6

Pavages

6A. Croque, carré

On considère un rectangle divisé en carrés, comme, par exemple, le rectangle 5×9 de la figure 9.

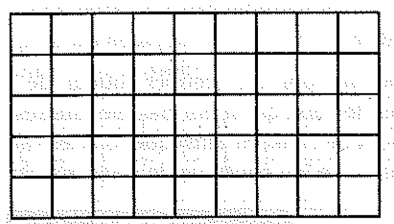

Figure 9

Le croque est un jeu à deux joueurs qui se joue de la façon suivante. Le premier joueur choisit l'un des 45 carrés, disons celui marqué « 1 » sur la figure 10 et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite. (Une interprétation de ce jeu consiste à mettre un carré de

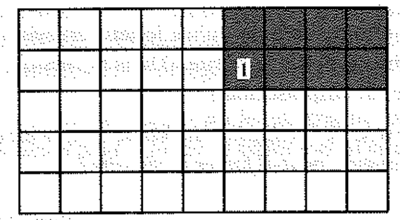

Figure 10

chocolat sur chaque case ; le joueur « enlève des carrés » en mangeant les carrés de chocolat qui sont dessus. Une autre interprétation est que l'échiquier est en chocolat et qu'un coup consiste à croquer un coin nord-est de l'échiquier.) Le deuxième joueur choisit alors l'un des carrés qui n'ont pas été enlevés, disons le carré marqué « 2 » sur la figure 11, et l'enlève ainsi que tous les carrés situés en haut à droite de celui-ci.

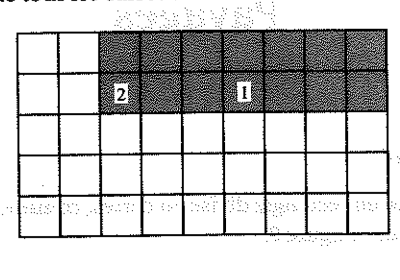

Figure 11

Ensuite c'est au tour du premier joueur de choisir un carré, n'importe lequel de ceux qui n'ont pas été enlevés (disons celui qui est marqué « 3 », et de l'enlever ainsi que tous les carrés situés en haut à droite de celui-ci. Le jeu continue de cette manière jusqu'à ce qu'il

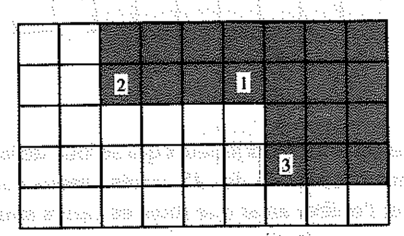

Figure 12

s'arrête, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un joueur enlève le carré inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie. (Dans la version imagée, le carré inférieur gauche est empoisonné.)

> **Problème 6 A.** *Si l'échiquier du jeu de croque est carré, l'un des deux joueurs peut-il forcer la victoire ?*

6 B. Croque, mince

Certains rectangles sont « minces » et d'autres ne le sont pas ; les moins minces, dans le sens entendu ici, sont les carrés. Le jeu de croque sur des échiquiers carrés a été résolu ; peut-on faire de même sur les

échiquiers minces ? Si l'échiquier est 1×1, le premier joueur perd pour la simple raison qu'il doit jouer ; si l'échiquier est $1 \times n$, le premier joueur peut forcer la victoire simplement en enlevant tous les carrés sauf celui du bas à gauche. Le premier cas qui demande un peu réflexion est $2 \times n$ ($n \geqslant 2$).

> **Problème 6 B.** *Si l'échiquier du jeu de croque est $2 \times n$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$), l'un des deux joueurs peut-il forcer la victoire ?*

6 C. Croque, infini

On peut définir le jeu de croque de la même façon sur un échiquier infini du moment qu'il reste un carré inférieur gauche. En particulier, on peut le définir pour un échiquier $2 \times \infty$, c'est-à-dire à deux lignes qui s'étendent à l'infini vers la droite.

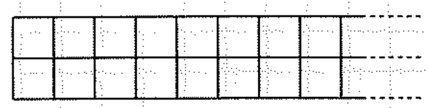

Figure 13

> **Problème 6 C.** *Si l'échiquier du jeu de croque est $2 \times \infty$, l'un des deux joueurs peut-il forcer la victoire ?*

6 D. Croque, fini

Dans les problèmes précédents du jeu de croque fini, la question de la stratégie gagnante a été résolue dans les deux cas extrêmes des carrés et des rectangles minces. Peut-on également résoudre le cas général ?

> **Problème 6 D.** *Si l'échiquier du jeu de croque est fini, l'un des deux joueurs peut-il forcer la victoire et, si oui, lequel ?*

6 E. Plan, trois couleurs

> **Problème 6 E.** *Si tous les points du plan sont colorés d'une couleur parmi trois, y a-t-il obligatoirement deux points de même couleur à exactement un centimètre de distance ?*