Catégorie $\mathcal{O}$: séance 3

Action du centre

Victoria LEBED

plan :

I. Catégorie $\mathcal{O}$: origines et motivations.

II. Rappels : systèmes des racines et groupe de Weyl.

III. Simples de dimension finie dans $\mathcal{O}$.

IV. Théorème d'Harish-Chandra.

V. Exemple : sl_2.

VI. Catégorie $\mathcal{O}$ est artinienne.

VII. Sous catégories $\mathcal{O}_\chi$ et blocs.

I. catégorie $\mathcal{O}$: origines et motivations

~ préhistoire : · théorie classique de Cartan-Weyl : reps de dim. finie
· 1966, thèse de Verma : modules de Verma

~ histoire : · 1970', Bernstein-Gelfand-Gelfand : catégorie $\mathcal{O}$ ← "основной" (= "principal" en russe)
· ~1980 conjecture de Kazhdan-Lusztig
· 1990', Beilinson-Ginzburg-Soergel : dualité de Koszul

~ motivations : · programme de Langlands

~ outils : · géométrie algébrique

$$\boxed{\begin{matrix} \operatorname{mod} U\mathfrak{g} \\ \cap \\ \mathcal{O}_{int} \\ \cap \\ \mathcal{O} \\ \cap \\ \mathcal{C} \\ \cap \\ \operatorname{Mod} U\mathfrak{g} \end{matrix}}
\begin{matrix} \leftarrow \text{dim. finie} \\ \\ \leftarrow \text{poids entiers} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{modules de poids avec } \dim M_\lambda < \infty \end{matrix}$$

<u>but</u> : trouver une sous-catégorie de $\operatorname{Mod} U\mathfrak{g}$ suffisamment générale pour être intéressant, sans pourtant en perdre contrôle

<u>la sol^n</u> dépend des propriétés souhaitées

<u>idée</u> : tout ce qui "provient" des <u>modules de Verma</u>, p. ex. dans le sens des <u>filtrations finies</u> :
$\{\forall M \in \mathcal{O}\ \exists\ 0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M,\ \forall M_i \in \mathcal{O}$,
t.q. $\forall\ M_{i+1}/M_i$ est un module de + haut poids (i.e. un quotient d'un mod. de Verma)

<u>réalisation</u> : conditions de <u>finitude</u>

<u>3 exemples qui montrent "la non-trivialité" de $\mathcal{O}$</u> :

1) $\mathcal{O}$ n'est <u>pas tensorielle</u> : $M(\lambda) \otimes M(\mu) \notin \mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2)$ preuve élégante ?
<u>rmq</u> : tout de m. $M \otimes N \in \mathcal{O}$ $\forall M \in \mathcal{O}$ et $N \in \operatorname{rep} U\mathfrak{g}$.

2) un module dans $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2)$ qui n'est <u>pas engendré par ses vecteurs de + h. p.</u>
base $v_i, i \geq 0, u_i, i \geq 1$
$wt(v_i) = wt(u_i) = -2i$
$v_n \xmapsto{f} v_{n+1}$ $\quad v_n \xmapsto{e} u_{n-1} - n(n-1) v_{n-1}$
$u_n \xmapsto{f} u_{n+1}$ $\quad u_n \xmapsto{e} -(n-2)(n+1) u_{n-1}$.
· engendré par v_0
· $\operatorname{Ker} e = \mathbb{C} u_1 \oplus \mathbb{C} u_2$, $U(\mathfrak{sl}_2) \cdot \operatorname{Ker} e = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{C} u_i$.

3) le thm de <u>réductibilité complète</u> n'a <u>plus</u> lieu dans $\mathcal{O}$ (c.f. thm de Weyl pour $\operatorname{mod} U\mathfrak{g}$).

II. Rappels : systèmes de racines et groupe de Weyl

Système de racines (réduit) $\stackrel{\text{déf}}{:}$ la donnée de :

- un espace euclidien $\underline{E} \simeq \mathbb{R}^{\oplus \ell}$ muni d'une forme $(\cdot,\cdot)$ · bilinéaire · symétrique · non-dégénérée
- un ensemble fini $\underline{\Phi} \subset E \setminus \{0\}$

qui satisfont :

(1) $\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(\Phi) = E$

(2) $\forall \alpha \in \Phi$, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm \alpha\}$

(3) $\forall \alpha \in \Phi$, $\underline{s_\alpha(\Phi) = \Phi}$, où
- $s_\alpha : \boxed{\lambda \mapsto \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha}$ est la réflexion % α
- $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ est la coracine de α

(4) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, $\underbrace{(\beta, \alpha^\vee)}_{\text{déf}} \in \mathbb{Z}$

l'invariant de Cartan

Un choix d'une base (= système des racines simples) $\underline{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ $\rightsquigarrow$ $\Phi = \underset{\uparrow}{\Phi_+} \sqcup \underset{\uparrow}{\Phi_-}$

racines positives / négatives

Les systèmes de racines positives Φ^+ se caractérisent par :
- $\forall \beta \in \Phi$, $\#\{\pm\beta\} \cap \Phi^+ = 1$
- $\forall \beta, \gamma \in \Phi^+$ t.q. $\beta + \gamma \in \Phi$, on a $\beta + \gamma \in \Phi^+$.

Chambre de Weyl $\stackrel{\text{déf}}{:}$ composante connexe de $E \setminus \bigcup_{\alpha_i \in \Pi} \alpha_i^\perp$.

$\boxed{\text{bases de } \Phi \longleftrightarrow \text{chambres de Weyl} \circlearrowleft W}$ action transitive simple

$\Pi \longleftrightarrow \underline{C_\Pi} := \{\lambda \in E \mid (\lambda, \alpha_i) > 0 \ \forall \alpha_i \in \Pi\}$

Deux codages de Φ

1) matrice de Cartan $((\alpha_i, \alpha_j^\vee))_{\alpha_i, \alpha_j \in \Pi}$
$\updownarrow$
2) diagramme de Dynkin $\Gamma(\Pi)$

} ne dépendent pas du choix de Π ! (car W-stables)

Réseau de racines : $\underline{Q} := \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\Phi) = \bigoplus_{\alpha_i \in \Pi} \mathbb{Z}\alpha_i$.

Réseau de poids (intégral) : $\underline{P} := \{\lambda \in E \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Pi\}$ $\left\{ \begin{array}{l} Q \supset \underline{Q}^+ \\ \cap \\ P \supset \underline{P}^+ \end{array} \right\}$ partiellement ordonnés

$P = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varpi_i$, où les $\underline{\varpi_i}$ sont les poids fondamentaux : $(\varpi_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$. poids dominants

On considère un élément spécial $\underline{\rho} := \sum_{i=1}^{\ell} \varpi_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ caractérisé par :

$(\rho, \alpha^\vee) = 1$, i.e. $\boxed{s_\alpha \rho = \rho - \alpha}$ $\forall \alpha \in \Pi$.

Groupe de Weyl W $\overset{\text{déf}}{:}$ le groupe des symétries de Φ engendré par les $s_\alpha, \in GL(E)$
$\alpha\in\Phi$ (ou Π).

<u>Rmq</u>: $\cdot W(\Phi)=\Phi$ & Φ engendre $E \Rightarrow \# W<\infty$.

$\cdot W$ est un <u>gpe de Coxeter</u>.

On définit la longeur des éléments de W par $\ell(\underbrace{s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}}_{\text{expression réduite}})=r$

<u>Lemme</u>: la forme $(\cdot,\cdot)$ est W-invariante, i.e. $\forall \beta,\gamma\in\Phi$ on a:
$(s_\alpha\beta,\gamma)=(\beta,s_\alpha\gamma)$ $\forall \alpha\in\Pi$, ou $(w\beta,w\gamma)=(\beta,\gamma)$ $\forall w\in W$.

Dans le cadre des <u>$\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples</u>,

- $E=\mathfrak{h}^*$, muni de la forme de Killing $(\lambda,\mu)=Tr(ad\lambda\cdot ad\mu)$.
- $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.
- <u>$\langle\beta,\alpha^\vee\rangle=\beta(h_\alpha)$</u>, i.e. $\alpha^\vee \xleftrightarrow{\text{Killing}} h_\alpha$
- on retrouve la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$
- $W(sl_n)=S_n \curvearrowright \mathfrak{h}=\{a\in M_n \mid tr\, a=0\}$ par permutations.

III. Simples de dimension finie

<u>Prop</u> : $\{\text{simples de } \mathcal{O}\} = \{L(\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$

<u>Th</u> : $\boxed{\dim L(\lambda) < \infty \Leftrightarrow \lambda \in P^+ \Leftrightarrow \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu} \quad \forall \mu \in \mathfrak{h}^*, \forall w \in W}$

$\triangledown$ (1) $\dim L(\lambda) < \infty \Rightarrow$ [la théorie pour $\mathfrak{sl}_2$] $\Rightarrow (\lambda, \alpha_i^\vee) = \lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0 \ \forall i \Rightarrow \lambda \in P^+$.

(2) $\lambda \in P^+ \Rightarrow \forall$ ~~sous~~ $\mathfrak{s}_i$-module engendré par v^+ a $\dim < \infty$

$M := \sum$ sous-$\mathfrak{s}_i$-modules de $L(\lambda)$ de dim. $< \infty$, $\overset{\Downarrow}{M \neq \emptyset}$

Soit N un tel sous-$\mathfrak{s}_i$-module, alors $\mathfrak{g} \otimes N$ l'est aussi, ainsi que l'image de $\mathfrak{g} \otimes N \xrightarrow[\mathfrak{g}\text{-mod.}]{} L(\lambda)$.
$x \otimes v \mapsto xv$

M est alors un sous-$\mathfrak{g}$-module de $L(\lambda)$ qui est simple, donc $M = L(\lambda)$.

Les e_i et f_i sont ainsi loc^{nt} nilpotents sur $L(\lambda) \Rightarrow r_i := \exp\rho(e_i) \exp\rho(-f_i) \exp\rho(e_i) \in \mathrm{Aut}\, L(\lambda)$ est bien défini.

$\forall \mu \in \mathrm{wt}\, L(\lambda)$, $L(\lambda)_\mu \subseteq$ sous-$\mathfrak{s}_i$-module finie de $L(\lambda) \Rightarrow$ [cas $\mathfrak{sl}_2$] $\Rightarrow r_i(L(\lambda)_\mu) = L(\lambda)_{s_i\mu} \Rightarrow$

[les s_i engendrent W] $\Rightarrow \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu} \ \forall w \in W$.

(3) $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu} \ \forall w \in W \Rightarrow \mathrm{wt}(L(\lambda))$ est W-stable $\Rightarrow \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha \in \lambda - Q^+ \Rightarrow \underset{\lambda \in P^+.}{\overset{\Downarrow}{(\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{N}_0 \ \forall \alpha \in \pi}}$

En plus $\forall \mu \in \mathrm{wt}(L(\lambda)) \subseteq \lambda - Q^+ \subset P \ \exists!\, \underset{\text{W permute les chambres de Weyl.}}{w \in W}$ avec $w\mu \in P^+$. Or $w\mu \in \mathrm{wt}(L(\lambda)) \subseteq \lambda - Q^+$,

et $\#(P^+ \cap (\lambda - Q^+)) < \infty$, donc $\#\,\mathrm{wt}(L(\lambda)) < \infty$, et $\dim L(\lambda) < \infty$ $\triangledown$.

IV Théorème d'Harish-Chandra

<u>but</u> : ① comprendre les <u>sous modules</u> de $M(\lambda)$
② <u>thm</u> de <u>longueur</u> (de Jordan-Hölder) <u>finie</u>

<u>outils</u> : l'action de $Z\mathfrak{g}$ sur les modules dans $\mathcal{O}$.

<u>rmq</u> : • pour l'instant tout ce qu'on connaît sur $\mathcal{O}$ repose essentiellement sur PBW qui est vrai $\bar{m}$ pour les algèbres de Kac-Moody de dim. infinie où on n'a plus de thm de longueur finie
• pour le thm de réductibilité complète pour rep $\mathfrak{g}$ il suffit juste de comprendre l'action du Casimir $c \in Z\mathfrak{g}$.

<u>Bilan</u> : l'étude de l'action du centre est "propre à la catégorie $\mathcal{O}$"

<u>Lemme</u> : L'action de $Z\mathfrak{g}$ respecte les espaces de poids M_λ $\forall M \in \mathcal{O}, \lambda \in \mathfrak{h}^*$.
◁ les actions de $Z\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{h}$ commutent ▷

Soit $M \in \mathcal{O}$ de + haut poids λ. Alors $M_\lambda = \mathbb{C}v^+$, donc $\forall z \in Z\mathfrak{g}$ agit **comme** scalaire $\chi_\lambda(z)$ sur v^+ et donc sur $M = U\mathfrak{g} \cdot v^+$, et dons sur $\forall$ sous-module ou quotient.

Ainsi $\lambda \in \mathfrak{h}^* \longmapsto$ caractère central $\chi_\lambda : Z\mathfrak{g} \xrightarrow[\text{alg}]{} \mathbb{C}$.

PBW $\Rightarrow z \cdot v^+$ ne dépend que des monômes de z qui sont dans $U\mathfrak{h} \Rightarrow$

$\boxed{\chi_\lambda = \lambda \circ \xi}$ ($\mathbb{C} \xleftarrow[\text{alg}]{} U\mathfrak{h} \xleftarrow[\text{alg}]{} Z\mathfrak{g}$) où ξ (déf) est la restriction de $U\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{proj}} U\mathfrak{h}$ sur $Z\mathfrak{g}$.
l'homomorphisme d'Harish-Chandra

<u>Lemme</u> : ξ est un <u>morphisme</u> d'<u>algèbre</u>.

◁ $\chi_\lambda(ab) = \chi_\lambda(a)\chi_\lambda(b) \Rightarrow \xi(ab) - \xi(a)\xi(b) \in \operatorname{Ker}\lambda$ $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \forall a, b \in Z\mathfrak{g}$, or $\bigcap_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \operatorname{Ker}\lambda = 0$ ▷

<u>but</u> : comprendre $\operatorname{Ker}\xi$ & $\operatorname{Im}\xi$

<u>questions motivantes</u> : ① Quand est-ce que $L(\mu)$ est un sous-quotient de $M(\lambda)$? ($\Rightarrow \chi_\mu = \chi_\lambda$)
③ Est-ce que les χ_λ donnent tous les caractères centraux ?

<u>Lemme</u> : Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in \Pi$. Si $n := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}_0$, alors $f_\alpha^{n+1} v^+$ est un vecteur de + haut poids $\mu = \lambda - (n+1)\alpha < \lambda$ dans $M(\lambda)$. Ainsi $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

$\lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha - \alpha = s_\alpha(\lambda) - \alpha = s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$

Cela suggère la déf^n de <u>l'action point</u> $W \circlearrowright \mathfrak{h}^*$: $\boxed{w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho}$,
les éléments de la $\bar{m}$ orbite sont dits <u>liés</u>.

<u>Lemme</u> : 1) c'est bien une <u>action</u>
2) cette action n'est <u>pas</u> linéaire : $w \cdot (\lambda + \mu) = w \cdot \lambda + w\mu$.

<u>Ex</u>. : • $W \cdot (-\rho) = \{-\rho\}$
• $W \cdot 0 = W$.

Prop.: $\{\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ sont liés $\Rightarrow \chi_\lambda=\chi_\mu\}$

◁ Il suffit de regarder le cas $\mu=s_\alpha\cdot\lambda$

. cas $\lambda,\mu\in P$: $n:=(\lambda,\alpha^\vee)\in\mathbb{Z}$
 ~ $n\in\mathbb{N}_0$: lemme
 ~ $n=-1$: $s_\alpha\cdot\lambda=\lambda$
 ~ $n\le-2$: $(\mu,\alpha^\vee)=-n-2\in\mathbb{N}_0$, $\lambda=s_\alpha\cdot\mu$

. cas général: argument de densité (géométrie algébrique):
$\mathfrak{h}^*\simeq\mathbb{A}^\ell$, espace affine$/\mathbb{C}$
$P\simeq\mathbb{Z}^\ell$
$\overline{\mathbb{Z}^\ell}^{\text{Zariski}}=\mathbb{A}^\ell$, car un polynôme s'annulant sur $\mathbb{Z}^\ell$ est nul sur $\mathbb{A}^\ell$
$\chi_\lambda(z)=\chi_{w\cdot\lambda}(z)\ \forall z\in Z\mathfrak{g},\forall\lambda\in P\Rightarrow\xi(z)\overset{\text{sur }P}{\equiv}w\cdot\xi(z)$ $\underline{\in U\mathfrak{h}=S\mathfrak{h}\simeq\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*}\Rightarrow\overset{\text{sur }\mathfrak{h}^*}{\equiv}$ ◁

Pour revenir à l'action de départ $W\curvearrowright\mathfrak{h}^*$, on "translate" l'homomorphisme d'Harish-Chandra
$\underline{\Psi}:=T_\rho\circ\xi$, où $T_\rho:\begin{cases}S\mathfrak{h}\xrightarrow[\text{alg.}]{\sim}S\mathfrak{h}\\ p(\lambda)\mapsto p(\lambda-\rho)\end{cases}$

On a $\{\chi_\lambda(z)=(\lambda+\rho)(\Psi(z))\}$, donc $\chi_\lambda=\chi_{w\cdot\lambda}\Rightarrow(\lambda+\rho)(\Psi(z))=(w(\lambda+\rho))(\Psi(z))\Rightarrow$
$\mathrm{Im}(\Psi:Z\mathfrak{g}\to S\mathfrak{h})\subseteq(S\mathfrak{h})^W\simeq(\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*)^W$

On a m̂ mieux:

Th. (Harish-Chandra): (a) $\boxed{\Psi:Z\mathfrak{g}\xrightarrow[\text{alg.}]{\sim}(S\mathfrak{h})^W}$
(b) $\boxed{\chi_\lambda=\chi_\mu\Leftrightarrow\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*\text{ sont liés}}$
(c) $\forall$ caractère central est de la forme χ_λ.

◁(a) idée: passer à la version graduée et comparer avec le thm de restriction de Chevalley "gradué": $\mathrm{Fun}\,\mathfrak{g}\xrightarrow[\text{alg.}]{\text{restr}^n}\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}\rightsquigarrow(\mathrm{Fun}\,\mathfrak{g})^G\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h})^W\xrightarrow{\text{Killing}}\boxed{(S\mathfrak{g})^G\overset{\xi}{\simeq}(S\mathfrak{h})^W}$

(b) Supposons $W\cdot\lambda\cap W\cdot\mu=\emptyset$.
Interpolation de Lagrange: $\exists f\in\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*$ t.q. $f(W\cdot\lambda)\equiv1$, $f(W\cdot\mu)\equiv0$
⇝ $g(x):=f(x-\rho)$, $g(W(\lambda+\rho))\equiv1$, $g(W(\mu+\rho))\equiv0$
⇝ $\varphi:=\frac{1}{\#W}\sum_{w\in W}wg\in(\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*)^W$, $\varphi(\lambda+\rho)=1$, $\varphi(\mu+\rho)=0$
⇝ $z:=\Psi^{-1}(\varphi)\in Z\mathfrak{g}$: $0=\varphi(\mu+\rho)=(\mu+\rho)(\Psi(z))=\chi_\mu(z)=\chi_\lambda(z)=(\lambda+\rho)(\Psi(z))=\varphi(\lambda+\rho)=1$, ↯

(c) On se tourne vers l'algèbre commutative.
$\#W<\infty\Rightarrow S\mathfrak{h}$ est une extension intègre de $(S\mathfrak{h})^W$: $\forall f$ est une racine de $\prod_{w\in W}(t-wf)$
$\Rightarrow$ [th. de relèvement] $\Rightarrow\forall\chi:Z\mathfrak{g}\xrightarrow[\text{alg}]{}\mathbb{C}$ se relève en $\underbrace{Z\mathfrak{g}\xrightarrow{\Psi,\sim}(S\mathfrak{h})^W\hookrightarrow\overset{\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*}{S\mathfrak{h}}\xrightarrow[\text{alg.}]{\varphi}\mathbb{C}}_{\chi}$, qui est une évaluation $\varphi(f)=f(\lambda+\rho)\ \forall f\in\mathrm{Fun}\,\mathfrak{h}^*$ pour un $\lambda\in\mathfrak{h}^*$.
Alors $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\rho)(\Psi(z))=\varphi(\Psi(z))=\chi(z)\ \forall z\in Z\mathfrak{g}$ ◁.

Rmq: Chevalley, étude des invariants pour les gpes de réflexion finis: $\underline{(S\mathfrak{h})^W\simeq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_\ell]}$, x_i homogène de degré d_i, $2=d_1\le d_2\le\dots\le d_\ell$, $\prod_i d_i=\#W$; les d_i ont plusieurs interprétations.

Prop.: l'anti-involution τ: $\begin{matrix}\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\\ e_\alpha\leftrightarrow f_\alpha\\ h\leftrightarrow h\end{matrix}$ (= la transposition pour $\mathfrak{sl}_n$) est triviale sur $Z\mathfrak{g}$. Rmq: pas de preuve élémentaire.

◁ $\tau(Z\mathfrak{g})=Z\mathfrak{g}$; ensuite, $\chi_\lambda(z)=\chi_\lambda(\tau z)\ \forall z\in Z\mathfrak{g},\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*\Rightarrow\lambda(\xi(z-\tau z))=0$, or $\bigcap_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}\ker\lambda=0$ & ξ est injective

V Exemple : $\mathfrak{sl}_2$

$\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$

$[h,e]=2e \qquad [h,f]=-2f \qquad [e,f]=h$

$\underset{\lambda \longmapsto \lambda(h)}{\mathfrak{h}^* \Leftrightarrow \mathbb{C}} \Leftrightarrow M(C_\lambda)$

$P \Leftrightarrow \mathbb{Z}$

$Q \Leftrightarrow 2\mathbb{Z}$

$P^+ \Leftrightarrow \mathbb{N} \Leftrightarrow L(n)$, $\dim = n+1$ $\qquad v_i \overset{h}{\longmapsto} (\lambda-2i)v_i$, $\quad v_i \overset{e}{\longmapsto} (\lambda-i+1)v_{i-1}$, $\quad v_i \overset{f}{\longmapsto} (i+1)v_{i+1}$.

$\left\{ \begin{array}{l} L(0) : \text{module trivial} \\ L(1) : \text{la réalisation naturelle} : e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ L(2) : \mathrm{ad} \end{array} \right.$

$\Delta = \{\pm\alpha\}$, $\underset{\alpha(h)=2}{\Pi = \{\alpha\}}$, $W \simeq S_2 \Rightarrow (S\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}[h^2] = \mathbb{C}[h^2-1]$, $\rho = \frac{1}{2}\alpha$

Casimir : $c = 2xy + 2yx + h^2 = h^2 + 2h + 4yx$.

$\rho(h) = 1 \Rightarrow \psi(c) = (h-1)^2 + 2(h-1) = h^2 - 1$, engendre $(S\mathfrak{h})^W$

$\chi_\lambda(c) = (\lambda+\rho)(h^2-1) = (c_\lambda+1)^2 - 1$, $\quad \chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow \lambda = \mu$ ou $\mu = -\lambda - 2$.

VI. Catégorie $\mathcal{O}$ est artinienne.

Th : 1) $\forall M \in \mathcal{O}$ est artinien
2) $\forall M, N \in \mathcal{O}$, $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) < \infty$

$\triangleleft$ 1) Il suffit de travailler avec $M = M(\lambda)$
$V := \sum_{w \in W} M(\lambda)_{w \cdot \lambda}$, $\dim V < \infty$
Supposons $N' \subsetneq N \subseteq M(\lambda)$. $Z\mathfrak{g}$ agit sur N/N' par $\chi_\lambda \Rightarrow \exists\, 0 \neq v \in (V \cap N) \setminus N' \Rightarrow \dim(N \cap V) > \dim(N' \cap V)$.
2) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda,\mu} \overset{\text{réc}}{\rightsquigarrow} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\lambda)) < \infty \overset{\text{réc}}{\rightsquigarrow} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) < \infty$ $\triangleleft$.

Cor 1 : $\forall M \in \mathcal{O}$ admet une série de décomposition $0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n = M$ avec $M_i / M_{i-1} \cong L(\lambda_i)$;
$[M : L(\lambda)]$:= la multiplicité de $L(\lambda)$ (ne dépend pas de la série);
Harish-Chandra : $[M(\lambda) : L(\mu)] > 0 \Rightarrow \mu \leq \lambda$ & $\mu \in W \cdot \lambda$.

Ex. : $M(-\rho) = L(-\rho) \Leftarrow W \cdot (-\rho) = \{\rho\}$ & $\dim M(-\rho)_{-\rho} = 1$.

Cor 2 : Th. de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya : $\forall\, \mathcal{O} \ni M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, $\forall N_i$ indécomposable, décomposition unique à ordre et iso près.

Cor 3 : groupe de Grothendieck $\boxed{K(\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{Z}[L(\lambda)]}$, $[M] = \bigoplus_{\text{finie}} [M : L(\lambda)][L(\lambda)]$ $\forall M \in \mathcal{O}$.

VII. Sous-catégories $\mathcal{O}_\lambda$ et blocs.

$M^\chi := \{v \in M \mid (z - \chi(z))^n v = 0 \;\forall z \in Z\mathfrak{g}, \forall n \geq n_0(z, v)\} \underset{\mathrm{Mod}\,\mathfrak{g}}{\subseteq} M$ $\quad \forall M \in \mathcal{O}$, $\forall \chi$-car. central

Lemme : $M^{\chi_1} \cap M^{\chi_2} = 0$ $\forall \chi_1 \neq \chi_2$.

$\forall M_\mu \in \mathrm{mod}\, Z\mathfrak{g} \Rightarrow$ [thm sur les systèmes des opérateurs lin. commutants] $\Rightarrow M = \bigoplus_{\text{fini}} M^{\chi_\lambda} \Rightarrow$
$\boxed{\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*/W_\cdot} \mathcal{O}_{\chi_\lambda}}$, où $\mathcal{O}_\chi$ est la sous-cat. pleine de $\mathcal{O}$ avec pour objets $M \in \mathcal{O}$ t.q. $M = M^\chi$.
Ainsi on éclaircit l'action de $Z\mathfrak{g}$ sur M et obtient des sous-cat. de $\mathcal{O}$ plus maniables, p.ex. :
{simples de $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$} = $\{L(\mu) \mid \mu \in W \cdot \lambda\}$, ensemble fini.

But : séparer les indécomposables de $\mathcal{O}$ qui n'ont pas de relat^ns homologiques.
S'inspirer des reps des gpes finis (Brauer etc.). cat. non-semisimple!
Principe général : $\underset{\text{simples dans } \mathcal{O}}{M_1 \sim M_2} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists\; \underset{\text{non-scindée}}{0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0}$, i.e. $\mathrm{Ext}(M_1, M_2) \neq 0$;
on complète $\sim$ par symétrie & transitivité $\rightsquigarrow$ on regroupe les simples de $\mathcal{O}$ en blocs
Lemme : $\forall\, \mathcal{O} \ni M = \bigoplus_{\text{finie}} M_i$, où tous les facteurs de décomp^n d'un M_i sont dans le m̂ bloc.
$\Downarrow$
$\boxed{\mathcal{O} = \bigoplus_{\text{blocs}} \mathcal{O}_i}$
Prop. : $\forall \lambda \in P$, $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ est un bloc de $\mathcal{O}$.
$\triangleleft$ M. q. pour $\mu = s_\alpha \cdot \lambda < \lambda$, $L(\mu)$ et $L(\lambda)$ sont dans le m̂ bloc.
On a vu : $\exists$ un m-sme non-trivial $M(\mu) \to N(\lambda) \subsetneq M(\lambda) \Longrightarrow 0 \to L(\mu) \to M(\lambda)/N \to L(\lambda) \to 0$ $\triangleleft$.
$N(\mu) \to N$
indécomposable $\Leftarrow$ de + haut poids

Bloc principal : $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{\chi_0}$
Rmq : Si $\lambda \notin P$, on a $\mathcal{O}_{\chi_\lambda} = \bigoplus_{i \in W \cdot \lambda \bmod Q} \overset{\text{blocs}}{\mathcal{O}_\lambda^i}$.