Cohomologie des structures auto-distributives monogènes finies

Victoria LEBED

Nantes, 28/04/15

1 Introduction

$(S, \triangleright)$ ③ $a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$

② $\tau_a : S \to S$, $b \mapsto a \triangleright b$ sont inversibles

① $a \triangleright a = a$

③ = shelf | +② = rack | +① = quandle

Ex. :
- $\{-r, \dots, m-1\}$ $r \geq 0$, $m \geq 1$, $a \triangleright b = b+1$ (où $(m-1)+1 = 0$) (shelf cyclique $C_{r,m}$)
- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $a \triangleright b = b+1$ (rack cyclique C_m)
- gpe G, $a \triangleright b = aba^{-1}$ (quandle de conjugaison $\mathrm{Conj}(G)$)
- $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ l'unique $\triangleright$ a.-d. t.q. $a \triangleright 1 \equiv a+1 \mod 2^n$ (table de Laver A_n) ← théorie des ensembles (Laver '95, Patrick Dehornoy) propriétés mystérieuses...

deux pôles du monde "combinatoirement chaotique" des shelfs monogènes finis ← Drápal '97

Cohomologie des shelfs / racks / quandles

$C^k(S, \underset{\text{gpe ab.}}{A}) = \{\varphi : S^k \to A\}$ $\quad$ $(\varphi(\dots, a, a, \dots) = 0)$

$(d^k\varphi)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} [\varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i \triangleright a_{i+1}, \dots, a_i \triangleright a_{k+1}) - \varphi(\widehat{a_i})]$

$C^0(S, A) = A$ $\quad$ $d^0 = 0$

Applications : → invariants de tresses positives / tresses / noeuds de dim. qcq (shelfs, racks, quandles) (Carter etc. '99)

→ classificat$^\circ$ des algèbres de Hopf (Andruskiewitsch-Graña '03)

Cas de racks : → $\dim_{\mathbb{Q}}(H^k_R(S, \mathbb{Q})) = |\mathrm{Orb}(S)|^k$ (Etingof-Graña '03)

$\mathrm{Orb}(S) = S/_{a \sim b \triangleright a}$

générateurs : $\varphi_{\bar{o}}(\bar{a}) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{a_i \in o_i}$, $\bar{o} \in \mathrm{Orb}(S)^k$.

→ $H^k_R(S, \mathbb{Z})$ peut avoir de la torsion ⇝ invariants

→ nombreux résultats, calculs etc.

Cas de shelfs : → rien avant 2014.

Intéressant ? Oui ! $\varprojlim_n A_n \overset{\text{conjecture}}{\supseteq} \mathcal{F}_1$ = shelf monogène libre $\xrightarrow{\text{Dehornoy}}$ un ordre total sur les tresses ⇝ algorithmes & propriétés structurelles

→ Dehornoy-L. '14 : • $H^k_R(A_n, A) \simeq A$ $\forall A, \forall n, \forall k \leq 3$

fonct^{ns} constantes $[C^k_{(\alpha)} : \bar{a} \mapsto \alpha] \leftrightarrow \alpha$

• $Z^k_R(A_n, A)$ reflètent la richesse combinatoire des A_n

$\to$ L.'15 : • $H^k_R(S,A) \simeq A \quad \forall$ shelf m.-g.f.

• $B^k_R(S,A) \simeq A^{Q_k(|S|)}$, $Q_k(x) = \frac{x^k - x^{k \bmod 2}}{x+1}$

• $Z^k_R(S,A) \simeq H^k \oplus B^k$

+ descript^n explicite

} pour les A_n & $C_{r,m}$

⚠ $H^k_R(C_{r,m};\mathbb{Z})$ n'est plus engendré par les f^{ns} const. en général

2 Étude via projecteurs

shelf $(S,\triangleright) \rightsquigarrow$ sous-semigrpe T_S de $\mathrm{End}(S)$ engendré par les τ_a.

$\rightsquigarrow$ algèbre $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{anneau comm. (souvent } \mathbb{Z})}}{R}T_S$; $\varepsilon : \begin{array}{l} RT_S \to R \\ \tau_a \mapsto 1 \end{array}$

$A \in {}_R\mathrm{Mod} \rightsquigarrow C^k(S,A) \curvearrowleft RT_S$, $\varphi \cdot \tau_a : (b_1,\dots,b_k) \mapsto \varphi(a \triangleright b_1, \dots, a \triangleright b_k)$.

Déf. : Projecteur (semi-)fort sur R = $P \in RT_S$ t.q. 1) $\varepsilon(P) = 1$
2) $P\tau_a = P \ \forall a \in S$.
3) $\tau_a P = P \ \forall a \in S$.

Lemme : • P semi-fort $\Rightarrow P^2 = P$
• — // — & P' fort $\Rightarrow P = P'$
• — // — & $b \sim b' \Rightarrow P \triangleright b = P \triangleright b' \in RS$.

Thm (inspiré d'Etingof-Graña) :
• P semi-fort $\Rightarrow C^\cdot(S,A) \underset{\text{cxes}}{=} C^\cdot(S,A) \cdot P \oplus C^\cdot(S,A) \cdot (1-P)$

$\underset{\substack{// \\ C_{inv}(S,A) := \{\varphi : S^k \to A \mid \forall a,\ \varphi \cdot \tau_a = \varphi\}}}{}$ $\qquad$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{acyclique}}}{}$

• P fort $\Rightarrow C^\cdot(S,A) \simeq (C^\cdot(\mathrm{Orb}(S),A), 0) \oplus$ (un cxe acyclique)

Crl : • P fort $\Rightarrow H^k(S,A) \simeq A^{\mathrm{Orb}(S)^{\times k}}$. $pr : S \twoheadrightarrow \mathrm{Orb}(S)$
$[\varphi \circ pr^{\times k}] \leftarrow\!\shortmid \varphi$

• cas S monogène, A R-algèbre : $H^k(S,A) \underset{A\text{Mod}}{\simeq} A$, générateur : $c^k_{(1)}$.

• cas $R = A = \mathbb{Q}$: $\dim_{\mathbb{Q}}(Z^k) = Q_k(|S|) + Q_{k+1}(|\mathrm{Orb}(S)|) + 1$
$\dim_{\mathbb{Q}}(B^k) = Q_k(|S|) - Q_k(|\mathrm{Orb}(S)|)$.

Ex. : ① S rack, T_S fini $\Rightarrow \frac{1}{|T_S|}\sum_{t \in T_S} t$ est un proj. fort sur $R \ni \frac{1}{|T_S|}$.

② A_n : • $2^n \triangleright a = a$
• $a \triangleright 2^n = 2^n$
• $(2^n - 1) \triangleright a = 2^n$
$\Rightarrow \tau_{2^n-1}$ — // — sur $\forall R$

③ $C_{r,m}$: $\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \tau_0^{r+i}$ — // — sur $R \ni \frac{1}{m}$.

④ J_1 : pas de proj. semi-fort

⑤ $(S, a \triangleright b = a)$: Bcp de proj. semi-forts. $\tau_a . b \mapsto a$, $\tau_a + \tau_{a'} - \tau_{a''}$, etc
$|S| \geq 2$ pas de proj. fort

$H^\cdot(S,A) \simeq H_{inv}(S,A) \simeq A$
$[c_{(1)}] \leftarrow\!\shortmid \alpha$

Rmq : · Les "moyenisat$^{\text{ns}}$" forment un type essentiel de projecteurs.

· Trichotomie :

1) pas de proj.
2) unique proj. fort
3) plusieurs proj. semi-forts

T_S fini :
1) impossible
3) $T_S \curvearrowright$ "proj. atomiques" transit$^{\text{vt}}$ & par isom-smes.

3> Étude via rétractions

Déf. : **Rétract** de $(S, \triangleright) = S' \subseteq S$ t.q. $\exists \underset{\text{rétraction}}{t} \in T_S$ avec 1) $t \triangleright S = S'$, 2) $t|_{S'} = Id_{S'}$.

Lemme : · S' est un sous-shelf de $(S, \triangleright)$

· $t^2 = t$.

Déf. : **Rack rétract** = rétract S' t.q. $(S, \triangleright)$ est un rack.

Rmq : Il y a une relat$^{\text{n}}$ avec les projecteurs (semi-) forts.

Thm : T_S fini $\Rightarrow$ · S admet des rack rétracts

· $T_S \curvearrowright$ {rack rétracts de S} transit$^{\text{vt}}$ & par iso de rack

$\rightsquigarrow$ On définit le **rack type** $RT(S, \triangleright)$, à iso près.

Thm : S' rétract de $(S, \triangleright) \Rightarrow$

· $H^\bullet(S, A) \underset{R\text{Mod}}{\simeq} H^\bullet(S', A)$

· $C_{inv}(S, A) \underset{\text{cxes}}{\simeq} C_{inv}(S', A)$

induits par $S' \overset{i}{\hookrightarrow} S$ & $S \overset{t\triangleright}{\twoheadrightarrow} S'$.

Crl : Le calcul de la cohom. pour les shelfs (quasi-) finis se réduit à celui pour les racks (quasi-) finis.

Prop. : rétract$^{\text{n}}$ $S \overset{t\triangleright}{\twoheadrightarrow} S'$ $\rightsquigarrow$ $Orb(S) \overset{\xi}{\longleftrightarrow} Orb(S')$ (bijection)
$O_i \overset{t\triangleright}{\twoheadrightarrow} O_{\xi(i)}$

Thm : T_S fini & $R \ni \frac{1}{|T_{RT(S)}|}$ $\Rightarrow$ $H^k(S, A) \simeq A^{Orb(S)^{\times k}}$
$[\varphi \circ pr^{\times k}] \longleftrightarrow \varphi$

Ex : ① S rack : le seul rétract possible est S, qui l'est ssi $Id_S \in T_S$

④ J_1 : pas de rétracts

⑤ $RT(S, a \triangleright b = a) = \{e\}$, {rétracts} $= \{\{a\} \mid a \in S\}$.

② $RT(A_n) = \{e\} \leftarrow$ le rack trivial

③ $RT(C_{r,m}) = C_m$

(6 = 2·3) RT (shelf m.-g. f.) est un rack cyclique.

réduction : $S \twoheadrightarrow \underline{\bar{S}} := S/\approx$ $\quad$ $b \approx b'$ si $\forall a \in S$, $a \triangleright b = a \triangleright b'$
$\triangleright \rightsquigarrow \bar{\triangleright}$

Prop. : {rétracts de S}/iso $\overset{\exists F}{\rightleftarrows}$ {rétracts de $\bar{S}$}/iso $\quad$ t.q. $R \underset{\text{shelfs}}{\simeq} F(R)$

Drápal '97 : S m.-g. f. $\Rightarrow S \twoheadrightarrow \bar{S} \twoheadrightarrow \bar{\bar{S}}$ $\twoheadrightarrow$ "$A_n \hat{\times} C_{\bar{r}, \bar{m}}$" $= \bigsqcup_{i \in A_n} C_{r(i), m(i)}$, avec $(i, a) \triangleright (j, b) = (i \triangleright_{A_n} j,\ b + 1 + c_{ij} \bmod m(j))$

soumis à certaines conditions

Thm : $H^k(C_{r,m} ; A) \simeq A$
$[\varphi^k_{(\alpha)}] \leftrightarrow \alpha$

$\varphi^k_{(\alpha)}(b_1, \dots, b_k) = \begin{cases} \alpha & \text{si } b_2 = b_4 = \dots = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\square$ Bases explicites de B^k & Z^k. $\square$

Rmq : $[c^k_{(\alpha)}] = m^{[\frac{k}{2}]} [\varphi^k_{(\alpha)}]$ dans $H^k(C_m ; A)$
$\Rightarrow$ les f^{ns} constantes ne sont plus générateurs en général.