \{2\text{ pts}\}$ $= (1-q)^2 \widehat{S}_{\alpha_1,\alpha_2}$

$S^1 \times S^1 \setminus \mathring{I} \times \mathring{I} \overset{\alpha_1' \times \alpha_2'}{\hookrightarrow} \mathcal{C}$

$\partial ▨ = \square \overset{f_3}{\hookrightarrow} \mathcal{C}$

$f_0 = \alpha_1' \times \alpha_2' |_\square$, $f_3 = \mathrm{rot}_{3\pi} \circ f_0$

$f_1(x,y) = f_0(y,x) \Rightarrow f_1 = -f_0$ $\times q t$

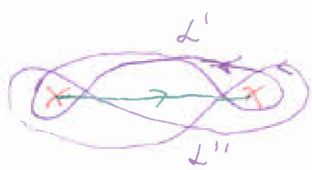
$= \Sigma^2 \longrightarrow \mathcal{C}$

$\pi_1(\Sigma^2) \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$

$\Downarrow$

$\widehat{\Sigma}^2_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{H}$

$\widehat{\Sigma}^2_{\alpha_1,\alpha_2} = (1-q)^2(1+qt)\widehat{S}_{\alpha_1,\alpha_2}$

- 

$\widehat{\Sigma}^3_\alpha \in \mathcal{H}$

$\widehat{\Sigma}^3_\alpha = (1-q)^2(1+qt)(1-t)\widehat{T}_\alpha$

④ Une base de $\mathcal{H}$

$x_i \xrightarrow{\alpha_i} x_{i+1}$

$$v_{i,j} := \begin{cases} \hat{\Sigma}^1_{\alpha_i, \alpha_{j-1}}, & j-i>2 \\ \hat{\Sigma}^2_{\alpha_i,\alpha_{j-1}}, & (i,j)=(1,3) \\ \hat{\Sigma}^1_{\alpha_i, \, x_{i-1} \to x_{i+2}}, & j-i=2,\ i>1 \\ \hat{\Sigma}^3_{\alpha_i}, & j-i=1 \end{cases}$$

$i<j$

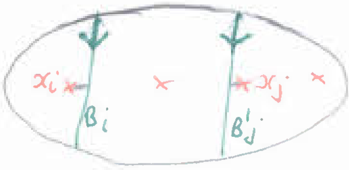
on verra : une base de $\mathcal{H}$

$\rightsquigarrow v'_{i,j} \in \mathcal{H}^{\mathcal{U}}$ de la forme $\hat{S}_{\alpha,\beta}$ ou $\hat{T}_\alpha$, avec $v_{i,j} = \underbrace{P_{i,j}(q,t)}_{\text{polynôme}} v'_{i,j}$ mod. $\mathcal{U}$

<u>Rmq</u> : Inspirat^n : théorie des reps des algèbres de Temperley-Lieb

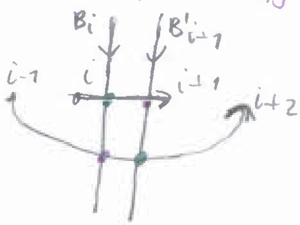
$x_{i,j} := \tilde{S}_{B_i, B'_j} \in \mathcal{H}^\partial$

$i<j$



<u>Lemme</u> : $\langle v'_{i',j'}, x_{i,j} \rangle \begin{cases} \in \Lambda^* & \text{si } i=i' \text{ \& } j=j', \text{ ou } j'=i'+2 \text{ \& } j=i+1 \text{ \& } i \in \{i', i'-1\} \text{ \& } i' \neq 1, \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Pb</u> :



$\langle v'_{i,i+2}, x_{i,i+1} \rangle = -(1+t)$. (mais ceci n'invalide pas ce qui suit)

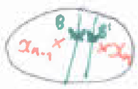
<u>Crl</u> : Les $v_{i,j}$ sont linéairement indépendants sur $Q = \mathbb{Q}(q,t)$.

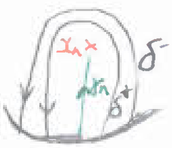
<u>On a vu</u> : $\dim_Q Q \underset{\Lambda}{\otimes} \mathcal{H} = \frac{n(n-1)}{2}$.

<u>Crl</u> : Les $v_{i,j}$, $i<j$, forment une base de $Q \underset{\Lambda}{\otimes} \mathcal{H}$.

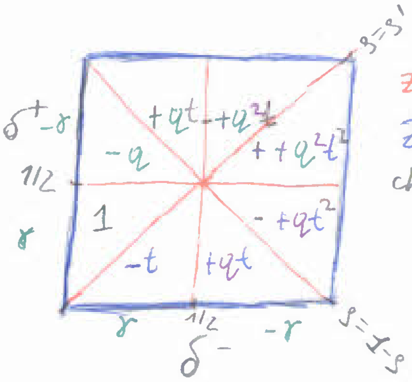
<u>Lemme</u> : $v = \sum c_{i,j} v_{i,j} \in \mathcal{H}$, $c_{i,j} \in Q \Rightarrow c_{i,j} \in \Lambda$.

□ • Lemme : $x_{n-1,n} = (1-q)(1+qt)(1-t)\hat{T}_{\gamma_n}$ mod. $\mathcal{U}$





$I \times I \xrightarrow{\delta \times \delta'} \mathcal{U}$ t.q. $\forall s$, les 4 points $\delta^\pm(s)$, $\delta^\mp(1-s)$ sont ε-proches



Zone rouge $\overset{\delta^- \delta^+}{\hookrightarrow} \hat{\mathcal{U}}$

Zone bleue $\overset{\delta^- \delta^+}{\hookrightarrow} \widehat{\partial C}$

chaque triangle ouvert $\rightarrow$ un multiple de $\hat{T}_{\gamma_n}$ ▨

• lemme : $x_{i,j} = (1-q)^2 \times x'_{i,j}$.

• $n=3$: $\langle v, \underset{\substack{\| \\ (1-q)^2 x'_{2,3} \\ \| \\ (1-q)(1+qt)(1-t)\hat{T}_{\gamma_n}}}{x_{2,3}} \rangle = (1-q)^2(1+qt)(1-t)c_{2,3} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}(1+qt)(1-t)c_{2,3} \in \Lambda \\ (1-q)c_{2,3} \in \Lambda\end{array}\right\} \Rightarrow c_{2,3} \in \Lambda$;

$c_{1,2} \in \Lambda$ par symétrie

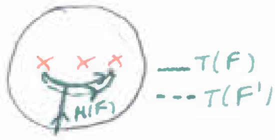
$c_{1,3} \in \Lambda$: calcul.

• $n \rightsquigarrow n+1$: récurrence ⊠

5 Sur l'injectivité de L (preuve de Bigelow)

a) Les ingrédients de la preuve

• nouille $N \rightsquigarrow \Sigma_N = \underset{\uparrow \text{triangle}}{T_N} \rightsquigarrow \widehat{\Sigma}_N = \widehat{T}_N \in \mathcal{H}^{u,\partial}$



• fourchette $F \rightsquigarrow \Sigma_F = \underset{\uparrow \text{carré}}{S_{T(F),T(F')}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utiliser } H(F)}}{\rightsquigarrow} \widehat{\Sigma}_F = \widehat{S}_{T(F),T(F')} \in \mathcal{H}^u$

à faire ↗ • $\langle N,F\rangle := \langle \underset{\mathcal{H}^{u,\partial}}{\widehat{\Sigma}_N}, \underset{\mathcal{H}^{u}}{\widehat{\Sigma}_F}\rangle$, bien définie

• $\langle N,F\rangle$ invariant par isotopie

• Lemme clé : $\langle N,F\rangle = 0 \iff \exists F \underset{\text{isotopie}}{\rightsquigarrow} \widehat{F}$ t. q. $N \cap T(\widehat{F}) = \emptyset$.

• Lemme général (Fathi et al. '79) : ⇒ ↑ élimination de bigones

Σ : surface orientée
α, B : courbes fermées simples, $\alpha \pitchfork B$

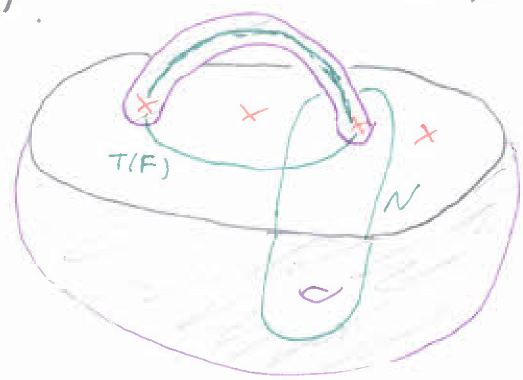
$\exists \alpha \underset{\text{isotopie}}{\rightsquigarrow} \widehat{\alpha}$ avec $\#\{\alpha' \cap B\} < \#\{\alpha \cap B\}$

$\Updownarrow$

$\exists$ bigone

Cor : La m̂ équivalence pour $\alpha = N$ & $B = T(F)$.

□ On ferme N & $T(F)$:



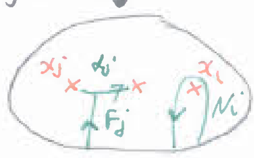
⊠

à faire ↗ • Lemme principal : $L(h) = 0 \Rightarrow \langle N, h(F)\rangle = \langle N,F\rangle$.

b) Preuve du Thm 2.

□ Soit $L(h) = 0$. Alors $\forall i \notin \{j, j+1\}$, on a $\langle N_i, h(F_j)\rangle = \langle N_i, F_j\rangle = 0$.

$h(\alpha) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{él}^{\text{n}} \text{ de bigones}}}{\rightsquigarrow} \pm \alpha \Rightarrow h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{twist de Dehn}}}{\tau_\delta^k}$, $k \in \mathbb{Z}$ (ou $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ si $n=2$).



$-1 = \langle N_1, F_1\rangle = \langle N_1, \tau_\delta^k(F_1)\rangle = -(q^n t)^{2k}$

$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow h = \mathrm{Id}$ ⊠

(c) Lemme principal.

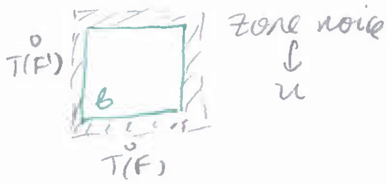
Preuve naïve : $L(h) = 0 \Rightarrow h$ agit trivialement sur $\mathcal{H} \Rightarrow h\widehat{\widetilde{\Sigma}}_F = \widetilde{\Sigma}_F$

$\langle N, h(F)\rangle = \sum_{a,b} \langle q^a t^b \widehat{\Sigma}_N, \underbrace{h\widehat{\widetilde{\Sigma}}_{F}}_{= \widetilde{\Sigma}_F} \rangle = \langle N, F\rangle$.

PB : $\widetilde{\Sigma}_F$ vit dans $\mathcal{H}^u$, pas dans $\mathcal{H}$!

Solution (Big'01) : $\ldots \to \underset{\mathcal{H}}{\underset{\|}{H_2(\hat{e})}} \to \underset{\mathcal{H}^u}{\underset{\|}{H_2(\hat{e}, \hat{u})}} \to H_1(\hat{u}) \to \ldots$

$[\widehat{F}_F] \mapsto [b]$



Lemme à ressort : $(q^{-1}-1)^2(1+q^{-1}t)[b] = 0$. (dans Big'03, $q^{-1} \mapsto q$).

$\square$

"chasse aux lacets" $\boxtimes$

Cré : $\exists\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}^u$

$[\widehat{\Sigma}'_F] \mapsto \underbrace{(q^{-1}-1)^2(1+q^{-1}t)}_{= P(q,t)}[\widehat{F}_F]$

$\Rightarrow P \cdot \langle N, F\rangle = P \cdot \langle N, h(F)\rangle \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \langle N, F\rangle = \langle N, h(F)\rangle$

Λ sans diviseurs de zéro

Rmq : • on peut décrire $[\widehat{\Sigma}'_F]$ explicitement

(? cf. $\widehat{\Sigma}^2_{\alpha_1,\alpha_2} = (1-q)^2(1+qt)\widehat{S}_{\alpha_1,\alpha_2}$

?)

• Big'01 : $[\widehat{\Sigma}'_{F_{ij}}]$, $i<j$, forment une base de $\mathcal{H}$

(d) Sur le couplage $\langle N, F\rangle$

$\langle N, F\rangle := \langle \overset{\mathcal{H}^{u,\partial}}{\widehat{\Sigma}_N}, \overset{\mathcal{H}^u}{\widehat{\Sigma}_F} \rangle = \frac{1}{P(q,t)} \langle \overset{\mathcal{H}^{u,\partial}}{\widehat{\Sigma}_N}, \overset{\mathcal{H}}{\widehat{\Sigma}'_F} \rangle$

• Σ_N fermée dans $\hat{e} \Rightarrow \widehat{\Sigma}_N \cdot v$ bien déf. $\forall v \in \mathcal{H}$

• La somme dans $\langle \widehat{\Sigma}_N, \widehat{\Sigma}_F\rangle$ est finie, car s'exprime en termes des $\{z_i\} = N \cap T(F)$