

Procli Diadochi Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii

Gottfried Friedlein
(Teubner, Leipzig 1873)

Transcribed by David R. Wilkins

September 2020

Contents

Prologus Pars Prior.	1
Prologus Pars Posterior.	19
Definitiones.	35
Petita et Axiomata.	74
Propositionum Pars Prior.	84
Prop. I, probl. I.	84
Prop. II, probl. II.	94
Prop. III, probl. III.	97
Prop. IIII, theor. I.	100
Prop. V, theor. II.	105
Prop. VI, theor. III.	109
Prop. VII, theor. IIII.	112
Prop. VIII, theor. V.	115
Prop. VIIII, probl. IIII.	118
Prop. X, probl. V.	122
Prop. XI, probl. VI.	123
Prop. XII, probl. VII.	124
Prop. XIII, theor. VI.	129
Prop. XIIIII, theor. VII.	130
Prop. XV, theor. VIII.	132
Prop. XVI, theor. VIIII.	136
Prop. XVII, theor. X.	138

Prop. XVIII, theor. XI.	140
Prop. XIX, theor. XII.	142
Prop. XX, theor. XIII.	144
Prop. XXI, theor. XIII.	147
Prop. XXII, probl. VIII.	148
Prop. XXIII, probl. VIII.	150
Prop. XXIII, theor. XV.	152
Prop. XXV, theor. XVI.	156
Prop. XXVI, theor. XVII.	157
Propositionum Pars Posterior.	161
Prop. XXVII, theor. XVIII.	162
Prop. XXVIII, theor. XVIII.	165
Prop. XXVIII, theor. XX.	166
Prop. XXX, theor. XXI.	171
Prop. XXXI, probl. X.	172
Prop. XXXII, theor. XXII.	173
Prop. XXXIII, theor. XXIII.	177
Prop. XXXIII, theor. XXIII.	178
Prop. XXXV, theor. XXV.	182
Prop. XXXVI, theor. XXVI.	185
Prop. XXXVII, theor. XXVII.	186
Prop. XXXVIII, theor. XXVIII.	187
Prop. XXXVIII, theor. XXVIII.	188
Prop. XL, theor. XXX.	189
Prop. XLI, theor. XXXI.	191
Prop. XLIII, theor. XXXII.	193
Prop. XLIII, probl. XII.	195
Prop. XLV, probl. XIII.	196
Prop. XLVI, probl. XIII.	197
Prop. XLVII, theore. XXXIII.	198
Prop. XLVIII, theor. XXXIII.	200
Scholium ad Propositionem 24	201

(This transcription only includes the main text. The footnotes, often supplying variant readings from the sources, are not included in the transcription.)

[FR3]

PROLOGI PARS PRIOR

Τὴν μαθηματικὴν οὐσίαν οὔτε τῶν πρωτίστων ἐν τοῖς οὖσι γενῶν οὔτε τῶν ἐσχάτων εἶναι καὶ παρὰ τὴν ἀπλὴν διηρημένων, ἀναγκαῖον, ἀλλὰ τὴν μέσσην χώραν ἀπειληφέναι τῶν τε ἀμερίστων καὶ ἀπλῶν καὶ ἀσυνθέτων καὶ ἀδιαιρέτων ὑποστάσεων καὶ τῶν μεριστῶν καὶ ἐν συνθέσεσιν παντοίαις καὶ ποικίλαις διαιρέσεσιν ἀφωρισμένων. τὸ μὲν γὰρ αἰὲ κατὰ ταῦτα ἔχον καὶ μόνιμον καὶ ἀνέλεγκτρον τῶν περὶ αὐτὴν λόγων ὑπερανέχουσαν αὐτὴν ἀποφαίνει τῶν ἐν ὕλῃ φερομένων εἰδῶν, τὸ δὲ διεξοδικὸν τῶν ἐπιβολῶν καὶ τὸ ταῖς διαστάσεσι τῶν ὑποκειμένων προσχρῶμενον καὶ τὸ ἀπ' ἄλλων ἀρχῶν ἄλλα προκατασκευάζον καταδεεστέραν αὐτῇ δίδωσι τάξιν τῆς ἀμερίστου καὶ ἐν αὐτῇ τελείως ἰδρυμένης φύσεως. διόπερ οἶμαι καὶ ὁ Πλάτων τὰς γνώσεις διήρει τῶν ὄντων ταῖς τε πρώταις καὶ μέσαις καὶ τελευταίαις ὑποστάσεσι καὶ τοῖς μὲν ἀμερίστοις τὴν νοητὴν ἀπεδίδου τὴν ἀθρόως καὶ μετὰ ἀπλότητος διαιροῦσαν τὰ νοητὰ καὶ τῇ τε αὐλίᾳ καὶ τῇ καθαρότητι καὶ τῇ ἐνοειδεῖ προσβολῇ καὶ ἐπαφῇ τῶν ὄντων τὰς ἄλλας ὑπεραίρουσαν γνώσεις, τοῖς δὲ μεριστοῖς καὶ φύσιν ἐσχάτην λαχοῦσι καὶ αἰσθητοῖς ἅπασιν τὴν δόξαν ἀμυδρᾶς ἀληθείας ἀντιλαμβανομένην, τοῖς δὲ μέσοις, οἷα δὴ ἐστὶ τὰ τῆς μαθηματικῆς εἶδη, καὶ τῆς τε ἀμερίστου φύσεως ἀπολειπομένοις καὶ τῆς μεριστῆς ὑπεριδρυμένοις τὴν διάνοιαν. καὶ γὰρ αὕτη νοῦ μὲν ἐστὶ δευτέρα καὶ τῆς ἀκροτάτης ἐπιστήμης, δόξης δὲ τελειότερα καὶ ἀκριβεστέρα καὶ καθαρωτέρα. διεξοδεύει μὲν γὰρ καὶ ἀναπλοῖ τοῦ νοῦ τὴν ἀμετρίαν καὶ ἀνελίσσει τὸ συνεσπειραμένον τῆς νοερᾶς ἐπιβολῆς, συνάγει δὲ αὖ πάλιν τὰ διηρημένα καὶ ἀναφέρει πρὸς τὸν νοῦν. ὥσπερ οὖν αἱ γνώσεις ἀπ' ἀλλήλων διεστῆκασιν, οὕτω δὴ καὶ τὰ γνωστὰ διακρίνεται φύσει, καὶ τὰ μὲν νοητὰ πάντων ὑπερήπλωται ταῖς ἐνοειδέσιν ὑπάρξεσι, τὰ δὲ αἰσθητὰ τοῖς πᾶσιν ἀπολείπεται τῶν πρώτων οὐσιῶν. τὰ δὲ μαθηματικὰ καὶ ὅλως τὰ διανοητὰ μέσσην κεκλήρωται τάξιν, τῶν μὲν τῇ διαιρέσει πλεονάζοντα, τῶν δὲ τῇ αὐλίᾳ προέχοντα, καὶ τῶν μὲν τῇ ἀπλότητι λειπόμενα, τῶν δὲ τῇ ἀκριβείᾳ προυπάρχοντα καὶ τραν-εστέρας μὲν ἐμφάσεις ἔχοντα τῶν αἰσθητῶν τῆς νοητῆς οὐσίας, εἰκόνες δὲ ὅμως ὄντα καὶ μεριστῶς μὲν τὰ ἀμέριστα, πολυειδῶς δὲ μονοειδῆ παραδείγματα τῶν ὄντων ἀπομιμούμενα καὶ ὥς συλλήβδην εἰπεῖν ἐν προθύροις μὲν τεταγμένα τῶν πρώτων εἰδῶν καὶ ἐκφαίνοντα τὴν ἡνωμένων καὶ ἀμερῇ καὶ γόνιμον ἐκείνων ὕπαρξιν, οὐπω δὲ ἄρα τοῦ μερισμοῦ καὶ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων ὑπερέχοντα καὶ τῆς προσηκούσης ταῖς εἰκόσιν ὑποστάσεως, οὐδὲ ὑπερδράμοντα τὰς ποικίλας καὶ διεξοδικὰς τῆς ψυχῆς νοήσεις, καὶ αὐταῖς συναρμοσθέντα ταῖς ἀπλαῖς καὶ ὕλης ἀπάσης καθαρευούσαις γνώσεσιν.

Ἡ μὲν δὴ μεσότης τῶν μαθηματικῶν γενῶν τε καὶ εἰδῶν τοιαύτη νοεῖσθω, πρὸς γε τὸ παρὸν τὸ μεταξὺ συμπληροῦσα τῶν τε παντελῶς ἀμεριστῶν οὐσιῶν καὶ τῶν περὶ τὴν ὕλην μεριστῶν γινομένων· τὰς δὲ ἀρχὰς τῆς μαθηματικῆς ὅλης

οὐσίας ἐπισκοποῦντες ἐπ' αὐτὰς ἄνιμεν τὰς διὰ πάντων τῶν ὄντων διηκούσας
 ἀρχὰς καὶ πάντα ἀφ' ἐαυτῶν ἀπογεννώσας, λέγω δὲ τὸ πέρας καὶ τὸ ἄπειρον. ἐκ
 γὰρ τούτων τῶν δύο πρώτων μετὰ τὴν τοῦ ἐνὸς ἀπεριήγητον καὶ τοῖς ἅπασιν ἄλη- [20]
 πτον αἰτίαν ὑπέστη τά τε ἄλλα πάντα καὶ ἡ τῶν μαθημάτων φύσις, ἐκείνων μὲν
 ἀθρόως πάντα παραγουσῶν καὶ ἐξηρημένως, τῶν δὲ προϊόντων ἐν μέτροις τοῖς
 προσήκουσι καὶ τάξει τῇ πρεπούσῃ τὴν πρόοδον καταδεχομένων, καὶ τῶν μὲν
 πρώτων, τῶν δὲ μέσων, τῶν δὲ τελευταίων ὑφισταμένων. τὰ μὲν γὰρ νοητὰ γένη [25]
 κατὰ τὴν ἐαυτῶν ἀπλότητα πρώτως μετέχει τοῦ πέρατος καὶ τοῦ ἀπείρου διὰ μὲν [FR6]
 τὴν ἔνωσιν καὶ τὴν ταυτότητα καὶ τὴν μόνιμον ὕπαρξιν καὶ σταθεράν τοῦ πέρατος
 ἀποπληρούμενα, διὰ δὲ τὴν εἰς πλήθος διαίρεσιν καὶ τὴν γεννητικὴν περιουσίαν [5]
 καὶ τὴν θείαν ἑτερότητα καὶ πρόοδον τῆς ἀπειρίας ἀπολαύοντα. τὰ δὲ μαθηματικὰ
 πέρατος μὲν ἐστὶν ἔκγονα καὶ ἀπειρίας, ἀλλ' οὐ τῶν πρωτίστων μόνων οὐδὲ τῶν
 νοητῶν καὶ κρυφίων ἀρχῶν, ἀλλὰ καὶ τούτων, αἱ προῆλθον μὲν ἀπ' ἐκείνων εἰς [10]
 δευτέραν τάξιν, ἀπογεννᾶν δὲ μετ' ἀλλήλων ἐξαρχοῦσι τοὺς μέσους διακόσμους
 τῶν ὄντων καὶ τὴν ἐν αὐτοῖς ποικιλίαν, ὅθεν δὴ καὶ ἐν τούτοις προέρχονται μὲν
 εἰς ἄπειρον οἱ λόγοι, κρατοῦνται δὲ ὑπὸ τῆς πέρατος αἰτίας. ὁ τε γὰρ ἀριθμὸς ἀπὸ [15]
 μονάδος ἀρξάμενος ἄπαυστον ἔχει τὴν αὕξησιν, αἰεὶ δὲ ὁ ληφθεὶς πεπέρασται, καὶ
 ἡ τῶν μεγεθῶν διαίρεσις ἐπ' ἄπειρον χωρεῖ, τὰ δὲ διαιρούμενα πάντα ὠρίσται, καὶ
 κατ' ἐνέργειαν πεπέρασται τὰ μόρια τοῦ ὅλου. καὶ τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὕσης τά [20]
 τε μεγέθη πάντα σύμμετρα ἂν ἦν καὶ οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον, οἷς δὴ δοκεῖ
 διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ, καὶ οἱ ἀριθμοὶ τὴν γόνιμον τῆς
 μονάδος δύναμιν οὐκ ἂν ἐδύναντο δεικνύναι οὐδὲ ἂν πάντας εἶχον τοὺς λόγους
 ἐν ἐαυτοῖς τῶν ὄντων, οἷον τοὺς πολλαπλασίους ἢ τοὺς ἐπιμορίους. πᾶς γὰρ [25]
 ἀριθμὸς ἐξαλλάττει τὸν λόγον πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ γενόμενον
 ἐξεταζόμενος. τοῦ δὲ πέρατος ἀναιρεθέντος συμμετρία τε καὶ κοινωνία λόγων [FR7]
 καὶ ταυτότης εἰδῶν καὶ ἰσότης καὶ ὅσα τῆς ἀμείνωνός ἐστι συστοιχίας οὐκ ἂν
 ποτε ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο, οὐδ' ἂν ἐπιστῇμαι τῶν τοιούτων ἦσαν οὐδὲ [5]
 καταλήψεις μόνιμοι καὶ ἀκριβεῖς. δεῖ τοίνυν ἀμφοτέρων τῶν ἀρχῶν ὥσπερ τοῖς
 ἄλλοις γένεσι τῶν ὄντων οὕτω δὴ καὶ τοῖς μαθηματικοῖς. τὰ δὲ ἔσχατα καὶ
 ἐν ὕλῃ φερόμενα καὶ ὑπὸ τῆς φύσεως διαπλαττόμενα πάντως αὐτόθεν ἀμφοῖν
 μετέχοντα καταφαίνεται, τοῦ μὲν ἀπείρου κατὰ τὴν ὑποκειμένην αὐτοῖς ἔδραν [10]
 τῶν εἰδῶν, τοῦ δὲ πέρατος κατὰ τοὺς λόγους καὶ τὰ σχήματα καὶ τὰς μορφάς.
 Ἄλλ' ὅτι μὲν ἀρχαὶ καὶ τῶν μαθημάτων αὗται προεστήκασιν, αἱ καὶ τῶν
 ὄντων ἀπάντων, φανερόν. ὥσπερ δὲ τὰς κοινὰς ἀρχὰς αὐτῶν τε θεωρήκαμεν [15]
 καὶ διὰ πάντων διηκούσας τῶν μαθηματικῶν γενῶν, οὕτω δὴ καὶ τὰ κοινὰ
 αὐτῶν θεωρήματα καὶ ἀπλᾶ καὶ τῆς μιᾶς ἐπιστήμης ἔγγονα τῆς πάσας ὁμοῦ τὰς
 μαθηματικὰς γνώσεις ἐν ἐνὶ ἐπεχούσης ἀναλογισώμεθα, καὶ ὅπως ἐφαρμόττει [20]
 πάσαις καὶ δύναται καὶ ἐν ἀριθμοῖς καὶ ἐν μεγέθεσι καὶ ἐν κινήσεσι θεωρεῖσθαι
 σκοπήσωμεν. τοιαῦτα δὲ ἐστὶ τά τε τῶν ἀναλογιῶν καὶ τὰ τῶν συνθέσεων καὶ δι-
 αιρέσεων καὶ τῶν ἀναστροφῶν καὶ ἐναλλαγῶν, ἔτι δὲ τὰ τῶν λόγων πάντων οἷον
 πολλαπλασίων καὶ ἐπιμορίων [καὶ] ἐπιμερῶν καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων καὶ [25]

ἀπλῶς τὰ περὶ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον καθόλου θεωρούμενα καὶ κοινῶς, οὐ καθόσον ἐστὶν ἐν σχήμασιν ἢ ἀριθμοῖς ἢ κινήσεσιν, ἀλλ' αὐτὸ καθ' αὐτὸ τούτων ἐκάτερον φύσιν τινὰ ἔχον κοινήν καὶ γινώσιν ἑαυτοῦ παρεχόμενον ἀπλουστέραν. καὶ μὴν καὶ τὸ κάλλος καὶ ἡ τάξις κοινὰ πάντων ἐστὶ τῶν μαθημάτων καὶ ἡ ἀπὸ τῶν γνωριμωτέρων ὁδὸς ἐπὶ τὰ ζητούμενα καὶ ἡ ἐκ τούτων ἐπ' ἐκεῖνα μετάβασις, ἃς δὴ καλοῦσιν ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις. ἢ τε ὁμοιότης καὶ ἡ ἀνομοιότης τῶν λόγων οὐδ' ὅτιοῦν τῶν μαθηματικῶν γενῶν ἀπολείπουσιν. καὶ γὰρ σχήματα τὰ μὲν ὅμοια τὰ δὲ ἀνόμοια λέγομεν καὶ ἀριθμοὺς ὡσαύτως τοὺς μὲν ὁμοίους τοὺς δὲ ἀνομοίους. καὶ ὅσα κατὰ τὰς δυνάμεις ἀναφαίνεται πᾶσιν ὁμοίως προσήκει τοῖς μαθήμασι, τῶν μὲν δυναμένων τῶν δὲ δυναστευομένων. ἃ δὴ καὶ ὁ ἐν πολιτείᾳ Σωκράτης ταῖς μούσαις ὑψηλολογουμέναις ἀνέθηκεν, τὰ κοινὰ πάντων τῶν μαθηματικῶν λόγων ἐν πέραςιν ὠρισμένοις περιλαβὼν καὶ προστησάμενος ἐν τοῖς εἰρημένοις ἀριθμοῖς, ἀφ' ὧν δὴ καὶ τὰ μέτρα τῆς τε εὐγονίας καὶ τῆς ἐναντίας πρὸς ταύτην ἀγονίας καταφαίνεται.

[FR8]

[5]

[10]

[15]

[20]

Δεῖ δὲ ἄρα τὰ κοινὰ ταῦτα μήτε ἐν τοῖς πολλοῖς καὶ διηρημένοις εἶδεσι πρώτως ὑφεστάναι νομίζειν, μήτε ὑστέρωσ καὶ ἐκ τῶν πολλῶν ἔχοντα τὴν γένεσιν, ἀλλ' ὥς πρὸ αὐτῶν ἐστῶτα καὶ ἀπλότῃ καὶ ἀκριβεῖ διαφέροντα τίθεσθαι. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ ἡ γινώσις αὐτῶν προηγείται τῶν πολλῶν γνώσεων καὶ δίδωσι τὰς ἀρχὰς ἐκεῖναις, καὶ αἱ πολλαὶ περὶ αὐτὴν ὑφεστήκασιν καὶ ἐπ' αὐτὴν ἀναφέρονται. λεγέτω γὰρ ὁ γεωμέτρης, ὅτι τεττάρων ὄντων μεγεθῶν ἀνάλογον ἔσται καὶ τὸ ἐναλλάξ, καὶ δεικνύτω κατὰ τὰς οἰκείας ἀρχάς, αἷς ὁ ἀριθμητικὸς οὐκ ἂν ποτε χρήσαιτο, καὶ αὖ ὁ ἀριθμητικὸς, ὅτι τεττάρων ὄντων ἀριθμῶν ἀνάλογον ἔσται καὶ τὸ ἐναλλάξ, καὶ τοῦτο ἀπὸ τῶν τῆς οἰκείας ἐπιστήμης ἀρχῶν. τίς οὖν ὁ καθ' ἑαυτὸν γνωρίζων τὸ ἐναλλάξ εἴτε ἐν μεγέθεσιν εἴτε ἐν ἀριθμοῖς καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν συγκειμένων μεγεθῶν ἢ ἀριθμῶν καὶ τὴν σύνθεσιν ὡσαύτως τῶν διηρημένων; οὐ γὰρ δὴ πού τῶν μὲν μεριστῶν εἰσὶν ἐπιστῆμαι καὶ γνώσεις, τῶν δὲ ἀύλων καὶ τῆς νοερᾶς θεωρίας ἐγγυτέρω τεταγμένων οὐδὲ μίαν ἔχομεν ἐπιστήμην. ἀλλὰ πολλῶ πρότερον ἢ ἐκεῖνων γινώσις ἐστὶν ἐπιστήμη καὶ ἀπ' ἐκείνης αἱ πολλαὶ τοὺς κοινούς ὑποδέχονται λόγους καὶ μέχρι τοσούτου γνώσεων ἄνοδος ἀπὸ τῶν μερικωτέρων ἐπὶ τὰς ὀλικωτέρας, ἕως ἂν ἐπ' αὐτὴν ἀναδράμωμεν τὴν τοῦ ὄντος, ἣ ὃν ἐστίν, ἐπιστήμην. αὕτη γὰρ οὐ τὰ καθ' αὐτὰ τοῖς ἀριθμοῖς ὑπάρχοντα σκοπεῖν ἀξιοῖ, οὐδὲ τὰ κοινὰ πᾶσι τοῖς ποσοῖς, ἀλλὰ τῶν ὄντων ἀπάντων τὴν μίαν καὶ μόνην οὐσίαν καὶ ὑπαρξιν θεωρεῖ, καὶ διὰ τοῦτο πασῶν ἐστὶ τῶν ἐπιστημῶν περιληπτικωτάτη καὶ πᾶσαι παρ' ἐκείνης λαμβάνουσι τὰς ἀρχάς. αἰ γὰρ αἱ ἀνωτέρω ταῖς ὑπ' αὐτάς παρέχουσι τὰς πρώτας τῶν ἀποδείξεων ὑποθέσεις, ἣ δὲ τελειοτάτη τῶν ἐπιστημῶν ἀπάσαις ἀφ' ἑαυτῆς ἐνδίδωσι ταῖς μὲν ὀλικωτέρας ταῖς δὲ μερικωτέρας ἀρχάς· δι' ὃ καὶ ὁ ἐν Θεαιτήτῳ Σωκράτης παιδιὰν σπουδῇ κεραννύς περιστραφὴς μὲν ἀπεικάζει τὰς ἐν ἡμῖν ἐπιστήμας. πέτεσθαι δὲ αὐτάς φησὶν τὰς μὲν κατ' ἀγέλας τὰς δὲ καὶ χωρὶς ἀπὸ τῶν ἄλλων. αἱ μὲν γὰρ κοινότεραι καὶ ὀλικώτεραι πολλὰς ἐν ἑαυταῖς περιέχουσι μερικωτέρας, αἱ δὲ τῶν διηρημένων κατ' εἶδη γνωστῶν ἐφαπτόμεναι διεστήκασιν ἀλλήλων καὶ

[25]

[FR9]

[5]

[10]

[15]

[20]

[25]

[FR10]

[5]

ἀσύναπτοι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἀπὸ διαφερουσῶν ὠρμημένοι τῶν πρώτων ἀρχῶν. μία τοίνυν ἐπιστήμη προτετάχθω τῶν πολλῶν ἐπιστημῶν καὶ μαθημάτων ἢ τὰ κοινὰ καὶ διὰ πάντων διήκοντα τῶν γενῶν γνωρίζουσα καὶ πάσαις ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις χορηγοῦσα τὰς ἀρχάς.

Καὶ μέχρι τοῦδε ἐν ἡμῖν ἢ περὶ αὐτῆς ἀφωρίσθω διδασκαλία. μετὰ δὲ τοῦτο τί ποτ' ἂν εἴη τὸ κριτήριον τῶν μαθημάτων θεωρήσωμεν καὶ προστησώμεθα καὶ τῆς τούτου παραδόσεως ἡγεμόνα τὸν Πλάτωνα διαιρούμενον ἐν πολιτείᾳ χωρὶς μὲν τὰ γνωστὰ χωρὶς δὲ τὰς γνώσεις καὶ συζύγως ἀπονέμοντα τοῖς γνωστοῖς τὰς γνώσεις. τῶν γὰρ ὄντων τὰ μὲν νοητὰ θέμενος τὰ δὲ αἰσθητά, τῶν δ' αὖ νοητῶν τὰ μὲν νοητὰ πάλιν τὰ δὲ διανοητά, καὶ τῶν αἰσθητῶν τὰ μὲν αἰσθητὰ τὰ δὲ εἰκαστά, τοῖς μὲν νοητοῖς, ἃ δὴ τῶν τεττάρων ἐστὶ γενῶν πρώτιστα, γνῶσιν ἐφίστησι τὴν νόησιν, τοῖς δὲ διανοητοῖς διάνοιαν, τοῖς δὲ αἰσθητοῖς πίστιν καὶ τοῖς εἰκαστοῖς εἰκασίαν. καὶ τοῦτον ἔχουσιν τὸν λόγον ἀποφαίνει τὴν εἰκασίαν πρὸς τὴν αἰσθησιν, ὃν ἡ διάνοια πρὸς τὴν νόησιν· ἢ τε γὰρ εἰκασία τὰ εἰδῶλα γινώσκει τῶν αἰσθητῶν ἐν τε ὑδασι φανταζόμενα καὶ τοῖς ἄλλοις κατόπτροις ἐσχάτην πῶς ἐν εἶδεσιν ἔχοντα τάξιν καὶ εἰδῶλων ὄντως εἰδῶλα γεγονότα, καὶ ἡ διάνοια τὰς τῶν νοητῶν εἰκόνας θεωρεῖ τὰς ἀπὸ τῶν πρώτων καὶ ἀπλῶν καὶ ἀμεριστῶν εἰδῶν εἰς πλῆθος καὶ διαίρεσιν ὑποβάσας, δι' ὃ καὶ ταύτης μὲν ἡ γνῶσις ἀπ' ἄλλων ὑποθέσεων ἡρτηται πρεσβυτέρων, ἡ δὲ νόησις ἐπ' αὐτὴν ἀνεισι τὴν ἀνυπόθετον ἀρχήν. εἰ τοίνυν τὰ μαθηματικά μήτε τὴν ἀμερίστον ἔλαχεν ὑπόστασιν καὶ χωριστὴν ἀπὸ πάσης διαιρέσεως καὶ ποικιλίας μέτε τὴν αἰσθήσει γνωριζομένην καὶ πολὺ μετάβολον καὶ πάντη μεριστήν, παντί που καταφανές, ὅτι διανοητὰ μὲν ἐστὶ κατὰ τὴν οὐσίαν, διάνοια, δὲ αὐτῶν προέστηκεν ὡς κριτήριον, ὥσπερ τῶν αἰσθητῶν αἰσθησις καὶ εἰκασία τῶν εἰκαστῶν. ὅθεν δὴ καὶ ὁ Σωκράτης ἀμυδροτέραν μὲν τὴν τούτων γνῶσιν εἶναι διορίζεται τῆς πρωτίστης ἐπιστήμης, τρανεστέραν δὲ τῆς δοξαστικῆς ἐπιβολῆς. τὸ μὲν γὰρ ἀνειλιγμένον καὶ διεξοδικὸν τῆς θεωρίας πλεονάζον ἔχουσι τῆς νοήσεως, τὸ δὲ μόνιμον τῶν λόγων καὶ ἀνέλεγκτον ὑπερέχον τῆς δόξης. καὶ τὸ μὲν ἐξ ὑποθέσεως ὠρμημένον κατὰ τὴν ὕφεσιν ἔλαχον τῆς πρώτης ἐπιστήμης, τὸ δὲ ἐν αὐλοῖς εἶδεσιν ὕφεστός κατὰ τὴν τελειοτέραν τῶν αἰσθητῶν εἴδησιν.

Τὸ μὲν οὖν κριτήριον τῶν μαθημάτων ἀπάντων τοιόνδε κατὰ τὸν νοῦν ἀφορίζομεθα τοῦ Πλάτωνος, τὴν διάνοιαν δόξης μὲν ὑπεριδρύσασαν ἑαυτήν, τῆς δὲ νοήσεως ἀπολειπομένην. ἔπεται δὲ που κατιδεῖν ἡμᾶς, τίνα τὴν οὐσίαν προσήκει λέγειν τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν τε καὶ γενῶν, καὶ πότερον ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν αὐτὴν ὑφίστάνειν συγχωρητέον εἴτε κατὰ ἀφαίρεσιν, ὥς που λέγειν εἰώθασιν, εἴτε κατὰ ἄθροισιν τῶν μερικῶν εἰς ἓνα τὸν κοινὸν λόγον, ἢ καὶ πρότουτων αὐτῇ τὴν ὑπόστασιν δοτέον, ὥς ὃ τε Πλάτων ἀξιοῖ καὶ ἡ τῶν ὅλων ἐπιδεικνύει πρόοδος. πρῶτον μὲν οὖν εἰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν τὰ μαθηματικά εἶδη λέγομεν ὑποστῆναι, τῆς ψυχῆς ἀπὸ τῶν ἐν ὕλῃ τριγώνων ἢ κύκλων τὸ εἶδος τὸ κυκλικὸν ἢ τὸ τριγωνικὸν ὕστερογενῶς ἐν ἑαυτῇ μορφούσης, πόθεν ἢ ἀκριβεία καὶ τὸ ἀνέλεγκτον ὑπάρχει τοῖς λόγοις; ἀνάγκη γὰρ, ἢ ἀπὸ τῶν

αἰσθητῶν ἢ ἀπὸ ψυχῆς. ἀλλὰ μὴν ἀπὸ γε τῶν αἰσθητῶν ἀδύνατον, πολλῶ γὰρ ἂν μᾶλλον ἀκριβείας τούτοις μετῆν· ἀπὸ τῆς ψυχῆς ἄρα, τοῖς μὲν ἀτελέσι τὸ τέλειον τοῖς δὲ μὴ ἀκριβέσι τὸ ἀκριβὲς προστιθείσης. ποῦ γὰρ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς τὸ ἀμερές ἢ τὸ απλατὲς ἢ τὸ ἀβαθές, ποῦ δὲ ἡ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου γραμμῶν ἰσότης, ποῦ δὲ οἱ ἐστῶτες αἰεὶ λόγοι τῶν πλευρῶν, ποῦ δὲ αἱ τῶν γωνιῶν ὀρθότητες; οὐχ ὁρῶμεν, ὥς ἐν ἀλλήλοις πάντα τὰ αἰσθητὰ συμμέμικται καὶ ὥς οὐδὲν ἐν τούτοις εἰλικρινὲς οἶδὲ τοῦ ἐναντίου καθαρεῦον, ἀλλὰ μεριστὰ πάντα καὶ διαστατὰ καὶ κινούμενα; πῶς οὖν τοῖς ἀκινήτοις λόγοις ἐκ τῶν κινουμένων καὶ ἄλλοτε ἄλλως ἐχόντων αὐτὴν τὴν μόνιμον οὐσίαν δώσομεν; πᾶν γὰρ τὸ ἀπὸ κινουμένων οὐσιῶν ὑφιστάμενον καὶ ὑπαρξιν μεταβλητὴν ἔχειν ὁμολογεῖται παρ' αὐτῶν. πῶς δὲ τοῖς ἀκριβέσι καὶ ἀναλέγκτοις εἶδесιν ἀπὸ τῶν μὴ ἀκριβῶν τὴν ἀκρίβειαν προσθήσομεν; πᾶν γὰρ τὸ τῆς ἀκινήτου γνώσεως αἴτιον μειζόνως ἐστὶν αὐτὸ τοιοῦτον. ψυχὴν ἄρα τὴν γεννητικὴν ὑποθετέον τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν τε καὶ λόγων. ἀλλ' εἰ μὲν ἔχουσα τὰ παραδείγματα κατ' οὐσίαν ὑφίστησιν αὐτά, καὶ εἰσὶν αἱ γεννήσεις προβολαὶ τῶν ἐν αὐτῇ προυπαρχόντων εἰδῶν, τῷ τε Πλάτῳ συνεσόμεθα ταῦτα λέγοντες καὶ τὴν ἀληθῆ οὐσίαν τῶν μαθημάτων εὐρηκότες ἂν εἴημεν. εἰ δὲ μὴ ἔχουσα μηδὲ προειληφυῖα τοὺς λόγους τοσοῦτον ὑφαίνει διάκοσμον ἄϋλον καὶ τοσαύτην ἀπογεννᾷ θεωρίαν, πῶς τὰ γεννηθέντα δύναται διακρίνειν, εἴτε γόνιμα τυγχάνει ὄντα εἴτε ἀναιμιαῖα καὶ εἶδωλα ἀντ' ἀληθῶν, ποίοις δὲ κανόσι χρωμένῃ τὴν ἐν τούτοις ἀλήθειαν παραμετρεῖ; πῶς δὲ καὶ μὴ ἔχουσα τὴν οὐσίαν αὐτῶν ἀπογεννᾷ τοσαύτην ποικιλίαν λόγων; ἡυτοματισμένην γὰρ οὕτως τὴν ὑπόστασιν αὐτῶν ποιήσομεν καὶ πρὸς οὐδένα ὅρον ἀναφερομένην. εἰ ἄρα ψυχῆς ἐστὶν ἔκγονα τὰ μαθηματικὰ εἶδη καὶ οὐκ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἔχει τοὺς λόγους, ὦν ὑφίστησιν ἡ ψυχὴ, καὶ ἀπ' ἐκείνων ταῦτα προβάλλεται καὶ αἱ ὠδῖνες αὐτῆς καὶ οἱ τόκοι μενόντων εἰσὶ καὶ αἰδίων ἐκφανεῖς εἰδῶν.

Δεύτερον τοίνυν εἰ κάτωθεν καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἀθροίζομεν τοὺς τῶν μαθημάτων λόγους, πῶς οὐκ ἀνάγκη τὰς ἀποδείξεις ἀμείνους λέγειν, ὅσαι ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν συνίστανται, καὶ οὐ τὰς ἀπὸ τῶν καθολικωτέρων αἰεὶ καὶ ἀπλουστέρων εἰδῶν; τὰ γὰρ αἴτια πανταχοῦ ταῖς ἀποδείξεσιν οἰκεῖα πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν εἶναι φαμέν. εἰ οὖν τὰ μερικὰ τῶν καθόλου καὶ τὰ αἰσθητὰ τῶν διανοητῶν αἴτια, τίς μηχανὴ τὸν ὅρον τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τὰ καθόλου μᾶλλον ἀναφέρειν ἀντὶ τῶν μεριστῶν καὶ τῶν διανοητῶν τὴν οὐσίαν πρὸ τῶν αἰσθητῶν ταῖς ἀποδείξεσιν συγγενεστέραν ἀποφαίνειν; οὐδὲ γὰρ εἴ τις φασὶν ἀποδείξειεν, ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς δυεῖν ὀρθαῖς ἰσας ἔχει τὰς γωνίας, καὶ ὅτι τὸ ἰσόπλευρον ὠδὶ καὶ τὸ σκαληνὸν ἐπίσταται κατὰ τρόπον, ἀλλ' ὁ πᾶν τρίγωνον καὶ ἀπλῶς ἀποδείξας ἔχει τὴν ἐπιστήμην καθ' αὐτό. καὶ πάλιν ὅτι τὸ καθόλου βέλτιον τοῦ κατὰ μέρος πρὸς ἀπόδειξιν, καὶ ἐξῆς ὅτι αἱ ἀποδείξεις ἐκ τῶν καθόλου μᾶλλον, ἐξ ὧν δὲ αἱ ἀποδείξεις, ταῦτα πρότερα καὶ τῇ φύσει προηγούμενα τῶν καθ' ἕκαστα καὶ αἴτια τῶν δεικνυμένων. πολλοῦ ἄρα δέουσιν αἱ ἀποδεικτικαὶ τῶν ἐπισημῶν περὶ τὰ ὑστερογενῆ καὶ τὰ ἀμυδρότερα τῶν αἰσθητῶν ἀθρεῖν, ἀλλ' οὐ

τὰ διανοίᾳ ληπτὰ καὶ τελειότερα τῶν αἰσθήσει καὶ δόξῃ γνωρίμων θεωρεῖν.

Ἔτι δὴ τὸ τρίτον λέγομεν, ὅτι καὶ τὴν ψυχὴν ἀτιμότεραν ποιοῦσι τῆς ὕλης οἱ ταῦτα λέγοντες. εἰ γὰρ ἡ μὲν ὕλη τὰ οὐσιώδη καὶ μᾶλλον ὄντα καὶ τρανέστερα παρὰ τῆς φύσεως δέχεται, ἡ δὲ ψυχὴ δεύτερα ἀπ' ἐκείνων καὶ εἰδῶλα καὶ εἰκόνας ὑστερογενεῖς ἐν ἑαυτῇ διαπλάττει πρὸς οὐσίαν ἀτιμότερας ἀφαιροῦσα τῆς ὕλης τὰ κατὰ φύσιν αὐτῆς ἀχώριστα, πῶς οὐχὶ τὴν ψυχὴν ἀδρανέστεραν τῆς ὕλης καὶ καταδεεστέραν ἀποφαίνουσι; τόπος μὲν γὰρ καὶ ἡ ὕλη τῶν ἐνύλων λόγων καὶ ἡ ψυχὴ τῶν εἰδῶν. ἀλλ' ἡ μὲν τῶν πρώτων ἡ δὲ τῶν δευτέρων, καὶ ἡ μὲν τῶν προηγουμένως ὄντων ἡ δὲ τῶν ἐκείθεν ὑφισταμένων, καὶ ἡ μὲν τῶν κατ' οὐσίαν, ἡ δὲ τῶν κατ' ἐπίνοιαν γενομένων. πῶς οὖν ἡ νοῦ καὶ τῆς νοερᾶς οὐσίας πρώτως μετέχουσα καὶ πληρουμένη τῆς γνώσεως ἐκείθεν καὶ τῆς ὅλης ζωῆς ἀμυδροτέρων εἰδῶν ἐστὶν ὑποδοχὴ τῆς ἐσχάτης ἐν τοῖς οὖσιν ἔδρας καὶ πρὸς τὸ εἶναι πάντων ἀτελεστέρας; ἀλλὰ πρὸς μὲν ταύτην ἀπαντᾶν τὴν δόξαν πολλοῖς πολλάκις εὐθύνας δεδωκυῖαν περιέρχον. εἰ δὲ μὴ ἐστὶ κατὰ ἀφαιρέσιν τῶν ἐνύλων τὰ μαθηματικὰ εἶδη μήτε κατὰ συναθροισμὸν τῶν ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα κοινῶν, μηθ' ὅλως ὑστερογενῆ καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν, ἀνάγκη δῆπου τὴν ψυχὴν ἢ παρ' αὐτῆς ἢ παρὰ νοῦ λαμβάνειν αὐτὰ ἢ καὶ παρ' αὐτῆς καὶ παρ' ἐκείνου. ἀλλ' εἰ μὲν παρ' αὐτῆς μόνον, πῶς εἰκόνας ταῦτα τῶν νοερῶν εἰδῶν; πῶς δὲ μεταξὺ τῆς ἀμερίστου φύσεως καὶ τῆς μεριστῆς μηδεμίαν ἀπὸ τῶν πρώτων εἰς τὸ εἶναι συμπλήρῳσιν λαχόντα; πῶς δὲ πρωτουργὰ παραδείγματα τῶν ὅλων τὰ ἐν νῷ προέστηκεν; εἰ δὲ παρ' ἐκείνου μόνον, πῶς τὸ αὐτενέργητον τῆς ψυχῆς καὶ αὐτοκίνητον δύναται μένειν, εἴπερ οἱ ἐν αὐτῇ λόγοι κατὰ τὴν τῶν ἑτεροκινήτων ὑπόστασιν ἀλλαχόθεν εἰς αὐτὴν ἔρρυσαν; καὶ τί διοίσει τῆς ὕλης τῆς δυνάμει μόνον οὔσης πάντα, γεννώσης δὲ οὐδὲν τῶν ἐνύλων εἰδῶν; λείπεται δὴ οὖν καὶ παρ' αὐτῆς καὶ παρὰ νοῦ ταῦτα παράγειν καὶ εἶναι πλήρωμα τῶν εἰδῶν αὐτῇ, ἀπὸ μὲν τῶν νοερῶν παραδειγμάτων ὑφισταμένων, αὐτογόνως δὲ τὴν εἰς τὸ εἶναι πάροδον λαγχανόντων. καὶ οὐκ ἄρα ἦν ἡ ψυχὴ γραμματεῖον καὶ τῶν λόγων κενόν, ἀλλὰ γεγραμμένον ἀεὶ καὶ γράφον ἑαυτὸ καὶ ὑπὸ νοῦ γραφόμενον. νοῦς γάρ ἐστι καὶ ἡ ψυχὴ κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ νοῦν ἀνελίττων ἑαυτὸν καὶ εἰκῶν ἐκείνου καὶ τύπος ἑξῶ γενόμενος. εἰ οὖν ἐκεῖνος πάντα νοερῶς, καὶ ἡ ψυχὴ τὰ πάντα ψυχικῶς, καὶ εἰ παραδειγματικῶς ἐκεῖνος, καὶ ἡ ψυχὴ εἰκονικῶς, καὶ εἰ συνηρημένως, ἡ ψυχὴ διηρημένως. ὁ δὲ καὶ ὁ Πλάτων εἰδῶς ἐκ πάντων ὑφίστησι τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν τὴν ψυχὴν καὶ κατ' ἀριθμοὺς αὐτὴν διαιρεῖ καὶ συνδεῖ ταῖς ἀναλογίαις καὶ τοῖς ἀρμονικοῖς λόγοις, καὶ τὰς πρωτουργοὺς ἀρχὰς τῶν σχημάτων ἐν αὐτῇ καταβάλλεται, τό τε εὐθὺ καὶ τὸ περιφερές, καὶ κινεῖ τοὺς ἐν αὐτῇ κύκλους νοερῶς. πάντα ἄρα τὰ μαθηματικὰ πρῶτόν ἐστιν ἐν τῇ ψυχῇ καὶ πρὸ τῶν ἀριθμῶν οἱ αὐτοκίνητοι καὶ πρὸ τῶν φαινομένων σχημάτων τὰ ζωδιακὰ σχήματα καὶ πρὸ τῶν ἡρμοσμένων οἱ ἀρμονικοὶ λόγοι καὶ πρὸ τῶν κύκλῳ κινουμένων σωμάτων οἱ ἀφανεῖς κύκλοι δεδημιούργηται καὶ πλήρωμα τῶν πάντων ἡ ψυχὴ· καὶ διάκοσμος οὗτος ἄλλος αὐτὸς ἑαυτὸν παράγων καὶ ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς παραγόμενος ζωῆς τε πληρῶν

[25]

[FR15]

[5]

[10]

[15]

[20]

[25]

[FR16]

[5]

[10]

[15]

[20]

[25]

[FR17]

ἑαυτὸν καὶ ἀπὸ τοῦ δημιουργοῦ πληρούμενος ἄσωμάτως καὶ ἀδιαστάτως, καὶ
 ὅτ' ἂν προβάλλῃ τοὺς αὐτοῦ λόγους, τότε καὶ ἐπιστήμας προφαίνει πάσας καὶ [5]
 ἀρετάς. οὐσίωται οὖν ἐν τούτοις ἡ ψυχὴ τοῖς εἶδεσι καὶ οὔτε τὸν ἀριθμὸν ἐπ'
 αὐτῆς μονάδων πλῆθος ὑποληπτέον οὔτε τὴν τῶν διαστατῶν ιδέαν σωματικῶς [10]
 ἀκουστέον, ἀλλὰ πάντα ζωτικῶς καὶ νοερῶς τὰ παραδείγματα τῶν φαινομένων
 ἀριθμῶν καὶ σχημάτων καὶ λόγων καὶ κινήσεων ὑποθετέον ἐπομένοις τῷ Τιμαίῳ
 πᾶσαν αὐτῆς τὴν γένεσιν καὶ τὴν δημιουργίαν ἀπὸ τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν [15]
 συμπληρώσαντι καὶ πάντων ἐν αὐτῇ τὰς αἰτίας ἰδρύσαντι. τῶν μὲν γὰρ ἀρι-
 θμῶν πάντων οἱ ἑπτὰ ὅροι τὰς ἀρχὰς περιειλήφασιν τῶν γραμμικῶν καὶ τῶν
 ἐπιπέδων καὶ τῶν στερεῶν, τῶν δὲ λόγων πάντων οἱ ἑπτὰ λόγοι κατ' αἰτίαν ἐν
 αὐτῇ προϋφεστήκασιν, τῶν δ' αὖ σχημάτων αἱ ἀρχαὶ δημιουργικῶς ἰδρύσθησαν [20]
 ἐν αὐτῇ, τῶν δὲ κινήσεων ἡ πρωτίστη καὶ τὰς ἄλλας ἀπάσας περιέχουσα καὶ
 κινουῦσα συνυφέστηκεν αὐτῇ. πάντων γὰρ τῶν κινουμένων ὁ κύκλος ἀρχὴ καὶ
 ἡ κύκλῳ κίνησις. οὐσιώδεις ἄρα καὶ αὐτοκίνητοι τῶν μαθημάτων εἰσὶν οἱ λόγοι [25]
 συμπληροῦντες τὰς ψυχάς, οὓς δὴ καὶ προβάλλουσα ἡ διάνοια καὶ ἐξελίπτουσα
 πᾶσαν τὴν ποικιλίαν ὑφίστησι τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, καὶ οὐ μὴ ποτε
 παύσῃται, γεννῶσα μὲν αἰεὶ καὶ ἀνευρίσκουσα ἄλλα ἐπ' ἄλλοις, τοὺς δὲ ἀμερεῖς [FR18]
 αὐτῆς λόγους ἐξαπλοῦσα. πάντα γὰρ προεἶληφεν ἀρχοειδῶς καὶ κατὰ τὴν ἀπε-
 ρον ἑαυτῆς δύναμιν ἐκ τῶν προειλημμένων ἀρχῶν παντοδαπῶν θεωρημάτων
 ποιεῖται προβολάς.

Ἄλλὰ δὴ μετὰ τὴν οὐσίαν τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἐπὶ τὴν μίαν αὐτῶν ἐπι- [5]
 στήμην ἀναδράμωμεν, ἣν πρὸ τῶν πολλῶν ἐδείκνυμεν οὔσαν, καὶ θεωρήσωμεν,
 τί τὸ ἔργον αὐτῆς καὶ τίνες αἱ δυνάμεις, καὶ ἐπὶ πόσον διατείνουσαι ταῖς ἐνερ-

γείαις.

Τὸ μὲν δὴ ἔργον τῆς ὅλης μαθηματικῆς διανοητικόν, ὥσπερ τὸ πρότερον [10]
 εἶπομεν, θετέον καὶ οὔτε τοιοῦτον, ὅποῖον τὸ νοερὸν ἐν ἑαυτῷ μονίμως ἰδρυ-
 μένον καὶ τέλειον καὶ αὐταρκες ἀφ' ἑαυτοῦ καὶ πρὸς ἑαυτὸ συνεῖον, οὔτε οἷον τὸ [15]
 τῆς δόξης καὶ τῆς αἰσθήσεως. αὗται γὰρ αἱ γνώσεις πρὸς τὰ ἐκτὸς ἀπερείδονται
 καὶ περὶ ἐκεῖνα ἐνεργοῦσι καὶ τὰς αἰτίας οὐκ ἔχουσι τῶν γινωσκομένων. ἡ δ' [20]
 αὖ μαθηματικὴ τῆς μὲν ἀναμνήσεως ἐξωθεν ἄρχεται, τελευτᾷ δὲ εἰς τοὺς ἑνδον
 λόγους, καὶ ἀνεγείρεται μὲν ἀπὸ τῶν ὑστέρων, καταντᾷ δὲ εἰς τὴν προηγουμένην [25]
 οὐσίαν τῶν εἰδῶν, καὶ ἀκίνητος μὲν αὐτῆς οὐκ ἔστιν ἡ ἐνέργεια καθάπερ ἡ
 νοερά, διὰ δὲ κινήσεως οὐ τοπικῆς οὐδὲ ἀλλοιωτικῆς ὥσπερ αἱ αἰσθήσεις, ἀλλὰ [25]
 ζωτικῆς ἀνελίσσεται καὶ διέξεισι τὸν ἄσώματον τῶν λόγων διάκοσμον, τότε μὲν
 ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ἐπὶ τὰ ἀποτελέσματα χωροῦσα, τότε δὲ ἀνάπαλιν ὀδεύουσα, [FR19]
 καὶ τότε μὲν ἀπὸ τῶν προγιγνωσκομένων ἐπὶ τὰ ζητούμενα, τότε δὲ ἀπὸ τῶν
 ζητούμενων ἐπὶ τὰ προηγούμενα κατὰ τὴν γυνῶσιν. ἐτι τοίνυν οὔτε ὥς πλήρης
 ἑαυτῆς ἀπάσης ζητήσεως ὑπερίδρυται καθάπερ ὁ νοῦς, οὔτε ἀφ' ἐτέρων τελειοῦ-
 ται ὥς ἡ αἰσθήσις, ἀλλὰ διὰ ζητήσεως εἰς τὴν εὕρεσιν πρόεισιν καὶ ἀπὸ τοῦ
 ἀτελοῦς εἰς τελειότητα ἐπάνεισι. [5]

Δυνάμεις γε μὴν ἔχει διττάς, τὰς μὲν εἰς πλῆθος προαγούσας τὰς ἀρχὰς καὶ

ἀπογεννώσας τὰς πολυειδεῖς τῆς θεωρίας ἀτραπούς, τὰς δὲ συναγωγούς τῶν πολλῶν διεξόδων εἰς τὰς οἰκείας ὑποθέσεις. διότι γὰρ ἀρχὰς προεστήσατο [10] τό τε ἐν καὶ τὸ πλῆθος, τό τε πέρας καὶ τὸ ἄπειρον, τὰ ὑποκείμενα αὐτῇ πρὸς τὴν κατάληψιν μέσσην τε ἐκληρώσατο τάξιν τῶν ἀμερίστων εἰδῶν καὶ τῶν πάντη μεριστῶν, εἰκότως δὴ οἶμαι καὶ αἱ γνωστικαὶ δυνάμεις τῆς ὅλης αὐτῶν ἐπιστήμης διπλαῖ πεφῆνασιν οὔσαι, καὶ αἱ μὲν ἡμῖν εἰς τὴν ἐνώσιν σπεύδουσιν [15] καὶ συμπτύσσουσιν τὸ πλῆθος, αἱ δὲ διακριτικαὶ τῶν ἀπλῶν εἰς τὰ ποικίλα καὶ τῶν καθολικωτέρων εἰς τὰ μερικώτερα, καὶ τῶν ἐν ἀρχῇ λόγων τετεγμένων εἰς τὰ δεύτερα καὶ τὰ πολλοστὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν. ἄνωθεν γὰρ ἀρχομένη διήκει μέχρι τῶν αἰσθητῶν ἀποτελεσμάτων καὶ συνάπτει πρὸς τὴν φύσιν καὶ συναποδείκνυσι [20] πολλὰ μετὰ τῆς φυσιολογίας, ὥσπερ δὴ κάτωθεν ἐπανιοῦσα συνεγγίζει πως τῇ νοεῖ γνώσει καὶ ἐφάπτεται τῆς τῶν πρώτων θεωρίας. διὸ δὴ καὶ ἐν ταῖς ἀποπερατώσεσιν ἑαυτῆς τὴν τε μηχανικὴν ὅλην προύβαλεν καὶ τὴν ὀπτικήν καὶ κατοπτρικὴν θεωρίαν καὶ ἄλλας πολλὰς συμπεπλεγμένας τοῖς αἰσθητοῖς καὶ δι' ἐκείνων ἐνεργούσας, καὶ ἐν ταῖς ἀνόδοις τῶν ἀμερίστων καὶ ἀύλων νοήσεων ἀντιλ- [FR20] αμβάνεται καὶ μετ' ἐκείνων τελειοῖ τὰς μεριστὰς ἐπιβολὰς καὶ τὰς ἐν διεξόδοις φερομένας γνώσεις, τὰ τε ἑαυτῆς γένη καὶ εἶδη ταῖς οὐσίαις ἐκείναις ἀφομοιοῖ, καὶ τὴν περὶ θεῶν ἀλήθειαν καὶ τὴν περὶ τῶν ὄντων θεωρίαν ἐν τοῖς οἰκείοις [5] ἐκφαίνει λογισμοῖς. τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων εἰρήσθω.

Τὸ δὲ ἐντεῦθεν τῆς ἐπιστήμης ταύτης κατίδωμεν ἐξαίφνης ἀπὸ τῶν ἀρχηγικωτάτων γνώσεων μέχρι τῶν ἐσχάτων διατεῖνον. ὁ μὲν οὖν Τίμαιος κατὰ [10] παιδείουσιν ὁδὸν τὴν τῶν μαθημάτων γνῶσιν ἀποκαλεῖ. διότι δὴ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον πρὸς τὴν τῶν ὅλων ἐπιστήμην καὶ τὴν πρώτην φιλοσοφίαν, ὃν ἡ παιδεία πρὸς τὴν ἀρετὴν. ἡ μὲν γὰρ προεστρεπίζει τὴν ψυχὴν ἔθεσιν ἀδιαστρόφοις εἰς [15] τὴν τελείαν ζωὴν, ἡ δὲ προπαρασκευάζει τὴν διάνοιαν ἡμῶν καὶ τὸ ὄμμα τῆς ψυχῆς εἰς τὴν ἐντεῦθεν περιαγωγὴν. διὸ καὶ ὁ ἐν πολιτείᾳ Σωκράτης ὀρθῶς εἶπεν· ὄμμα γὰρ τῶς ψυχῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων ἀποτυφλούμενον καὶ κατορυπτόμενον ὑπὸ τῶν μαθημάτων μόνων ἀναζωπυρεῖσθαι τε καὶ ἀνεγείρεσθαι [20] πάλιν εἰς τὴν θεάν τοῦ ὄντος καὶ ἀπὸ τῶν εἰδῶλων ἐπὶ τὰ ἀληθῆ καὶ ἀπὸ τοῦ σκοτώδους εἰς τὸ νοερὸν μεθίστασθαι φῶς, καὶ ὅλως ἀπὸ τοῦ σπηλαίου καὶ τῶν ἐν τούτῳ γενεσιουργῶν δεσμῶν καὶ τῶν ἀγκτήρων τῆς ὕλης ἐπὶ τὴν ἀσώματον [25] ἀνατείνασθαι καὶ ἀμέριστον οὐσίαν. τό τε γὰρ κάλλος καὶ ἡ τάξις τῶν ἐν μαθηματικῇ λόγων καὶ τὸ μόνιμον καὶ ἐστὼς τῆς θεωρίας αὐτοῖς ἡμᾶς συνάπτει [FR21] τοῖς νοητοῖς καὶ ἐνιδρύει τελέως, αἰ μὲν ἐστῶσιν, αἰ δὲ τῷ θείῳ κάλλει διαπρέπουσιν, αἰ δὲ τὴν πρὸς ἄλληλα τάξιν διασώζουσιν. Ὁ δὲ ἐν τῷ Φαίδρῳ Σωκράτης τρεῖς ἡμῖν παραδίδωσι τοὺς ἀναγομένους, οἳ καὶ τὸν πρώτιστον αὐτοῦ συμπληροῦσι βίον· τὸν φιλόσοφον, τὸν ἐρωτικόν τὸν μουσικόν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἐρωτικῷ τῆς ἀναγωγῆς ἀρχὴ καὶ ὁδὸς ἐντεῦθεν ἀπὸ τοῦ φαινομένου κάλλους [10] ἐπαναβασμοῖς χρωμένῳ τοῖς μέσοις εἶδεσι τῶν καλῶν, τῷ δὲ μουσικῷ τρίτην λαχόντι τάξιν ἀπὸ τῶν ἐν αἰσθήσεσιν ἀρμονιῶν ἐπὶ τὰς ἀφανεῖς ἀρμονίας καὶ τοὺς λόγους τοὺς ἐν ταύταις ἢ μετὰβασις. καὶ τῷ μὲν ἡ ὄψις, τῷ δὲ ἡ ἀκοή

τῆς ἀναμνήσεως ὄργανον. τῷ δὲ φιλοσόφῳ τὴν φύσιν πόθεν ἄρα καὶ διὰ τίνων ἡ ἀνακίνησις τῆς νοερᾶς γνώσεως καὶ ἡ πρὸς τὸ ὄντως ὄν καὶ τὴν ἀλήθειαν ἔγερσις; δεῖ γὰρ καὶ τούτῳ διὰ τὸ ἀτελὲς τῆς οἰκείας ἀρχῆς. ἡ γὰρ φυσικὴ ἀρετὴ καὶ ὅμμα ἀτελὲς καὶ ἥθος ἔλαχεν. ἐγγήγερται μὲν οὖν ἤδη παρ' αὐτοῦ καὶ ἐπτόηται περὶ τὸ ὄν ὃ τὴν φύσιν τοιοῦτος, δοτέον δὲ αὐτῷ τὰ μαθήματα, φησὶν ὁ Πλωτίνος, πρὸς συνεθισμόν τῆς ἀσωμάτου φύσεως καὶ τούτοις ὥσπερ σχήμασι χρώμενον ἀκτέον ἐπὶ τοὺς ἐν τῇ διαλεκτικῇ λόγους καὶ ὅλως ὡς τὴν τῶν ὄντων θεωρίαν.

Ἄλλ' ὅτι μὲν πρὸς φιλοσοφίαν ἡ μαθηματικὴ τὴν πρωτίστην παρέχεται συντέλειαν, ἐκ τούτων δῆλον. δεῖ δὲ καὶ τῶν καθ' ἕκαστα μεμνησθαι, καὶ ὅτι θεολογία μὲν προευντρέπει τὰς νοερὰς ἐπιβολάς. ὅσα γὰρ τοῖς ἀτελέσι δυσθήρατα καὶ ἀνάντη φαίνεται τῆς περὶ τῶν θεῶν ἀληθείας εἰς διάγνωσιν, ταῦτα οἱ τῆς μαθηματικῆς λόγοι πιστὰ καὶ καταφανῆ καὶ ἀνέλεγκτα διὰ τῶν εἰκόνων ἀποφαίνουσι. τῶν μὲν γὰρ ὑπερουσίων ἰδιοτήτων ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τὰς ἐμφάσεις δεικνύουσι, τῶν δὲ νοερῶν σχημάτων ἐν τοῖς διανοητοῖς τὰς δυνάμεις ἐκφαίνουσι. διὸ καὶ ὁ Πλάτων πολλὰ καὶ θαυμαστὰ δόγματα περὶ θεῶν διὰ τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἡμᾶς ἀναδιδάσκει καὶ ἡ τῶν Πυθαγορείων φιλοσοφία παραπετάσματος τοῦ τοις χρωμένη τὴν μυσταγωγίαν κατακρύπτει τῶν θεῶν δογμάτων. τοιοῦτος γὰρ καὶ ὁ ἱερός σύμπας λόγος καὶ ὁ Φιλόλαος ἐν ταῖς Βάκχαις καὶ ὅλος ὁ τρόπος τῆς Πυθαγόρου περὶ θεῶν ὑφηγήσεως.

Πρὸς δὲ τὴν φυσικὴν θεωρίαν τὰ μέγιστα συμβάλλεται, τὴν τε τῶν λόγων εὐταξίαν ἀναφαίνουσα, καθ' ἣν δεδημιούργηται τὸ πᾶν, καὶ ἀναλογίαν τὴν πάντα τὰ ἐν τῷ κόσμῳ συνδήσασαν, ὥς που φησὶν ὁ Τίμαιος, καὶ φίλα τὰ μαχόμενα καὶ προσήγορα καὶ συμπαθῆ τὰ διεστῶτα ποιήσασαν, καὶ τὰ ἀπλᾶ καὶ πρωτουργὰ στοιχεῖα καὶ πάντῃ τῇ συμμετρίᾳ καὶ τῇ ἰσότητι συνεχόμενα δείξασα, δι' ὧν καὶ ὁ πᾶς οὐρανὸς ἐτελεώθη, σχήματα τὰ προσήκοντα κατὰ τὰς ἑαυτοῦ μερίδας ὑποδεξάμενος, ἔτι δὲ ἀριθμοὺς τοὺς οἰκείους ἐκάστῳ τῶν γιγνομένων καὶ ταῖς περιόδοις αὐτῶν καὶ ταῖς ἀποκαταστάσεσιν ἀνευροῦσα, δι' ὧν τὰς τε εὐγονίας ἐκαστων καὶ τὰς ἐναντίας φορὰς συλλογίζεσθαι δυνατόν. ταῦτα γὰρ οἶμαι ταῖς ὁ Τίμαιος ἐνδεικνύμενος πανταχοῦ διὰ τῶν μαθηματικῶν ὀνομάτων ἐκφαίνει τῶν περὶ τῆς φύσεως τῶν ὅλων θεωρίαν καὶ τὰς γενέσεις τῶν στοιχείων ἀριθμοῖς καὶ σχήμασι κατακοσμεῖ καὶ τὰς δυνάμεις αὐτῶν καὶ τὰ πάθη καὶ τὰς ποιήσεις εἰς αὐτὰ ἀναφέρει, τῶν τε γωνιῶν τὰς ὀξύτητας καὶ τὰς ἀμβλύτητας καὶ τῶν πλευρῶν τὰς λειότητας ἢ τὰς ἐναντίας δυνάμεις, τό τε πλῆθος καὶ τὴν ὀλιγότητα τῶν στοιχείων αἰτιώμενος τῆς παντοίας μεταβολῆς.

Πρὸς γε μὴν τὴν πολιτικὴν καλουμένην φιλοσοφίαν πῶς οὐχὶ φύσομεν αὐτὴν πολλὰ δὴ καὶ θαυμαστὰ συντελεῖν, τοὺς τε καιροὺς τῶν πράξεων ἀναμετρομένην καὶ τὰς ποικίλας περιόδους τοῦ παντὸς καὶ τοὺς προσήκοντας ἀριθμοὺς ταῖς γενέσεσι, τοὺς τε ἀφομοιωματικούς καὶ τοὺς τῆς ἀνομοιότητος αἰτίους, τοὺς τε γονόμους καὶ τελείους, καὶ τοὺς ἐναντίους τούτοις, τοὺς τε ἐναρμονίου ζωῆς χορηγοὺς καὶ τοὺς τῆς ἀναρμωστίας παρεκτικούς καὶ ὅλως φορᾶς καὶ

ἀφορίας οἰστικούς. ἃ δὴ καὶ ὁ ἐν πολιτείᾳ τῶν μουσῶν λόγος ἐκφαίνει τὸν γεωμετρικὸν ἀριθμὸν σύμπαντα κύριον ἀμεινόνων καὶ χειρόνων γενέσεων τιθέμενος καὶ τῆς τε ἀλύτου τῶν ἀδιαστρόφων ἡθῶν διαμονῆς, καὶ τῆς μεταβολῆς τῶν ἀρίστων πολιτειῶν εἰς τὰς ἀλόγους καὶ ἐμπαθεῖς. ὅτι γὰρ τῆς ὅλης ἐστὶ μαθηματικῆς τὴν ἐπιστήμην παραδοῦναι τοῦ λεγομένου τούτου γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ καὶ οὐ μιᾶς τινὸς οἷον ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρίας παντί που δῆλον· διὰ πάντων γὰρ τῶν μαθημάτων οἱ λόγοι τῆς τε εὐγονίας καὶ τῆς ἀγονίας διήκουσι.

Πρὸς δ' αὖ τὴν ἡθικὴν φιλοσοφίαν ἡμᾶς τελειοῖ, τάξιν καὶ ἐναρμόνιον ζῶν ἐντιθεῖσα τοῖς ἥθεσιν ἡμῶν καὶ σχήματα πρέποντα τῇ ἀρετῇ καὶ μέλη καὶ κινήσεις παραδίδωσιν, ἀφ' ὧν δὴ καὶ ὁ Ἀθηναῖος ξένος τελειοῦσθαι βούλεται τοὺς τῆς ἡθικῆς ἀρετῆς ἐκ νέων μεταληψομένους, τῶν τε ἀρετῶν προτείνει τοὺς λόγους, ἄλλως μὲν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, ἄλλως δὲ ἐν τοῖς σχήμασιν, ἄλλως δὲ ἐν τοῖς κατὰ μουσικὴν συμφῶνσι καὶ τῶν κακιῶν τὰς ὑπερβολὰς καὶ τὰς ἐνδείας παραδείκνυσι, δι' ὧν ἀποτελούμεθα μέτριοι τὸ ἥθος καὶ κεκοσμημένοι. καὶ διὰ τοῦτο ὁ Σωκράτης ἐν Γοργίᾳ μὲν τὸν Καλλικλέα τῆς ἀτάκτου καὶ ἀκολάστου ζῶης αἰτιώμενος, γεωμετρίας γάρ, φησὶν, ἀμελεῖς καὶ τῆς κατ' αὐτὴν ἰσότητος. ἐν πολιτείᾳ δὲ τῆς τυραννικῆς ἡδονῆς τὴν ἀπόστασιν, ἣν ἔλαχεν, εὕρισκει πρὸς τὴν τοῦ βασιλέως κατὰ τὴν ἐπίπεδον γένεσιν καὶ τὴν στερεάν.

Ἀλλὰ μὴν ταῖς τε ἄλλαις ἐπιστήμαις τε καὶ τέχναις ἡλίκον τὸ ἀπὸ τῆς μαθηματικῆς ὄφελος παραγίνεται, μάθοιμεν ἂν ἀννοήσαντες, ὅτι ταῖς μὲν θεωρητικαῖς οἷον ῥητορικῇ καὶ ταῖς τοιαῖσδε πάσαις, ὅσαι διὰ λόγων κυροῦνται, τελειότητα καὶ τάξιν προστίθῃσιν καὶ τό ἐκ πρώτων τε καὶ μέσων καὶ τελευταίων συμπληροῦσθαι κατὰ τὴν πρὸς αὐτὴν ἀπεικασίαν, ταῖς δὲ ποιητικαῖς ἐν παραδείγματικος τάξει προυφίστηκε τοὺς λόγους τῶν ποιουμένων καὶ τὰ μέτρα ἐν αὐτῇ προυποστήσασα, ταῖς δὲ πρακτικαῖς τὴν ἐνέργειαν καὶ τὴν κίνησιν ἀφορίζει διὰ τῶν ἐστώτων ἑαυτῆς καὶ ἀκινήτων εἰδῶν. ὅλως γὰρ αἱ τέχναι πᾶσαι, καθάπερ δὴ φησιν ὁ ἐν τῷ Φιλήβῳ Σωκράτης, ἀριθμητικῆς δέονται καὶ μετρητικῆς καὶ στατικῆς, ἥτοι πασῶν ἢ τινῶν. αὗται δὲ πᾶσαι περιέχονται ἐν τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καὶ κατ' ἐκείνους ὀρίζονται. καὶ γὰρ αἱ τῶν ἀριθμῶν διανομαὶ καὶ ἡ τῶν μέτρων ποικιλία καὶ ἡ τῶν βαρῶν διαφορότης ὑπὸ ταύτης γνωρίζονται.

Τὸ μὲν τοίνυν ὄφελος τῆς μαθηματικῆς ὅλης ἐπιστήμης πρὸς τε φιλοσοφίαν αὐτὴν καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας καὶ τέχνας ἔσται διὰ τούτων γνώριμον τοῖς ἀκούουσιν, ἥδη δὲ τινες τῶν ἀντιλογικῶν ἐπιχειροῦσι καθαιρεῖν τὴν ἀξίαν τῆς ἐπιστήμης ταύτης, οἱ μὲν τὸ καλὸν αὐτῆς καὶ τὸ ἀγαθὸν ἀφαιροῦντες ὥς οὐ περι τούτων ποιουμένης τοὺς λόγους, οἱ δὲ χρησιμωτέρας τὰς τῶν αἰσθητῶν ἐμπειρίας ἀποφαίνονται τῶν ἐν αὐτῇ καθόλου θεωρουμένων, οἷον γεωδεσίαν γεωμετρίας, καὶ τὴν τῶν πολλῶν ἀριθμητικὴν τῆς ἐν θεωρήμασιν ὑφεστῶσης, καὶ τὴν ναυτικὴν ἀστρολογίαν τῆς καθόλου δεικνυσούσης. Οὔτε γὰρ πλουτοῦμεν τῷ γινώσκειν τὸν πλοῦτον, ἀλλὰ τῷ χρῆσθαι, οὔτε εὐδαιμονοῦμεν τῷ τὴν εὐδαιμονίαν γινώσκειν, ἀλλὰ τῷ ζῆν εὐδαιμονικῶς, ὥστε καὶ πρὸς τὸν βίον τὸν ἀνθρώπινον καὶ τὰς πράξεις οὐ τὰς γνωστικὰς τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ

τὰς ἐμπειρικὰς συντελεῖν ὁμολογήσομεν. οἱ γὰρ ἀγνοοῦντες μὲν τοὺς λόγους, γεγυμνασμένοι δὲ περὶ τὴν ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα πείραν ὄλῳ καὶ παντὶ διαφέρουσι πρὸς τὰς ἀνθρωπικὰς χρείας τῶν περὶ τὴν θεωρίαν μόνην ἐστχολακότων.

Πρὸς δὴ τοὺς ταῦτα λέγοντας ἀπαντησόμεθα τὸ μὲν κάλλος ἐπιδείκνυντες τῶν μαθημάτων ἀπὸ τούτων, ἀφ' ὧν καὶ ὁ Ἄριστοτέλης ἐπεχείρησεν ἡμᾶς πείθειν. τρία γὰρ ταῦτα διαφερόντως καὶ ἐν τοῖς σώμασι καὶ ἐν ταῖς ψυχαῖς τὸ κάλλος ἀποτελεῖν, τὴν τάξιν, τὴν συμμετρίαν, τὸ ὠρισμένον, ἐπεὶ καὶ τὸ αἶσχος τὸ μὲν σωματικὸν ἀπὸ τῆς ὑλικῆς ἀταξίας καὶ ἀπορφίας καὶ ἀσυμμετρίας καὶ ἀοριστίας ἐν τῷ συνθέτῳ κρατησάσης παρυφίσταται, τὸ δὲ [ψυχικόν] ἀπὸ τῆς ἀλογίας πλημμελῶς καὶ ἀτάκτως κινουμένης καὶ ἀναρμόστου πρὸς τὸν λόγον οὔσης καὶ τὸν ἐκεῖθεν ὅρον οὐ καταδεχομένης, ὥστε καὶ τὸ κάλλος ἐν τοῖς ἐναντίοις ἂν ἔχοι τὴν ὑπαρξιν, τάξει δηλαδὴ καὶ συμμετρίᾳ καὶ τῷ ὠρισμένῳ. ταῦτα δὲ ἐν τῇ μαθηματικῇ μάλιστα θεωροῦμεν ἐπιστήμη, τὴν μὲν τάξιν ἐν τῇ τῶν δευτέρων ἀεὶ καὶ ποικιλωτέρων ἀπὸ τῶν πρώτων καὶ ἀπλουστέρων ἐκφάνσει — συνήρηται γὰρ ἀεὶ τὰ ἐπόμενα τοῖς ἔμπροσθεν, καὶ τὰ μὲν ἀρχῆς ἔχει λόγον, τὰ δὲ τῶν ἐπομένων ταῖς πρώταις ὑποθέσεσιν — τὴν δὲ συμμετρίαν ἐν τῇ συμφωνίᾳ τῶν δεικνυμένων πρὸς ἄλληλα καὶ τῇ πρὸς τὸν νοῦν πάντων ἀναφορᾷ — μέτρον γὰρ ἐστὶ κοινὸν τῆς ὅλης ἐπιστήμης ὁ νοῦς, παρ' οὗ καὶ τὰς ἀρχὰς λαμβάνει καὶ πρὸς ὃν ἐπιστρέφει τοὺς μανθάνοντας — τὸ δὲ ὠρισμένον ἐν τοῖς ἐστῶσιν ἀεὶ καὶ ἀκινήτοις λόγοις· οὐ γὰρ ἄλλοτε ἄλλως ἔχει τὰ γνωστὰ αὐτῆς ὥσπερ τὰ δοξαστὰ καὶ τὰ αἰσθητὰ αὐτῆς, ἀλλ' ἀεὶ τὰ αὐτὰ προτείνεται καὶ ὠρισταί τοῖς νοεροῖς εἶδεσιν. εἰ τοίνυν τὰ μὲν ἀποτελεσματικὰ τοῦ κάλλους ἐστὶ ταῦτα διαφερόντως, τὰ δὲ μαθήματα κατὰ ταῦτα χαρακτηρίζεται, πρόδηλον ὅτι καὶ ἐν τούτοις ἐστὶ τὸ καλόν. καὶ πῶς γὰρ οὐ μέλλει, νοῦ μὲν καταλάμποντος ἄνωθεν τὴν ἐπιστήμην, ταύτης δὲ εἰς νοῦν ἐπειγομένης καὶ ἡμᾶς ἀπὸ αἰσθήσεως εἰς ἐκεῖνον μετάγειν σπευδούσης;

Τὰ δ' αὖ ὄφελος αὐτῆς οὐκ εἰς τὰς ἀνθρωπίνας χρείας ἀφορῶντας κρίνειν ἀξιόσομεν οὐδὲ τῆς ἀνάγκης στοχαζομένους· οὕτω γὰρ καὶ τὴν θεωρητικὴν ἀρετὴν αὐτὴν ἄχρηστον ὁμολογήσομεν εἶναι ἑαυτὴν τῶν ἀνθρωπίνων χωρίζουσιν καὶ, οὐ ταῦτα συντείνει, μήδ' ὅλως γινώσκειν αἰρουμένην. ὃ καὶ ὁ ἐν Θεαιτήτῳ Σωκράτης περὶ τῶν κορυφαίων χρησμοδῶν ὄντως [?] πάσης μὲν αὐτοὺς ἀφρίστησι σχέσεως τῶς πρὸς τὸν ἀνθρώπινον βίον, πάσης δὲ ἀνάγκης καὶ χρείας εὐλυτον αὐτῶν τὴν διάνοιαν εἰς τὴν τῶν ὄντων ἀνατείνει περὶωπὴν. καὶ τοίνυν καὶ τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην αὐτὴν δι' αὐτὴν αἰρετὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς θεωρίαν εἶναι θετέον, ἀλλ' οὐ διὰ τὰς ἀνθρωπίνας χρείας. εἰ δὲ χρὴ πρὸς ἄλλο τι τὸ ἐξ αὐτῆς ὄφελος ἀναφέρειν, πρὸς τὴν νοερὰν γνῶσιν τὴν ὠφέλειαν τὴν ἀπ' αὐτῆς ἀνενεκτέον· εἰς γὰρ ἐκείνην ἡμᾶς ποδηγεῖ καὶ προευτρεπίζει, τὸ ὅμμα τῆς ψυχῆς ἀποκαθαίρουσα καὶ ἀφαιροῦσα τὰ ἀπὸ τῶν αἰσθήσεων ἐμπόδια πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν ὄλων. ὥσπερ οὖν τὴν καθαρτικὴν ὅλην ἀρετὴν οὐ πρὸς τὰς βιωτικὰς χρείας ἀποβλέποντες χρησίμην ἢ ἄχρηστον φαμεν, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν θεωρίᾳ βίον, οὕτως καὶ τῆς μαθηματικῆς τὸ τέλος εἰς νοῦν ἀναπέμπειν προσήκει

καὶ τὴν σύμπασαν σοφίαν. διὸ καὶ ἡ περὶ αὐτὴν ἐνέργεια καθ' αὐτὴν τέ ἐστιν ἀξία σπουδῆς καὶ διὰ τὴν νοερὰν ζωὴν. δηλοῖ δὲ τὸ δι' ἑαυτὴν εἶναι τοῖς μετιοῦσιν αἰρετήν, ὃ καὶ Ἀριστοτέλης πού φησιν, τὸ μηδενὸς μισθοῦ προκειμένου τοῖς [15]
ζητοῦσιν ὅμως ἐν ὀλίγῳ χρόνῳ τοσαύτην ἐπίδοσιν τὴν τῶν μαθημάτων θεωρίαν λαβεῖν, ἔτι δὲ τὸ πάντας ἐν αὐτῇ φιλοχωρεῖν καὶ βούλεσθαι σχολάζειν τῶν ἄλλων ἀφεμένους, ὅσοι καὶ κατὰ μικρὸν ἐφήψαντο τῆς ἀπ' αὐτῆς ὠφελείας, ὥστε οἱ γε [20]
καταφρονητικῶς ἔχουσι τῆς τῶν μαθημάτων γνώσεως, ἄγευστοι τυγχάνουσιν ὄντες τῶν ἐν αὐτοῖς ἡδονῶν.

Οὐ δὴ οὖν διὰ τοῦτο τὴν μαθηματικὴν ἀτιμαστέον, ὅτι μὴ πρὸς τὰς ἀνθρωπίνας ἡμῖν χρείας συντελεῖ — τὰ γὰρ ἔσχατα αὐτῆς ἀπηχρήματα τῆς τοιαύτης [25]
χρείας στοχάζεται καὶ ὅσα μεθ' ὕλης ἐνεργεῖ — ἀλλὰ τοῦναντίον θαυμαστέον αὐτῆς τὴν αὐλίαν καὶ τὸ ἐν αὐτῇ μόνῃ τὸ ἀγαθὸν ἔχειν. καὶ γὰρ ὅλως παυσάμενοι [FR29]
τῆς περὶ τὰ ἀναγκαῖα φροντίσος οἱ ἄνθρωποι περὶ τὴν ζήτησιν ἐράποντο τῶν μαθημάτων. καὶ τοῦτο εἰκότως· πρῶτα μὲν γὰρ τὰ σύντροφα καὶ ὁμοφυῇ τῇ γενέσει [5]
περισπούδαστά ἐστι τοῖς ἀνθρώποις· δεύτερα δὲ τὰ τῆς γενέσεως ἀπολύοντα τὴν ψυχὴν καὶ ἀναμιμνήσκοντα τοῦ ὄντος. οὗτος ἄρα καὶ τὰ ἀναγκαῖα πρὸ τῶν δι' αὐτὰ τιμίων καὶ τὰ τῆς αἰσθήσεως σύμφυλα πρὸ τῶν κατὰ νοῦν γινωσκομένων μέτιμεν. καὶ γὰρ πᾶσα ἡ γένεσις καὶ ἡ ἐν αὐτῇ στρεφομένη τῆς ψυχῆς ζωὴ [10]
πέφυκεν ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς εἰς τὸ τέλειον χωρεῖν. τοσαῦτα καὶ πρὸς τούτους εἰρήσθω τοὺς τὴν μαθηματικὴν ἀτιμάζοντας ἐπιστήμην.

Ἵσως δ' ἂν τινες ἐκ τῆς ἡμετέρας ἐστίας ὁρμώμενοι καὶ τὸν Πλάτωνα προιστάμενοι μάρτηρα τῶν λόγων ἐπιχειρήσειαν εἰς ὑπεροψίαν ἄγειν τοὺς ἐπιπολαιότερους τῆς τῶν μαθημάτων ἀκροάσεως. καὶ γὰρ αὐτὸν δήπου τὸν φιλόσοφον ἐν πολιτείᾳ τὴν μαθηματικὴν ταύτην γινῶσιν τοῦ τῶν ἐπιστημῶν ἀπελάυνειν χοροῦ καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς αὐτῆς ὡς ἀγνοοῦσαν διελέγχειν, καὶ τὸ [20]
ᾧ ἀρχὴ μὲν, ὃ μὴ εἶδεν τελευτὴ δὲ καὶ μέσα, ἐξ ὧν οὐκ οἶδεν, ἐπὶ τούτοις προσθήσουσι, καὶ ὅσα ἄλλα παρὰ τοῦ Σωκράτους ἐν ἐκείνοις ὀνειδῇ κατὰ τῆς θεωρίας ταύτης ἀνέρριπται. πρὸς δὲ φίλους ἄνδρας ἡμεῖς ποιοῦμενοι τοὺς λόγους ἀναμνήσομεν αὐτοὺς. ὅτι καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων καθαρτικὴν τῆς ψυχῆς καὶ ἀναγωγὸν τὴν μαθηματικὴν εἶναι σαφῶς ἀποφαίνεται, τὴν ἀχλὺν ἀφαιροῦσαν [FR30]
τοῦ νοεροῦ τῆς διανοίας φωτὸς τοῦ κρείττονος σωθῆναι μυρίων σωματικῶν ὁμμάτων κατὰ τὴν Ὀμηρικὴν Ἀθηνᾶν, ὡς ἂν μὴ μόνον τῶν Ἑρμαϊκῶν δώρων, ἀλλὰ καὶ τῶν Ἀθηναϊκῶν μετέχουσιν· καὶ ὡς ἐπιστήμην αὐτὴν ἀποκαλεῖ πανταχοῦ καὶ ὡς τῆς μεγίστης εὐδαιμονίας αἰτίαν τοῖς μετιοῦσιν. [5]

Ἀλλὰ τί βούλεται διὰ τῶν ἐν πολιτείᾳ λόγων ἀφαιρῶν αὐτῆς τὴν τῆς ἐπιστήμης ἐπωνυμίαν; ἐγὼ φράσω συντόμως· πρὸς γὰρ εἰδότας ὁ παρὼν ἔσται μοι λόγος. ἐπιστήμην ὁ Πλάτων πολλαχοῦ μὲν μπροσαγορεύει πᾶσαν ὡς εἰπεῖν οὕτω τὴν τῶν καθόλου γινῶσιν, ἀντιδιαιρούμενος αὐτὴν πρὸς τὴν αἴσθησιν τὰ καθ' ἕκαστα γνωρίζουσιν, καὶ τεχνικὸς καὶ ἐμπειρικὸς τῆς τοιαύτης γνώσεως ὁ τρόπος. καὶ κατὰ τοῦτον οἶμαι τὸν λόγον ἐν τε πολιτικῷ καὶ ἐν σοφιστικῷ φαίνεται χρώμενος τῷ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματι, καὶ αὐτὴν τὴν γενναῖαν τὴν σοφιστικὴν [15]

ἐπιστήμην τιθέμενος, ἦν ὁ ἐν Γοργία Σωκράτης ἐμπειρίαν ἀπέφηνεν οὔσαν, καὶ [20]
τὴν κολακικὴν καὶ πολλὰς ἄλλας, ἐμπειρίας οὔσας ἀλλ' οὐκ ἐπιστήμας ἀλη-
θεῖς. ταύτην δὲ αὐτὴν τῶν καθόλου γινώσκων διελόμενος εἰς τε τὴν τὰς αἰτίας
γνωρίζουσιν καὶ τὴν ἄνευ αἰτίας γνωστικὴν, τὴν μὲν ἑτέραν ἐπιστήμην ἀξιοῖ
καλεῖν, τὴν δὲ λοιπὴν ἐμπειρίαν. καὶ οὕτως δὴ ταῖς μὲν τέχναις μεταδίδωσιν [25]
τοῦ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματος, ταῖς δὲ ἐμπειρίαις οὐδαμῶς. ἄλογον γὰρ πρᾶγμα
φησιν ἐν συμποσίῳ, πῶς ἂν εἴν ἐπιστήμη. καὶ πᾶσα ἄρα γινώσκων λόγον ἔχουσα [FR31]
τῶν γνωστικῶν καὶ αἰτίαν ἐπιστήμη τίς ἐστίν. πάλιν τοίνυν τὴν ἐπιστήμην
ταύτην ἀπ' αἰτίας γνωριστικὴν τῶν ὑποκειμένων διαίρει, καὶ τὴν μὲν στοχαστι-
κὴν καὶ μεριστήν, τὴν δὲ τῶν καθ' αὐτὰ καὶ ὡσαύτως ἔχόντων ἀεὶ γνωστικὴν [5]
[διακρίνει?] καὶ κατὰ ταύτην τὴν διάκρισιν ἱατρικὴν μὲν καὶ πᾶσαν τὴν περὶ τὰ
ἐνύλα πραγματεῖαν χωρίζει τῆς ἐπιστήμης, τὴν δ' αὖ μαθηματικὴν καὶ ὅλως τὴν [10]
τῶν αἰδίων θεωρητικὴν ἐπιστήμην προσαγορεύει. ταύτην δ' αὖ τὴν ἐπιστήμην, ἦν
τῶν τεχνῶν ἀφορίζομεν, διαίρων τὴν μὲν ἀνυπόθετον εἶναι βούλεται, τὴν δὲ ἐξ
ὑποθέσεως ὠρμημένην, καὶ τὴν μὲν ἀνυπόθετον τῶν ὅλων εἶναι γνωστικὴν μέχρι [15]
τοῦ ἀγαθοῦ καὶ τῆς ἀνωτάτω τῶν πάντων αἰτίας ἀναβαίνουσιν καὶ τῆς ἀναγ-
ωγῆς τέλος ποιουμένων τὸ ἀγαθόν, τὴν δὲ ὠρισμένης ἀρχᾶς προστησαμένην ἀπὸ
τούτων δεικνύναι τὰ ἐπόμενα αὐταῖς οὐκ ἐπ' ἀρχὴν ἀλλ' ἐπὶ τελευτὴν ἰοῦσαν.
καὶ οὕτως δὴ τὴν μαθηματικὴν ἅτε ὑποθέσεσιν χρωμένην τῆς ἀνυποθέτου καὶ [20]
τελείας ἐπιστήμης ἀπολείπεσθαί φησιν. μία γὰρ ἡ ὄντως ἐπιστήμη, καθ' ἣν τὰ
ὄντα πάντα γινώσκειν πεφύκαμεν, καὶ ἂν ἥς πᾶσαι αἱ ἀρχαὶ ταῖς μὲν ἐγγυτέρω [FR32]
τεταγμέναις, ταῖς δὲ πορρωτέρω. μὴ δὲ τοίνυν λέγωμεν, ὅτι τῶν ἐπιστημῶν ὁ
Πλάτων ἀπελαύνει τὴν μαθηματικὴν, ἀλλ' ὅτι μιᾶς ἐπιστήμης αὐτὴν τῆς ἀκρο- [5]
τάτης δευτέραν ἀποφαίνει, μὴ δ' ὅτι τὰς οἰκείας ἀρχὰς ἀγνοεῖν αὐτὴν φησιν, ἀλλ'
ὅτι παρ' ἐκείνης λαβοῦσαν καὶ ἀναποδείκτως ἔχουσιν ἐκ τούτων τὰ ἐφεξῆς
ἀποδεικνύναι. καὶ γὰρ τὴν ψυχὴν τὴν ἐκ τῶν μαθηματικῶν λόγων ὑποστᾶσαν [10]
ποτὲ μὲν κινήσεως ἀρχὴν εἶναι συγχωρεῖ, ποτὲ δὲ ἀπὸ τῶν νοητῶν γενῶν
δέχεσθαι τὴν κίνησιν. καὶ συνάδει ταῦτα ἀλλήλοις. τοῖς μὲν γὰρ ἀπ' ἄλλου κι-
νουμένοις αἰτία τῆς κινήσεως ἐστίν, ἀπάσης δὲ ἄρα κινήσεως οὐκ αἰτία. κατὰ τὰ
αὐτὰ δὲ οὖν καὶ ἡ μαθηματικὴ τῆς μὲν πρωτίστης ἐστὶν ἐπιστήμης δευτέρα καὶ ὡς
πρὸς ἐκείνην ἀτελής, ἐπιστήμη δὲ ὅμως, οὐχ ὡς ἀνυπόθετος, ἀλλ' ὡς τῶν ἰδίων [15]
ἐν ψυχῇ λόγων γνωριστικὴ καὶ ὡς τὰς αἰτίας ἀποδιδούσα τῶν συμπερασμάτων
καὶ λόγον ἔχουσα τῶν ὑποκειμένων ἑαυτῇ γνωστῶν. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς
Πλάτωνος γνώμης ὑπὲρ τῶν μαθημάτων εἰρήσθω. [20]

Τίνα δ' ἂν τις ἀπαιτήσκειν τὸν μαθηματικόν, καὶ πῶς ἂν δύναίτο τις αὐτὸν
κρίνειν ὀρθῶς μετὰ ταῦτα λέγωμεν. ὁ μὲν γὰρ ἀπλῶς πεπαιδευμένος περὶ πάντα [25]
κριτικὸς, φησὶν Ἀριστοτέλης, ὁ δὲ περὶ τὰ μαθήματα πεπαιδευμένος τῶν ἐν
τοίτοις λόγων ἔσται κριτικὸς τῆς ὀρθότητος. δεῖ τοίνυν ὅρους προσειληφέναι
τῆς κρίσεως καὶ γινώσκειν πρῶτον μὲν ἐφ' ὧν δεῖ κατὰ τὰ κοινὰ ποιεῖσθαι [FR33]
τὰς ἀποδείξεις, καὶ ἐφ' ὧν εἰς τὰς ἐκάστων ιδιότητας ἀποβλέπειν. πολλὰ γὰρ
ὑπάρχει τὰ αὐτὰ τοῖς κατ' εἶδος διαφέρουσιν, οἷον τριγώνοις πᾶσιν αἱ δύο ὀρθαί.

πολλά δὲ τὴν μὲν αὐτὴν ἔχει κατηγορίαν, διαφέρει δὲ κατ' εἶδος ἐφ' ἐκάστων
 τὸ κοινόν, οἷον ἡ ὁμοιότης ἐν σχήμασι καὶ ἀριθμοῖς. οὐ δεῖ δὴ μίαν ἀποδείξιν
 ἐπὶ τούτων ἀπαιτεῖν τὸν μαθηματικόν· οὐ γὰρ αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ σφημάτων καὶ
 ἀριθμῶν, ἀλλὰ διαφέρουσαι κατὰ τὸ ὑποκείμενον γένος. εἰ δὲ τὸ καθ' αὐτὸ
 συμβεβηκὸς ἔν, καὶ ἡ ἀπόδειξις μία· τὸ γὰρ δύο ὀρθὰς ἔχειν γωνίας ταῦτόν
 ἐν πᾶσι τριγώνοις, καὶ τὸ ὅσον συμβέβηκεν ταῦτόν ἐν ἅπασιν, τὸ τρίγωνον, καὶ ὁ
 τριγωνικὸς λόγος. ὥσπερ δὴ καὶ τὸ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν τὰς ἐκτὸς οὐ
 τοῖς τριγώνοις μόνον, ἀλλὰ καὶ πᾶσιν εὐθυγράμμοις ὑπάρχει, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἐπὶ
 πάντα ἐφαρμόττει, καθόσον εὐθύγραμμα. καὶ γὰρ ἕκαστος λόγος συνεισφέρει
 τινὰ πάντως ἰδιότητα καὶ πάθος, οὗ μετέχει πάντα κατὰ τὸν λόγον ἐκείνον, οἷον
 τὸν τριγωνικὸν ἢ τὸν εὐθυγραμμικὸν ἢ ὅλως τὸν τοῦ σχήματος.

Δεύτερον τοίνυν, εἰ κατὰ τὴν ὑποκειμένην ὕλην ποιεῖται τὰς ἀποδείξεις, οἷον
 εἰ ἀναγκαίους ἀποδίδωσι λόγους καὶ ἀνελέγκτους, ἀλλὰ μὴ πιθανοὺς μηδὲ τοῦ
 εἰκότος ἀναπεπλησμένους. ὅμοιον γὰρ φησιν Ἀριστοτέλης ῥητορικὸν ἀποδείξεις
 ἀπαιτεῖν καὶ μαθηματικοῦ πιθανολογοῦντος ἀποδέχεσθαι. δεῖ γὰρ ἕκαστον
 ἐπιστήμονα καὶ τεχνίτην προσήκοντας ἀποδιδόναι τοῖς πράγμασι, περὶ ἃ πραγ-
 ματεύεται, τοὺς λόγους. οὕτως καὶ ὁ Πλάτων ἐν Τιμαίῳ τὸν μὲν φυσιολόγον
 εἰκότως ἀπαιτεῖ λόγους ὡς ἂν περὶ τοιούτων πραγματευόμενον, τὸν δὲ περὶ τῶν
 νοητῶν ἀναδιδάσκοντα καὶ τῆς ἐστῶσης οὐσίας ἀνελέγκτους καὶ ἀκινήτους.
 εὐθύς γὰρ τὰ ὑποκείμενα ταῖς ἐπιστήμαις ἢ ταῖς τέχναις ποιεῖ διαφοράς, οἷον εἰ
 τὰ μὲν ἀκίνητα, τὰ δὲ κινούμενα, καὶ τὰ μὲν ἀπλούστερα, τὰ δὲ συνθετώτερα,
 καὶ τὰ μὲν νοητά, τὰ δὲ αἰσθητά. οὗτ' οὖν πᾶσαν τὴν μαθηματικὴν τὴν αὐτὴν
 ἀκρίβειαν ἀπαιτήσομεν — εἰ γὰρ ἡ μὲν αἰσθητῶν ἐφάπτοιτό πως, ἡ δὲ νοητῶν
 εἴη γνώσεις ὑποκειμένων, οὐχ ὁμοίως ἀμφοτέραι ἀκριβεῖς, ἀλλ' ἡ ἑτέρα μᾶλ-
 λον. διὸ τὴν ἀριθμητικὴν τῆς ἁρμονικῆς μᾶλλον ἀκριβῆ φαιμεν — οὐθ' ὅλως
 τὴν μαθηματικὴν καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας ταῖς αὐταῖς ἀποδείξεσιν ἀξιόσομεν
 χρῆσθαι. τὰ γὰρ ὑποκείμενα διαφορὰν οὐκ ὀλίγην παρέχεται.

Τὸ δὴ τρίτον λέγομεν ὅτι καὶ περὶ ταυτότητος καὶ ἑτερότητος ἐπεσκέφθαι
 δεῖ τὸν μέλλοντα χρῆναι ὀρθῶς τοὺς τῆς μαθηματικῆς λόγους καὶ περὶ τοῦ καθ'
 αὐτὸ καὶ τοῦ κατὰ συμβεβηκὸς καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας καὶ περὶ πάντων τῶν
 τοιούτων. σχεδὸν γὰρ αἱ ἁμαρτίαι πᾶσαι κατὰ ταῦτα συμβαίνουσι τῶν οἰομένων
 ἀποδεικνύναι μαθηματικῶς, οὐ μέντοι καὶ δεικνύντων, ὅταν τὸ ταῦτόν ὡς ἕτερον
 καθ' ἕκαστον εἶδος ἀποδεικνύωσιν, ἢ τὸ ἕτερον ὡς ταῦτόν, ἢ ὅταν τὸ κατὰ
 συμβεβηκὸς ὑπάρχον ὡς καθ' αὐτὸ παραλαμβάνωσιν, ἢ τὸ καθ' αὐτὸ ὡς κατὰ
 συμβεβηκὸς, οἷον ὅτι ἡ περιφέρεια καλλίων τῶς εὐθείας, ἢ τὸ ἰσόπλευρον τοῦ
 ἰσοσκελοῦς. οὐ γὰρ μαθηματικοῦ ταῦτα διορίζειν.

Τέταρτον οὖν, ὅτι τῆς μαθηματικῆς μέσην ἐχούσης τάξιν τῶν τε νοητῶν καὶ
 αἰσθητῶν καὶ πολλὰς μὲν εἰκόνας τῶν θείων ἐν ἑαυτῇ δεικνυσούσης, πολλὰ δὲ
 παραδείγματα τῶν φυσικῶν λόγων, δεῖ καὶ τὰς ἀποδείξεις τριπλᾶς ἐπ' αὐτῆς θεω-
 ρεῖν, τὰς μὲν νοερωτέρας, τὰς δὲ διεξοδικωτέρας, τὰς δὲ καὶ δόξης ἐφαπτομένας.
 δεῖ γὰρ κατὰ τὰ προβλήματα τὰς ἀποδείξεις διαφερούσας εἶναι καὶ οἰκείως τοῖς

γένεσι διαιρεῖσθαι τῶν ὄντων, ἐπεὶ καὶ αὐτὴ πᾶσι συνυφαίνεται αὐτοῖς καὶ πρὸς πάντας συναρμόζει τοὺς ἑαυτῆς λόγους. [15]

Ἄλλα τούτων μὲν ἄδην, περὶ δὲ τῶν εἰδῶν τῆς μαθηματικῆς μετὰ ταῦτα διοριστέον, τίνα τε καὶ πόσα τὸν ἀριθμὸν ἔστιν. μετὰ γὰρ τὸ ὅλον καὶ παντελὲς αὐτῆς γένος δεῖ δὴ πού καὶ τὰς τῶν μερικωτέρων ἐπιστημῶν κατ' εἶδη διαφορὰς ἀναλογίσασθαι. τοῖς μὲν οὖν **Πυθαγορείοις** ἐδόκει τετραχὰ διαιρεῖν τὴν ὅλην μαθηματικὴν ἐπιστήμην, τὸ μὲν αὐτῆς περὶ τὸ ποσόν, τὸ δὲ περὶ τὸ πηλίκον ἀφορίζουσι καὶ τούτων ἑκάτερον διττὸν τιθεμένοις· τό τε γὰρ ποσὸν ἢ καθ' αὐτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, ἢ πρὸς ἄλλο θεωρεῖσθαι κατὰ σχέσιν, καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἐστὼς ἢ κινούμενον εἶναι· καὶ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν τὸ καθ' αὐτὸ τὸ ποσὸν θεωρεῖν, τὴν δὲ μουσικὴν τὸ πρὸς ἄλλο, γεωμετρίαν δὲ τὸ πηλίκον ἀκίνητον ὑπάρχον καὶ τὴν σφαιρικὴν τὸ καθ' αὐτὸ κινούμενον· ἐπισκοπεῖν δ' αὖ τὸ πηλίκον καὶ ποσὸν οὔτε μέγεθος ἀπλῶς οὔτε πλῆθος ἀλλὰ τὸ καθ' ἑκάτερον ὠρισμένον· τοῦτο γὰρ ἀφελούσας τῶν ἀπείρων τὰς ἐπιστήμας κατανοεῖν, ὡς οὐκ ἐνὸν τὴν καθ' ἑκάτερον ἀπειρίαν γνώσει περιλαβεῖν. ὅταν δὲ ταῦτα λέγωσιν ἄνδρες εἰς ἅπαν σοφίας ἐλληλαχότες, οὔτε τὸ ποσὸν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἀκούειν ἡμεῖς ἀξιώσομεν οὔτε τὸ πηλίκον τὸ περὶ τὰ σώματα φανταζόμενον. ταῦτα γὰρ οἶμαι θεωρεῖν τῆς φυσιολογίας ἔστιν, ἀλλ' οὐ τῆς μαθηματικῆς αὐτῆς. ἀλλ' ἐπεὶ τὴν ἔνωσιν καὶ τὴν διάκρισιν τῶν ὅλων καὶ τὴν ταυτότητα μετὰ τῆς ἑτερότητος εἰς τὴν τῆς ψυχῆς συμπλήρωσιν ὁ δημιουργὸς παρέβληφεν καὶ πρὸς ταύταις στάσιν καὶ κίνησιν καὶ ἐκ τούτων αὐτὴν τῶν γενῶν ὑπέστησεν, ὡς ὁ Τίμαιος ἡμᾶς ἀναδίδασκεν, λεκτέον, ὅτι κατὰ μὲν τὴν ἑτερότητα τὴν αὐτῆς καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν λόγων καὶ τὸ πλῆθος ἢ διάνοια στᾶσα καὶ νοήσασα ἑαυτὴν ἐν καὶ πολλὰ οὖσαν τοὺς τε ἀριθμοὺς προβάλλει καὶ τὴν τούτων γνώσιν, τὴν ἀριθμητικὴν, κατὰ δὲ τὴν ἔνωσιν τοῦ πλήθους καὶ τὴν πρὸς ἑαυτὸ κοινωνίαν καὶ τὸν σύνδεσμον τὴν μουσικὴν. δι' ὃ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ πρεσβυτέρα τῆς μουσικῆς, ἐπεὶ καὶ ἡ ψυχὴ διαιρεῖται πρῶτον δημιουργικῶς, εἴθ' οὕτως συνδέδεται τοῖς λόγοις, ὡς ὁ **Πλάτων** ὑφηγεῖται. καὶ αὖ πάλιν κατὰ μὲν τὴν στάσιν τὴν ἐν αὐτῇ τὴν ἐνέργειαν ἰδρύσασα γεωμετρίαν ἀφ' ἑαυτῆς ἐξέφηνεν, καὶ τὸ ἐν σχῆμα τὸ οὐσιώδες καὶ τὰς δημιουργικὰς ἀρχὰς τῶν σχημάτων πάντων, κατὰ δὲ τὴν κίνησιν τὴν σφαιρικὴν. κινεῖται γὰρ καὶ αὐτὴ κατὰ τοὺς κύκλους, ἔστηκεν δὲ αἰεὶ ὡσαύτως κατὰ τὰς αἰτίας τῶν κύκλων, τὸ εὐθὺ καὶ περιφερές. καὶ διὰ τοῦτο κἀνταῦθα προὔφεστηκεν ἡ γεωμετρία τῆς σφαιρικῆς ὥσπερ ἡ στάσις τῆς κινήσεως. [10]

Ἐπαὶ δ' οὐκ εἰς τὴν ἀπειροδύναμον ἑαυτῆς ἀφορῶσα τῶν εἰδῶν ἀνέλιξιν τὰς ἐπιστήμας ἐγέννησεν ταύτας, ἀλλ' εἰς τὴν κατὰ γένη τοῦ πέρατος περιοχὴν, διὰ δὴ τοῦτό φασιν αὐτὰς ἀπὸ τε τοῦ πλήθους καὶ μεγέθους ἀφελούσας τὸ ἄπειρον περὶ τὸ πεπερασμένον ἥδη τὴν πραγματείαν ἔχειν. ἀρχὰς γὰρ ἐν αὐτῇ πάντων ἵδρυσεν ὁ νοῦς καὶ τοῦ πλήθους καὶ τοῦ μεγέθους. ἐπεὶ καὶ ὁμοιομερὲς ἔστιν ὅλη πρὸς ἑαυτὴν καὶ μία καὶ ἀδιαίρετος καὶ αὖ πάλιν διηρημένη καὶ τὸν τῶν εἰδῶν ἐκφαίνουσα κόσμον, περατός τε μετέχει καὶ ἀπειρίας οὐσιώδους ἀπὸ [20]

τῶν νοητῶν. ἀλλὰ νοεῖ μὲν αὐτὴν κατὰ τὸ πέρασ, γεννᾷ δὲ ζῶας καὶ λόγους παντοίους κατὰ τὴν ἀπειρίαν. αἱ τοίνυν νοήσεις αὐτῆς τὰς ἐπιστήμας ταύτας ὑπέστησαν κατὰ τὸ πέρασ τὸ ἐν αὐταῖς, ἀλλ' οὐ κατὰ τὴν ἀπειρίαν τῆς ζωῆς. νοῦ γὰρ εἰκόνα φέρουσιν, ἀλλ' οὐ ζωῆς.

[25]

Τῶν μὲν τοίνυν **Πυθαγορείων** ὁ λόγος οὗτος καὶ ἡ τῶν τεττάρων ἐπιστημῶν διαίρεσις, κατ' ἄλλον δ' αὖ τρόπον τὴν μαθηματικὴν τέμνειν τινὲς ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ **Γεμῖνος**, καὶ ποιοῦσι τὴν μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον, τὴν δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ [ἐνεργοῦσαν?] καὶ τούτων ἐφαπτομένην, νοητὰ δὴπου καλοῦντες, ὅσα καθ' ἑαυτὴν ἡ ψυχὴ θεάματα ἀνακινεῖ, χωρίζουσα τῶν ἐνύλων ἑαυτὴν εἰδῶν. καὶ τῆς μὲν περὶ τὰ νοητὰ πραγματευομένης δύο τὰ πρῶτιστα καὶ κυριώτατα μέρη τίθενται ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρίαν, τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ τὴν ἐνέργειαν ἐχούσης ἕξ, μῆχανικὴν, ἀστρολογίαν, ὀπτικήν, γεωδεσίαν, κανονικήν, λογιστικήν. τὸ δ' αὖ τακτικὸν οὐκ ἀξιοῦσιν ἐν τι τῶν μερῶν τῆς μαθηματικῆς λέγειν, ὥσπερ ἕτεροι ἀλλὰ προσχρησθῆναι τότε μὲν λογιστικῇ, καθάπερ ἐν ταῖς ἐξαριθμησέσι τῶν λόγων, τότε δὲ γεωδεσία, καθάπερ ἐν ταῖς διαίρεσέσι τῶν χωρίων καὶ ταῖς ἀναμετρήσεσιν, ὥσπερ δὴ πολλῶ πλεον οὔτε τὸ ἱστορικὸν οὔτε τὸ ἱατρικὸν μέρος εἶναι μαθηματικῆς, εἰ καὶ προσχρῶνται πολλάκις οἷ τε τὰς ἱστορίας γράφοντες τοῖς μαθηματικοῖς θεωρήμασιν, ἢ θέσεις κλιμάτων φράζοντες ἢ μεγέθη πόλεων καὶ διαμέτρους ἢ περιβάλους καὶ διαμέτρους ἢ περιμέτρους συλλογιζόμενοι, καὶ οἱ ἱατροὶ πολλὰ τῶν οἰκείων διὰ τῶν τοιούτων ἐφόδων σαφηνίζοντες. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ἀστρολογίας ὄφελος εἰς ἱατρικὴν καὶ **Ἱπποκράτης** δῆλον ποιεῖ καὶ πάντες ὅσοι τι περὶ ὥρων καὶ τόπων εἰρήκασιν. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν καὶ ὁ τακτικὸς χρήσεται μὲν τοῖς θεωρήμασι τῶν μαθηματικῶν, οὐ μέντοι μαθηματικὸς ἐστίν, εἰ καὶ ποτὲ μὲν ἐλαχιστον δεῖξαι τὸ πλῆθος βουλούμενος εἰς κύκλον σχηματίζοι τὸ στρατόπεδον, ποτὲ δὲ πλεῖστον εἰς τετράγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ ἄλλο τι πολύγωνον.

[FR38]

[5]

[10]

[15]

[20]

[25]

[FR39]

[5]

Τούτων δὴ τῶν εἰδῶν ὄντων τῆς ὅλης μαθηματικῆς ἡ μὲν γεωμετρία διαίρεται πάλιν εἰς τε τὴν ἐπίπεδον θεωρίαν καὶ τὴν στερεομετρίαν. περὶ γὰρ σημεῖα καὶ γραμμὰς ἰδιάζουσά τις οὐκ ἔστι πραγματεία, καθόσον οὐδὲ σχῆμα γένοιτο ἂν ἐν τούτοις ἄνευ ἐπιπέδων ἢ στερεῶν. πανταχοῦ γε μὴν ἔργον τῆς γεωμετρίας ἐν τε ἐπιπέδοις καὶ στερεοῖς ἢ συνιστάνειν ἢ συνκρίνειν ἢ διαίρειν τὰ συνεστῶτα. τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ὡσαύτως ἡ διαίρεσις εἰς τε τὴν τῶν γραμμικῶν ἀριθμῶν θεωρίαν καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων καὶ τὴν τῶν στερεῶν. καὶ γὰρ τὰ εἶδη τοῦ ἀριθμοῦ καθ' αὐτὰ σκοπεῖ προϊόντα ἀπὸ μονάδος, καὶ τὰς γενέσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν τε ὁμοίων καὶ τῶν ἀνομοίων, καὶ τὰς εἰς τρίτην αὖξιν προόδους. γεωδεσία δὲ καὶ λογιστικὴ ταύταις ἀνάλογον, οὐ περὶ νοητῶν ἀριθμῶν ἢ σχημάτων, ἀλλὰ περὶ αἰσθητῶν ποιούμεναι τοὺς λόγους. οὐ γὰρ κύλινδρον ἢ κῶνον ἔργον τῆς γεωδεσίας μετρεῖν, ἀλλὰ σωροὺς ὡς κῶνους καὶ φρέατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ δι' εὐθειῶν νοητῶν, ἀλλὰ δι' αἰσθητῶν, τότε μὲν ἀκριβεστέρων, ὡς διὰ τῶν ἀκτίνων τῶν ἡλιακῶν, τότε δὲ παχυτέρων, οἷον διὰ σπάρτων καὶ στάθμης. οἷδ' αὖ ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ θεωρεῖ τὰ

[10]

[15]

[20]

[25]

[FR40]

πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν, ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν αὐτοῖς ἀπὸ τῶν μετρούμενων τίθεται, μηλίτας καλῶν τινὰς καὶ φιαλίτας. καὶ ἐλάχιστον μὲν οὐδὲν εἶναι συγχωρεῖ καθάπερ ὁ ἀριθμητικός, ὡς μέντοι πρὸς τι γένος λαμβάνει τὸ ἐλάχιστον. ὁ γὰρ εἷς ἄνθρωπος μέτρον αὐτῷ γίνεται τοῦ πλήθους ὡς μονάς. πάλιν ὀπτική καὶ κανονικὴ γεωμετρίας εἰσὶ καὶ ἀριθμητικῆς ἔκγονοι, ἡ μὲν ταῖς ὀψεσι γραμμαῖς χρωμένῃ καὶ ταῖς ἔκ τούτων συνισταμέναις γωνίαις, διαιρουμένη δὲ εἷς τε τὴν ἰδίως καλουμένην ὀπτικήν, ἣτις τῶν ψευδῶς φαινομένων παρὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν ὁρατῶν τὴν αἰτίαν ἀποδίδωσιν, οἷον τῆς τῶν παραλλήλων συμπτώσεως ἢ τῆς τῶν τετραγώνων ὡς κύκλων θεωρίας, καὶ εἰς τὴν κατοπτρικήν σύμπασαν τὴν περὶ τὰς ἀνακλάσεις τὰς παντοίας πραγματευομένην καὶ τῇ εἰκαστικῇ γνώσει συμπλεκομένην, καὶ τὴν λεγομένην σκηνογραφικήν δεικνύσαν, πῶς ἂν τὰ φαινόμενα μὴ ἄρυθμα ἢ ἄμορφα φαντάζοιτο ἐν ταῖς εἰκόσι παρὰ τὰς ἀποστάσεις καὶ τὰ ὕψη τῶν γεγραμμένων. ἡ δ' αὖ κανονικὴ τοὺς φαινομένους λόγους τῶν ἁρμονιῶν σκοπεῖται, τὰς τῶν κανόνων κατατομὰς ἀνευρίσκουσα καὶ τῇ αἰσθήσει πανταχοῦ προσχρωμένη καὶ ὡς φησὶν ὁ Πλάτων ὅσα τοῦ νοῦ προστεταμένη.

Πρὸς δὴ ταύταις ἡ μηχανικὴ καλουμένη τῆς περὶ τὰ αἰσθητὰ καὶ τὰ ἔνυλα πραγματείας μέρος ὑπαρχούσα, ὑπὸ δὲ ταύτην ἢ τε ὀργανοποιική τῶν κατὰ πόλεμον ἐπιτηδείων ὀργάνων, οἷα δὴ καὶ Ἀρχιμήδης λέγεται κατασκευάσαι τῶν πολεμούντων τὴν Συράκουσαν ἀμυντικὰ ὄργανα, καὶ ἡ θαυματοποιική τα μὲν διὰ πνῶν φιλοτεχνούσα, ὥσπερ καὶ Κτησίβιος καὶ Ἡρων πραγματεύονται, τὰ δὲ διὰ ῥοπῶν, ὧν τῆς μὲν κινήσεως τὴν ἀνισορροπίαν αἰτιατέον, τῆς δὲ στάσεως τὴν ἰσορροπίαν, ὥσπερ καὶ ὁ Τίμαιος διώρισεν, τὰ δὲ διὰ νεύρων καὶ σπάρτων ἐμφύχους ὀλκὰς καὶ κινήσεις ἀπομιμουμένων. ὑπὸ δὲ τὴν μηχανικήν ἐστὶν καὶ ἡ τῶν ἰσορρόπων ὅλως καὶ τῶν λεγομένων κεντροβαρικών διάγνωσις, καὶ ἡ σφαιροποιία κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἷαν καὶ Ἀρχιμήδης ἐπραγματεύσατο, καὶ ὅλως πᾶσα ἡ τῆς ὕλης κινητική. λοιπὴ δὲ ἡ ἀστρολογία περὶ τῶν κοσμικῶν κινήσεων διαλαμβάνουσα καὶ περὶ μεγεθῶν καὶ σχημάτων τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ φωτισμῶν καὶ ἀποστάσεων τῶν ἀπὸ γῆς καὶ τῶν τοιούτων ἀπάντων, πολὺ μὲν ἀπολαύουσα τῆς αἰσθήσεως, πολὺ δὲ καὶ πρὸς τὴν φυσικήν ἐπικοινωνοῦσα θεωρίαν. ταύτης δὲ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ἡ γνωμονικὴ περὶ τὴν ὥρῶν καταμέτρησιν ἀσχολουμένη διὰ τῆς τῶν γνωμόνων θέσεως, καὶ ἡ μετεωροσκοπικὴ τῶν τε ἐξαρμάτων τὰς διαφορὰς καὶ τῶν ἄστρον τὰς ἀποστάσεις ἀνευρίσκουσα καὶ πολλὰ ἄλλα καὶ ποικίλα τῶν κατ' ἀστρολογίαν θεωρημάτων ἀναδιδάσκουσα, καὶ ἡ διοπτρική τὰς ἐ ἀποχὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν ἄλλων ἄστρον καταμανθάνουσα διὰ τῶν τοιούτων ὀργάνων. τοιαῦτα καὶ περὶ τῶν τῆς μαθηματικῆς μερῶν ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἀναγεγραμμένα παρειλήφμεν.

Εἶεν δὴ οὖν. πάλιν ἐκεῖνα θεωρήσωμεν, ὅπως ὁ Πλάτων θριγγὸν τῶν μαθημάτων ἐν πολιτείᾳ τὴν διαλεκτικὴν προσείρηκεν, καὶ ὅστις ὁ σύνδεσμος

αὐτῶν, ὃν (?) τὴν ἐπινομίδα συνθεῖς παραδίδωσι. καὶ λέγομεν, ὅτι καθάπερ ὁ νοῦς ὑπερίδρυται τῆς διανοίας καὶ χορηγεῖ τὰς ἀρχὰς ἄνωθεν αὐτῇ καὶ τελειοῖ τὴν διάνοιαν ἀφ' αὐτοῦ, κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ διαλεκτική, φιλοσοφίας οὕσα τὸ καθαρώτατον μέρος, προσεχῶς ὑπερήπλωται τῶν μαθημάτων καὶ περιέχει τὴν ὅλην αὐτῶν ἀνέλιξιν, καὶ δίδωσι δυνάμεις ἀφ' ἑαυτῆς ταῖς ἐπιστήμας αὐτῶν παντοίας, τελεσιουργοὺς καὶ κριτικὰς καὶ νοεράς, τὴν ἀναλυτικὴν λέγω καὶ τὴν διαιρετικὴν καὶ τὴν ὀριστικὴν καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν. ἀφ' ὧν δὴ χορηγουμένη καὶ τελειουμένη ἡ μαθηματικὴ τὰ μὲν δι' ἀναλύσεως εὕρισκει, τὰ δὲ διὰ συνθέσεως, καὶ τὰ μὲν διαιρετικῶς ὑφηγεῖται, τὰ δὲ ὀριστικῶς, τὰ δὲ δι' ἀποδείξεως καταδεικνύεται τῶν ζητούμενων, συναρμόζουσα μὲν τοῖς ὑποκειμένοις ἑαυτῇ τὰς μεθόδους ταύτας, χρωμένῃ δὲ ἐκάστη πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν μέσων λόγων, ὅθεν δὴ καὶ αἱ ἀναλύσεις ἐπ' αὐτῆς καὶ οἱ ὀρισμοὶ καὶ αἱ διαιρέσεις καὶ αἱ ἀποδείξεις οἰκτεῖται τέ εἰσι καὶ κατὰ τὸν τρόπον τῆς μαθηματικῆς γνώσεως ἀνελίσσονται. θριγγχὸς οὖν εἰκότως ἐστὶν ἡ διαλεκτικὴ τῶν μαθημάτων, πᾶν τὸ νοερὸν αὐτῶν τελειοῦσα καὶ τὸ ἀκριβὲς ἀνελεγκτότερον ἀπεργαζομένη καὶ τὸ ἀκίνητον μόνιμον ὡσαύτως διαφυλάττουσα καὶ τὸ αὔλον καὶ καθαρὸν εἰς τὴν ἀπλότητα τὴν τοῦ νοῦ καὶ τὴν αὐλίαν ἀναφέρουσα καὶ τὰς τε ἀρχὰς αὐτῶν τὰς πρώτας ἀφορίζουσα διὰ τῶν λόγων καὶ τὰς τῶν γενῶν καὶ εἰδῶν τῶν ὑπ' αὐτὰ διακρίσεις ἐκφαίνουσα, τὰς τε συνθέσεις τὰς ἐκ τῶν ἀρχῶν τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς προαγούσας καὶ τὰς ἀναλύσεις τὰς τ' ἐπὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰς ἀρχὰς ἐπανιούσας ἀναδιδάσκουσα.

Καὶ μὴν καὶ τὸν σύνδεσμον τῶν μαθημάτων οὐ τὴν ἀναλογίαν, ὥσπερ Ἑρατοσθένους οἶεται, θετέον. ἡ γὰρ ἀναλογία τῶν κοινῶν τοῖς μαθήμασιν ἐν τι καὶ λέγεται εἶναι καὶ ἔστιν. πολλὰ δ' αὖ καὶ ἄλλα διήκει διὰ πάντων ὡς εἰπεῖν τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα τῇ κοινῇ φύσει τῶν μαθημάτων. ἀλλ' ὡς ἡμεῖς ἂν φάμεν, προσεχῆς μὲν ἐστὶν αὐτῶν σύνδεσμος ἡ μία καὶ ὅλη μαθηματικὴ τὰς πασῶν τῶν καθ' ἕκαστα ἐπιστημῶν ἀρχὰς ἀπλούστερον ἐν ἑαυτῇ περιέχουσα καὶ τὴν τε κοινωνίαν αὐτῶν καὶ τὴν διαφορὰν ἐπεσκεμμένη καὶ ὅσα τὰ αὐτὰ ἐν πάσαις ἀναδιδάσκουσα, καὶ ὅσα πλείοσιν ὑπάρχει καὶ ὅσα ἐλάττωσιν. καὶ ἐπὶ ταύτην ἀπὸ τῶν πολλῶν ἡ ἄνοδος τοῖς κατὰ τρόπον μανθάνουσιν. ἀνωτέρω δ' ἔτι ταύτης ἡ διαλεκτικὴ τῶν μαθημάτων ἂν εἴη σύνδεσμος, ἥ καὶ θριγγχὸν αὐτῶν, ὡς ἔφην, ἐν πολιτείᾳ προσείρηκεν. αὕτη γὰρ καὶ τὴν ὅλην μαθηματικὴν τελειοῖ καὶ εἰς νοῦν ἀναπέμπει ταῖς ἑαυτῆς δυνάμεσι, καὶ ἐπιστήμην ὄντως ἀποφαίνει καὶ μόνιμον καὶ ἀνέλεγκτον ἀπεργάζεται. τρίτην δ' ἂν ἔχοι τάξιν ἐν τοῖς συνδέσμοις ὁ νοῦς αὐτὸς ὁ πάσας τὰς διαλεκτικὰς δυνάμεις ἐν ἑαυτῷ μονοειδῶς περιέχων καὶ τὴν ποικιλίαν αὐτῶν διὰ τῆς ἀπλότητος καὶ τὸν μερισμὸν διὰ τῆς ἀμεροῦς γνώσεως καὶ τὸ πλῆθος διὰ τῆς ἐνώσεως συνάγων. αὐτὸς δὴ οὖν συμπτύσσει μὲν τὰς ἀνελίξεις τῶν διαλεκτικῶν μεθόδων, συνδεῖ δὲ ἄνωθεν πᾶσαν τὴν διέξοδον τῶν μαθηματικῶν λόγων, τέλος δ' ἐστὶ τὸ ἄριστον τῆς ἀναγωγῆς πορείας καὶ τῆς γνωστικῆς ἐνεργείας. ταῦτά μοι καὶ περὶ τούτων διωρίσθω.

Τὸ δ' αὖ ὄνομα αὐτὸ τοῦτο τὸ τῆς μαθηματικῆς καὶ τὸ τῶν μαθημάτων πόθεν ἂν φάμεν ὑπὸ τῶν παλαιῶν ταῖς ἐπιστήμας ταύταις ἀποδεδόσθαι καὶ τίνα

ἂν ἔχοι προσήκοντα λόγον; δοκεῖ δὴ μοι μὴ τῶν ἐπιτυχόντων εἶναι, καθάπερ
 δὴ τὰ πολλὰ τῶν ὀνομάτων, ἢ τοιαύτη τῆς ἐπιστήμης τῶν διανοητικῶν λόγων
 προσηγορία, ἀλλ' ὥσπερ δὴ καὶ λέγεται τῶν **Πυθαγορείων** κατειδότην μὲν [5]
 ὅτι πᾶσα ἡ καλουμένη μάθησις ἀνάμνησις ἐστίν οὐκ ἔξωθεν ἐντιθεμένη ταῖς
 ψυχαῖς, ὥσπερ τὰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν φαντάσματα τυποῦται ἐν τῇ φαντασίᾳ,
 οὐδ' ἐπεισοδιώδης οὖσα, καθάπερ ἡ δοξαστική γνῶσις, ἀλλ' ἀνεγειρομένη μὲν [10]
 ἀπὸ τῶν φαινομένων, προβαλλομένη δὲ ἔνδοθεν ἀπ' αὐτῆς τῆς διανοίας εἰς
 ἑαυτὴν ἐπιστρεφομένης, κατειδότην δ' αὖ καὶ ὅτι τὰς ἀναμνήσεις εἰ καὶ πολ-
 λαχόθεν δεικνύναι δυνατόν ἀλλὰ διαφερόντως ὅτι καὶ **Πλάτων** φησὶν, ἐκ τῶν [15]
 μαθημάτων. ἐὰν γὰρ τις ἐπὶ τὰ διαγράμματα ἄγῃ, φησὶν ἐκεῖνος, ἐνταῦθα ἄρα
 σαφέστατα κατηγορεῖ, ὡς ἔστιν ἡ μάθησις ἀνάμνησις. ὅθεν δὴ καὶ ὁ ἐν τῷ
 Μένωνι Σωκράτης ἐκ τοῦδε τοῦ τρόπου τῆς ἐπιχειρήσεως ἐπέδειξεν, ὅτι τὸ
 μανθάνειν οὐκ ἄλλο τί ἐστίν ἢ ἀναμιμνήσκεσθαι τὴν ψυχὴν τῶν ἑαυτῆς λόγων. [20]
 αἴτιον δὲ ὅτι τὸ μὲν ἀναμιμνησκόμενόν ἐστι τὸ διανοητικὸν τῆς ψυχῆς. τοῦτο
 δὲ ἐν τοῖς λόγοις οὐσίωται τῶν μαθημάτων καὶ τὰς ἐπιστήμας αὐτῶν ἐν ἑαυτῷ
 προείληφεν, καὶ μὴ ἐνεργῇ κατ' αὐτάς. ἔχει δ' οὖν πάσας οὐσιωδῶς καὶ κρυφίως, [FR46]
 προφαίνει δὲ ἐκάστην, ὅταν ἀφαιρεθῇ τῶν ἐμποδίων τῶν ἐκ τῆς αἰσθήσεως.
 αἱ μὲν γὰρ αἰσθήσεις συνάπτουσιν αὐτὴν τοῖς μεριστοῖς, αἱ δὲ φαντασῖαι μορ-
 φωτικῶν κινήσεων ἀναμιμνήσκουσιν, αἱ δὲ ὁρέξεις περισπῶσιν εἰς τὸν ἐμπαθεῖ βίον. [5]
 πᾶν δὲ τὸ μεριστὸν ἐμπόδιόν ἐστι τῆς εἰς ἑαυτοὺς ἡμῖν ἐπιστροφῆς, καὶ πᾶν τὸ
 μορφωτικὸν ἐπιθολοῖ τὴν ἀμόρφωτον γνῶσιν, καὶ πᾶν τὸ ἐμπαθεὲς κώλυμα τῆς [10]
 ἀπαθοῦς ἐνεργείας ἐστίν. ὅταν οὖν ταῦτα τῆς διανοίας ἀφέλωμεν, τότε κατ'
 αὐτὴν γινώσκειν τοὺς ἐν αὐτῇ δυνάμεθα λόγους, καὶ ἐπιστήμονες εἶναι κατ'
 ἐνέργειαν καὶ γνῶσιν τὴν οὐσιώδη προβάλλειν. δεσμῶται δὲ ὄντες καὶ τὸ ὅμμα [15]
 τῆς ψυχῆς μύοντες οὐ μὴ ποτε τὴν προσήκουσαν ἡμῖν τελειότητα σχοίημεν.
 αὕτη τοίνυν ἐστίν ἡ μάθησις ἡ τῶν αἰδίων ἐν ψυχῇ λόγων ἀνάμνησις, καὶ μαθη-
 ματικὴ διὰ ταύτην ἡ πρὸς τὰς ἀναμνήσεις ἡμῖν τὰς ἐκείνων συντελοῦσα γνῶσις
 διαφερόντως ἐπωνομάζεται. καὶ τὸ ἔργον ἄρα τῆς ἐπιστήμης ταύτης ὁποῖον δὴ [20]
 τί ἐστίν ἐκ τοῦ ὀνόματος δηλοῦται κινήτικόν τῆς ἐμφύτου γνώσεως καὶ ἐγερ-
 τικὸν τῆς νοήσεως καὶ καθαρτικὸν τῆς διανοίας καὶ ἐκφαντορικὸν τῶν κατ'
 οὐσίαν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἰδῶν, λήθης τε καὶ ἀγνοίας ἀφαιρετικόν, ὣν ἀπὸ τῆς
 γενέσεως ἔσχομεν, καὶ ἀπολυτικὸν τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας δεσμῶν, κατὰ τὸν θεὸν [25]
 ὄντως τὸν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἔφορον, ὃς προάγει μὲν εἰς τὸ ἐμφανὲς τὰ
 νοερά δῶρα, πληροῖ δὲ πάντα τῶν θείων λόγων, κινεῖ δὲ τὰς ψυχὰς ἐπὶ νοῦν, [FR47]
 καὶ ὥσπερ ἐκ κάρου βαθέος ἀνεγείρει, διὰ ζητήσεως δὲ ἐπιστέφει πρὸς ἑαυτάς,
 καὶ διὰ μαιείας τελειοῖ, καὶ δι' εὐρέσεως τοῦ καθαροῦ νοῦ περιάγει πρὸς τὴν [5]
 μακαρίαν ζωὴν. ὥ δὴ καὶ ἡμεῖς ἀναθέντες τουτὶ τὸ σύγγραμμα τὴν περὶ τῆς
 μαθηματικῆς ἐπιστήμης θεωρίαν περιγράφομεν.

[FR48]

PROLOGI PARS POSTERIOR.

Τὰ μὲν δὴ κοινὰ καὶ ἐπὶ πᾶσαν διατείνοντα τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἐν τοῖς προειρημένοις λόγοις τεθεάμεθα τῷ τε Πλάτῳ συμπορευόμενοι καὶ παρὰ τῶν ἄλλων ἀναλεγόμενοι τὰ πρὸς τὴν παροῦσαν πραγματείαν ἡμῖν συντείνοντα νοήματα. τούτοις δὲ ἔπεται περὶ τῆς αὐτῆς τῆς γεωμετρίας εἰπεῖν καὶ τῆς προκειμένης στοιχειώσεως, ἥς ἕνεκα τὸν σύμπαντα λόγον ἐνεστησάμεθα.

Ὅτι μὲν οὖν ἡ γεωμετρία τῆς ὅλης ἐστὶ μαθηματικῆς μέρος καὶ ὅτι δευτέραν ἔχει τάξιν μετὰ τὴν ἀριθμητικὴν ὡς ἐκ ταύτης τελειουμένη καὶ ἀφορίζομένη — πᾶν γὰρ, ὅσον ἐστὶ ῥητὸν ἐν αὐτῇ καὶ γνωστὸν, ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ἀφορίζεται λόγων — εἴρηται τοῖς παλαιοῖς καὶ οὐ πολλοῦ δεῖται λόγου πρὸς τὸ παρόν. γένοιτο δ' ἂν ἡμῖν ἡ περὶ αὐτῆς ὑφήγησις κατὰ νοῦν, εἰ τὴν ὑποκειμένην αὐτῇ ἐπισκοπήσασιν ὕλην, τίνα τάξιν ἔλαχεν ἐν τοῖς οὖσι, καὶ τὴν οὐσίαν. ἀπὸ γὰρ ταύτης καλῶς θεωρηθείσης καὶ ἡ τῆς γινωσκούσης αὐτὴν ἐπιστήμης καταφανήτεται δύναμις καὶ ἡ ὠφέλεια ἢ ἀπ' αὐτῆς καὶ τὸ ἀγαθόν, ὅπερ εἰς τοὺς μανθάνοντας παραγίνεται. καὶ γὰρ δὴ καὶ ἀπορήσειεν ἄν τις, ἐν τίνι γένει τῶν ὄντων τὴν γεωμετρικὴν ὕλην τιθέμενος οὐκ ἂν ἀμάρτοι τῆς περὶ αὐτὴν ἀληθείας. εἴτε γὰρ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἐστὶ τὰ σχήματα, περὶ ὧν ὁ γεωμέτρης διαλέγεται, καὶ ἀχώριστα τῆς ὕλης, πῶς ἐτι τὴν γεωμετρίαν τῶν αἰσθητῶν ἡμᾶς ἀπολύειν φήσομεν καὶ περιάγειν εἰς τὴν ἀσώματον ὑπόστασιν καὶ συνετισμὸν εἶναι πρὸς τὴν θεάν τῶν νοητῶν καὶ προευνετρεπίζειν εἰς τὴν κατὰ νοῦν ἐνέργειαν; ποῦ δὲ καὶ τεθεάμεθα ἐν τοῖς αἰσθητοῖς τὸ ἀμερὲς σημεῖον ἢ τὴν ἀπλατῇ γραμμὴν ἢ τὴν ἀβαθῇ ἐπιφάνειαν ἢ τὴν ἰσότητά τῶν ἐκ τοῦ κέντρου γραμμῶν ἢ ὅλως τὰ πολύγωνα καὶ πολυέδρα σχήματα πάντα, περὶ ὧν ἡ γεωμετρία διδάσκει; πῶς δὲ καὶ οἱ λόγοι τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀνέλεγκτοι μένουσι τῶν αἰσθητῶν σχημάτων καὶ εἰδῶν τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον ἐπιδεχομένων καὶ κινουμένων πάντη καὶ μεταβαλλομένων ἀνάσης τε ἀοριστίας ὑλικῆς ἀναπεπλησμένων καὶ τῆς μὲν ἰσότητος μετὰ τῆς ἐναντίας ἀνισότητος ὑφεστηκυίας, τῶν δὲ ἀμερίστων κατὰ μερισμὸν καὶ διάστασιν προεληλυθότων; εἴτε ἔξω τῆς ὕλης ἐστὶ τὰ ὑποκείμενα τῇ γεωμετρίᾳ καὶ λόγοι καθαροὶ καὶ χωριστοὶ τῶν αἰσθητῶν, ἀμέριστοι πάντες ἔσσονται καὶ ἀσώματοι καὶ ἀμεγέθεις. ἔκτασις γὰρ καὶ ὄγκος καὶ ὅλως διάστασις τοῖς λόγοις διὰ τὴν ὑλικὴν ὑποδοχὴν παραγίνεται, τὰ μὲν ἀμέριστα μεριστῶς, τὰ δὲ ἀδιάστατα διαστατῶς, τὰ δὲ ἀκίνητα κινουμένως δεχομένην. πῶς οὖν ἔτι τὴν εὐθεῖαν τέμνομεν καὶ τὸ τρίγωνον καὶ τὸν κύκλον; πῶς δὲ γωνιῶν δι-
αφοράς λέγομεν καὶ αὐξήσεις αὐτῶν καὶ μειώσεις σχημάτων, οἷον τριγωνικῶν ἢ τετραγωνικῶν; πῶς δὲ τὰς ἀφὰς τῶν κύκλων ἢ τῶν εὐθειῶν; πάντα γὰρ ταῦτα μεριστὴν εἶναι τὴν γεωμετρικὴν ὕλην ἐπιδεικνύουσι καὶ οὐκ ἐν ἀπερέσει λόγοις ὑφεστηκυῖαν.

Τὰ μὲν οὖν ἄπορα τοιαῦτα πρὸς τὸ καὶ τὸν Πλάτωνα διανοητὰ μὲν προσαγορεύειν τὰ τῆς γεωμετρίας εἶδη, χωρίζειν δὲ ἡμᾶς ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν τὰ τοιαῦτα καὶ εἰς νοῦν ἐγείρειν ἀπὸ αἰσθήσεως συγχωρεῖν, καίτοι γε, ὅπερ ἔφην, τῶν ἐν διανοίᾳ λόγων ἀμερῶν ὄντων καὶ ἀδιαστάτων κατὰ τὴν ιδιότητα τὴν ψυχικὴν ὑφεστηκότων. εἰ δὲ δεῖ καὶ τοῖς πράγμασιν αὐτοῖς καὶ τῇ τοῦ Πλάτωνος ὑφήγησει

[FR49]

[FR50]

συμφώνους ἀποδιδόναι λόγους, οὕτως δὲ διελόντες εἵπωμεν, πᾶν τὸ καθόλου καὶ
 τὸ ἐν τὸ τῶν πολλῶν περιληπτικὸν ἢ ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα φαντάζεσθαι (πέφυκεν
 ἢ φαίνεται ?) καὶ τὴν ὑπαρξιν ἐν τούτοις ἔχειν ἀχώριστον ἀπ' αὐτῶν ὑπάρχον
 καὶ κατατεταγμένον ἐν αὐτοῖς καὶ μετὰ τούτων ἢ συγκινούμενον ἢ μονίμως
 ἐστὼς καὶ ἀκινήτως, ἢ πρὸ τῶν πολλῶν ὑφεστάναι καὶ γεννητικὸν εἶναι τοῦ
 πλήθους ἐμφάσεις ἀφ' ἑαυτοῦ τοῖς πολλοῖς παρέχον καὶ ἀμερίστως μὲν αὐτὸ
 προτεταγμένον τῶν μετεχόντων, ποικίλας δὲ μεθέξεις εἰς τὰ δεύτερα χορηγοῦν,
 ἢ κατ' ἐπίνοιαν ἀπὸ τῶν πολλῶν μορφοῦσθαι καὶ τὴν ὑπαρξιν ἐπιγεννηματικὴν
 ἔχειν καὶ ὑστερογενῶς ἐπισυνίστασθαι τοῖς πολλοῖς. κατὰ γὰρ ταύτας οἶμαι τὰς
 τριπλᾶς ὑποστάσεις εὐρήσομεν τὰ μὲν πρὸ τῶν πολλῶν, τὰ δὲ ἐν τοῖς πολλοῖς,
 τὰ δὲ κατὰ τὴν πρὸς αὐτὰ σχέσιν καὶ κατηγορίαν ὑφιστάμενα. τριτῶν δὲ ὄντων
 ὡς συνελόντι φάναι τῶν καθολικῶν εἰδῶν τοῦ μετεχομένου καὶ ἐν τοῖς πολλοῖς
 ὄντος καὶ τὰ μερικὰ συμπληροῦτος νοήσωμεν διαφορὰς κατὰ τὴν ὑποκειμένην
 ὕλην. καὶ τὰ μετέχοντα αὐτὰ διττὰ θέμενοι, τὰ μὲν αἰσθητὰ τὰ δὲ ἐν φαν-
 τασίᾳ τὴν ὑπόστασιν ἔχοντα — καὶ γὰρ ἡ ὕλη διττή, καὶ ἡ μὲν τῶν αἰσθήσει
 συζυγούντων ἡ δὲ τῶν φανταστῶν, ὥς που καὶ Ἀριστοτέλης φησι διττὸν εἶ-
 ναι τὸ καθόλου — τὸ κατατεταγμένον συγχωρήσομεν, τὸ μὲν αἰσθητὸν ὡς
 μετεχόμενον ὑπὸ τῶν αἰσθητῶν, τὸ δὲ φανταστὸν ὡς ἐν τοῖς τῆς φαντασίας
 πλήθεσιν ὑφεστηχός. καὶ γὰρ ἡ φαντασία διὰ τε τὴν μορφωτικὴν κίνησιν καὶ τὸ
 μετὰ σώματος καὶ ἐν σώματι τὴν ὑπόστασιν ἔχειν μεριστῶν αἰεὶ καὶ διηρημένων
 ἐστὶν καὶ ἐσχηματισμένων τύπων οἰστική, καὶ πᾶν ὃ γινώσκει τοιαύτην ἔλαχεν
 ὑπαρξιν. ὅθεν δὴ καὶ νοῦν παθητικόν τις αὐτὴν προσεῖπεν οὐκ ὥκνησεν. καίτοι
 γε εἰ νοῦς, πῶς οὐκ ἀπαθὴς καὶ ἄϋλος; εἰ δὲ μετὰ μάθους ἐνεργεῖ, πῶς ἔτι νοῦς
 ἂν κληθεῖ δικαίως; ἀπάθεια μὲν γὰρ τῷ νῷ προσήκει καὶ ἡ νοερὰ φύσει, τὸ
 δὲ παθητικὸν πόρρω τῆς οὐσίας ἐκείνης. ἀλλ' οἶμαι τὸ μέσον αὐτῆς ἐμφῆναι
 βουλόμενος τῶν τε πρωτίστων γνώσεων καὶ τῶν ἐσχάτων ἅμα καὶ νοῦν αὐτὴν
 προσεῖπεν ὡς οἰκουῖαν ταῖς πρωτίσταις καὶ παθητικὸν κατὰ τὴν πρὸς τὰ ἔσχατα
 συγγένειαν. αἱ μὲν γὰρ ἀσχημάτιστοι καὶ ἀμόρφωτοι γνώσεις εἰσιν ἐν ἑαυταῖς
 ἔχουσιν τὰ νοητὰ καὶ περὶ ἑαυτὰς ἐνεργοῦσαι καὶ συνηνωμέναι τοῖς γνωστοῖς,
 παντὸς τύπου καὶ πάθους ἀλλοχόθεν ἐφήκοντος καθαρεύουσαι. αἱ δὲ ἔσχαται
 διὰ τῶν ὀργάνων ἐνεργοῦσι καὶ παθήματα μᾶλλον εἰσιν, ἔξωθεν εἰσδεχόμεναι
 τὰς γνώσεις καὶ συγκινούμεναι τοῖς ὑποκειμένοις. τοιαῦτα γὰρ αἱ αἰσθήσεις,
 ἐκ βιαιῶν παθημάτων γινόμεναι, φησὶν ὁ Πλάτων. ἡ δ' αὖ φαντασία τὸ μέσον
 κέντρον κατέχουσα τῶν γνώσεων ἀνεγείρεται μὲν ἀφ' ἑαυτῆς καὶ προβάλλει τὸ
 γνωστόν, ἅτε δὲ οὐκ ἔξω σώματος οὖσα ἐκ τοῦ ἀμεροῦς τῆς ζωῆς εἰς μερισμὸν
 καὶ διάστασιν καὶ σχῆμα προάγει τὰ γνωστὰ αὐτῆς, καὶ διὰ τοῦτο πᾶν, ὅπερ
 ἂν νοῆι, τύπος ἐστὶ καὶ μορφή νοήματος, καὶ τὸν τε κύκλον διαστατῶς νοεῖ
 τῆς μὲν ἐκτὸς ὕλης καθαρεύοντα νοητὴν δὲ ὕλην ἔχοντα τὴν ἐν αὐτῇ, καὶ διὰ
 τοῦτο οὐχ εἷς ἐν αὐτῇ κύκλος, ὥσπερ οὐδὲ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς. ἅμα γὰρ διάστασις
 ἀναφαίνεται καὶ τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλασσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν τε κύκλων καὶ τῶν
 τριγώνων. εἰ οὖν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς κύκλοις ἐστὶ τὸ καθόλου κατατεταγμένον,

[FR51]

[FR52]

[FR53]

ὁ καὶ ἕκαστον αὐτῶν κύκλον ἀπετέλεσεν καὶ πάντας ὁμοίους ἀλλήλοις, καθ' ἓνα λόγον ὑποστάντας, διαφέροντας δὲ ἢ μεγέθεσιν ἢ τοῖς ὑποκειμένοις, καὶ τοῖς φανταστοῖς κύκλοις ἐστὶ τι κοινὸν καὶ μετεχόμενον καὶ κατὰ τοῦτο πάντες τὴν αὐτὴν ἔχουσι μορφήν. ἡ δὲ διαφορὰ αὐτοῖς καθ' ἓν ἐνταῦθα μόνον τὸ ἐν τῇ φαντασίᾳ μέγεθος. ὅταν γὰρ πολλοὺς ὁμοκέντρους φαντασθῆς, ἐν ἐνὶ μὲν πάντες ὑποκειμένῳ καὶ αὐλῳ καὶ ἐν ζῳῇ τὴν ὑπαρξιν ἔχουσιν ἀχωρίστῳ σώματος ἀπλοῦ καὶ τῷ διαστήματι πλεονάσαντος τῆς ἀμεροῦς οὐσίας, διαφέρουσι δὲ τῷ τε μεγέθει καὶ τῇ μικρότητι καὶ τῷ περιέχεσθαι καὶ περιέχειν. διττὸν οὖν σοι νοεῖσθαι τὸ καθόλου τὸ ἐν τοῖς πολλοῖς, τὸ μὲν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, τὸ δὲ ἐν τοῖς φανταστοῖς. καὶ ὁ κυκλικὸς λόγος διττὸς καὶ ὁ τριγωνικὸς καὶ αὐτὸς ὁ τοῖ σχήματος, ὁ μὲν ἐπὶ τῆς νοητῆς ὕλης, ὁ δὲ ἐπὶ τῆς αἰσθητῆς. πρὸ δὲ τούτων ἦν ὅ τε ἐν διανοίᾳ λόγος καὶ ὁ ἐν τῇ φύσει, ὁ μὲν τῶν φανταστικῶν κύκλων ὑποστάτης καὶ τοῦ ἐν αὐτοῖς ἐνὸς εἶδους, ὁ δὲ τῶν αἰσθητικῶν. ἔστωσαν γὰρ οἱ ἐν οὐρανῷ κύκλοι καὶ ὅλως οἱ τῆς φύσεως ἔχγονοι. καὶ ὥσπερ ἀμερῆς ὁ ἐν διανοίᾳ λόγος, οὕτως καὶ ὁ φυσικὸς. ἔστι γὰρ καὶ τὰ διαστατὰ ἀδιαστάτως καὶ τὰ μεριστὰ ἀμερίστως καὶ τὰ μεγέθη ἀμεγέθως ἐν ταῖς ἀσωμάτοις αἰτίαις, ὥσπερ αὖ ἀνάπαλιν τὰ ἀμέριστα μεριστῶς καὶ τὰ ἀμεγέθη μεγεθυσμένως ἐν ταῖς σωματικαῖς. καὶ διὰ τοῦτο ὁ μὲν ἐν διανοίᾳ κύκλος εἷς καὶ ἀπλοῦς ἐστὶ καὶ ἀδιάστατος καὶ αὐτὸ τὸ μέγεθος ἀμεγέθως ἔχει — λόγοι γὰρ ἄνευ ὕλης τὰ τοιαῦτα καὶ τὸ σχῆμα ἀσχηνίστον — ὁ δ' ἐν φαντασίᾳ μεριστὸς ἐσχηματισμένος διάστατος, οὐχ εἷς μόνον ἀλλ' εἷς καὶ πολλός, καὶ οὐκ εἶδος μόνον, ἀλλὰ κατατεταγμένον εἶδος, ὁ δ' ἐν τοῖς αἰσθητοῖς καὶ τῆς ἀκριβείας ὕφεσιν ἔχων καὶ ἀνάπλεως τῆς εὐθείας καὶ τῆς καθαρότητος τῶν αὐλῶν ἀπολειπόμενος.

[FR54]

Τὴν τοίνυν γεωμετρίαν ὅταν περὶ κύκλου τι λέγῃ καὶ διαμέτρου καὶ τῶν περὶ τὸν κύκλον παθημάτων, οἷον ἀφῶν διαιρέσεων τῶν τοιούτων, μήτε περὶ τῶν αἰσθητικῶν λέγωμεν ἀναδιδάσκειν — χωρίζειν γὰρ ἀπὸ τούτων ἐπιχειρεῖ — μήτε τοῦ ἐν διανοίᾳ εἶδους. εἷς γὰρ ὁ κύκλος, ἡ δὲ περὶ πολλῶν ποιεῖται τοὺς λόγους καθ' ἓνα ἕκαστον προβάλλουσα καὶ περὶ ἀνάντων τὰ αὐτὰ θεωροῦσα. καὶ ἀδιαίρετος μὲν ἐκεῖνος, διαιρετὸς δὲ ὁ ἐν γεωμετρίᾳ κύκλος. ἀλλὰ τὸ καθόλου μὲν αὐτῷ συγχωρῶμεν ἐπισκοπεῖν, τοῦτο δ' ἄρα ἐκεῖνο τὸ κατατεταγμένον ἐν τοῖς φανταστοῖς κύκλοις, καὶ ἄλλον μὲν ὁρᾶν καὶ κατ' ἄλλον θεωρεῖν τὸν ἐν διανοίᾳ κύκλον, περὶ ἄλλον δὲ ποιεῖσθαι τὰς ἀποδείξεις. ἔχουσα γὰρ ἡ διάνοια τοὺς λόγους, ἀσθενοῦσα δὲ συνεπτυγμένως ἰδεῖν ἀναπλοῖ τε αὐτοὺς καὶ ὑπεκτίθεται καὶ εἰς τὴν φαντασίαν ἐν προθύροις κειμένην προάγει καὶ ἐν ἐκείνῃ ἢ καὶ μετ' ἐκαίνης ἀνελίσσεται τὴν γνῶσιν αὐτῶν, ἀγαπήσασα μὲν τὸν ἀπὸ τῶν αἰσθητικῶν χωρισμόν, τὴν δὲ φανταστὴν ὕλην εὐτρεπῆ πρὸς ὑποδοχὴν εὐροῦσα τῶν ἑαυτῆς εἰδῶν. ὅθεν καὶ ἡ νόησις αὐτῆς μετὰ φαντασίας αἶ τε συνθέσεις τῶν σχημάτων καὶ αἱ διαιρέσεις φαντασταὶ καὶ ἡ γνῶσις ὁδὸς μὲν εἰς τὴν διανοητικὴν ἐστὶν οὐσίαν, οὕτω δὲ εἰς ἐκείνην ἀναδεδράμηκε, τῆς διανοίας εἰς τὰ ἔξω βλεπούσης καὶ ταῦτα κατὰ τὰ ἐνδοθεν θεωρούσης καὶ προβολαῖς μὲν χρωμένης λόγων ἀλλ' ἀφ' ἑαυτῆς εἰς τὸ ἔξω κινουμένης. εἰ δὲ ποτε

[FR55]

συμπύξασα τὰς διαστάσεις καὶ τοὺς τύπους καὶ τὸ πλῆθος ἀτυπώτως καὶ ἐνοειδῶς θεασαμένη πρὸς ἑαυτὴν ἐπιστρέψαι δυνηθεῖν, τότε ἂν διαφερόντως τοὺς λόγους τοὺς γεωμετρικοὺς ἴδοι τοὺς ἀμερίστους, τοὺς ἀδιαστάτους, τοὺς οὐσιώδεις, ὧν ἔστι πλήρωμα. καὶ ἡ ἐνέργεια αὐτῆς αὕτη τέλος ἂν εἴη τὸ ἄριστον τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς καὶ ὄντως τῆς Ἑρμαϊκῆς δόσεως ἔργον, ἀπὸ τινος Καλυψοῦς ἀναγούσης αὐτὴν εἰς τελειότεραν καὶ νοερωτέραν γνῶσιν καὶ ἀπολυούσης τῶν ἐν φαντασίᾳ μορφωτικῶν ἐπιβολῶν. καὶ ταύτην δεῖ τὴν μελέτην μελετᾶν τὸν ὡς ἀληθῶς γεωμετρικόν, καὶ πρὸς τὴν ἐγερσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς φαντασίας μετástασιν εἰς μόνην τὴν διάνοιαν αὐτὴν καθ' αὐτὴν ποιεῖσθαι τέλος, ἀρπάζοντα ἑαυτὸν ἀπὸ τῶν διαστάσεων καὶ τοῦ παθητικοῦ νοῦ πρὸς τὴν διανοητικὴν ἐνέργειαν, καθ' ἣν πάντα ἀδιαστάτως ὄψεται καὶ ἐν ἀμερεῖ τὸν κύκλον, τὴν διάμετρον, τὰ ἐν τῷ κύκλῳ πολύγωνα, καὶ πάντα ἐν πᾶσιν καὶ ἕκαστον χωρὶς. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ ἐν φαντασίᾳ δείκνυμεν ἐν τε τοῖς πολυγώνοις τοὺς κύκλους ἐγγραφομένους καὶ ἐν τοῖς κύκλοις τὰ πολύγωνα, μιμούμενοι τὴν τῶν ἀμερῶν λόγων δι' ἀλλήλων δεῖξιν. διὰ ταῦτα γὰρ ἄρα καὶ συστάσεις σχημάτων καὶ γενέσεις καὶ διαιρέσεις ἀναγράφομεν καὶ θέσεις καὶ παραβολάς. διότι τῇ φαντασίᾳ προσχρῶμεθα καὶ ταῖς ἐκ ταύτης διαστάσεσιν, ἐπεὶ τό γε εἶδος αὐτὸ ἀκίνητόν ἐστι καὶ ἀγέννητον καὶ ἀδιαίρετον καὶ παντὸς ὑποκειμένου καθαυῶν. ἀλλὰ καὶ ὅσα κρυφίως ἐστὶν ἐν ἐκείνῳ, διαστατῶς καὶ μεριστῶς εἰς φαντασίαν προάγεται καὶ τὸ μὲν προβάλλον ἢ διάνοια, τὸ δὲ ἀφ' οὗ προβάλλεται τὸ διανοητὸν εἶδος, τὸ δὲ ἐν ᾧ τὸ προβαλλόμενον παθητικὸς οὗτος καλούμενος νοῦς, ἐξελίττων ἑαυτὸν περὶ τὴν ἀμέρειαν τοῦ ἀληθοῦς νοῦ καὶ διίστας ἑαυτοῦ τὸ ἀδιάστατον τῆς ἀχραιφνοῦς νοέσεως καὶ μορφῶν ἑαυτὸν κατὰ πάντα τὰ ἀμόρφωτα εἶδη καὶ πάντα γιγνόμενος, ἃ ἐστὶν ἡ διάνοια καὶ ὁ ἀμερῆς ἐν ἡμῖν λόγος.

[FR56]

Περὶ μὲν οὖν τῶς γεωμετρικῆς ὕλης τοσαῦτα ἔχομεν λέγειν οὐκ ἀγνοοῦντες ὅσα καὶ ὁ φιλόσοφος **Πορφύριος** ἐν τοῖς συμμίκτοις γέγραφε καὶ οἱ πλεῖστοι τῶν **Πλατωνικῶν** διατάττονται, συμφωνότερα δὲ εἶναι ταῦτα ταῖς γεωμετρικαῖς ἐφόδοις νομίζοντες καὶ τῷ **Πλάτῳ** διανοητὰ καλοῦντι τὰ ὑποκείμενα τῇ γεωμετρίᾳ. συνάδει γὰρ οὖν ταῦτα ἀλλήλοις, διότι τῶν γεωμετρικῶν εἰδῶν αἱ μὲν αἰτίαι, καθ' ἃς καὶ ἡ διάνοια προβάλλει τὰς ἀποδείξεις, ἐν αὐτῇ προυφεστήχασιν, αὐτὰ δὲ ἕκαστα τὰ διαιρούμενα καὶ συντιθέμενα σχήματα περὶ τὴν φαντασίαν προβέβληται. περὶ δὲ τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς τῆς τούτων θεωρητικῆς μετὰ ταῦτα λέγωμεν. γνωστικὴ μὲν οὖν ἐστὶ μεγεθῶν καὶ σχημάτων καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων, ἔτι δὲ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς ἢ γεωμετρία καὶ τῶν παθῶν τῶν περὶ αὐτὰ καὶ τῶν παν τοίων θέσεων καὶ κινήσεων, προϊοῦσα μὲν ἀπὸ τοῦ ἀμεροῦς σημείου, καταβαίνουσα δὲ μέχρι τῶν στερεῶν καὶ τὰς πολυειδεῖς αὐτῶν διαφορότητας ἀνευρίσκουσα, καὶ αὖ πάλιν ἀπὸ τῶν συνθετωτέρων ἐπὶ τὰ ἀπλοῦς-τερα καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς τούτων ἀνατρέχουσα. καὶ γὰρ συνθέσεσιν χρῆται καὶ ἀναλύσεσιν, αἰεὶ μὲν ἐξ ὑποθέσεων ὁρμῶσα καὶ τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τῆς πρὸ αὐτῆς ἐπιστήμης λαμβάνουσα, χρωμένη δὲ ταῖς διαλεκτικαῖς ἀπάσαις μεθόδοις, περὶ μὲν

[FR57]

τὰς ἀρχὰς διαιρέσει τῶν εἰδῶν ἀπὸ τῶν γενῶν καὶ τοῖς ὀριστικοῖς λόγοις, περὶ δὲ τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς ἀποδείξει καὶ ἀναλύσει, ἵνα καὶ ἀπὸ τῶν ἀπλουστεύων τὰ ποικιλώτερα δεικνύη προϊόντα καὶ ἐπ' αὐτὰ πάλιν ἀναστρέφοντα καὶ χωρὶς μὲν περὶ τῶν ὑποκειμένων αὐτῇ ποιούμενη τοὺς λόγους, χωρὶς δὲ περὶ τῶν ἀξιωμάτων, ἀφ' ὧν ὥρμηται πρὸς τὰς ἀποδείξεις, καὶ τῶν αἰτημάτων, χωρὶς δὲ περὶ τῶν καθ' αὐτὰ συμβεβηκότων, ἃ καὶ δείξνυσιν ὑπάρχοντα τοῖς ὑποκειμένοις. ἐκάστη γὰρ τῶν ἐπιστημῶν ἄλλο μὲν ἔχει τὸ γένος, περὶ δὲ πραγματεύεται καὶ οὐ τὰ πάθη σκοπεῖν προτίθεται, ἄλλας δὲ τὰς ἀρχὰς, αἷς χρῆται πρὸς τὰς ἀποδείξεις, ἄλλα δὲ τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα. καὶ τὰ μὲν ἀξιώματα κοινὰ πάσαις, εἰ καὶ ἐκάστη χρῆται πρὸς τὴν ὑποκειμένην ὕλην οὐκείως αὐτοῖς, τὸ δὲ γένος καὶ τὸ καθ' αὐτὸ συμβεβηκὸς διαφέρον.

[FR58]

Τὰ μὲν οὖν ὑποκείμενα γεωμετρίας ἐστὶ τρίγωνα καὶ τετράγωνα καὶ κύκλοι καὶ ὅλως σχήματα καὶ μεγέθη καὶ τὰ τούτων τέρατα, τὰ δὲ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα τούτοις αἱ διαιρέσεις, οἱ λόγοι, αἱ ἀφαί, αἱ ἰσότητες, αἱ παραβολαί, αἱ ὑπερβολαί, αἱ ἐλλείψεις, πάντα τὰ τοιαῦτα, τὰ δὲ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα, δι' ὧν ἀποδείκνυσιν ἕκαστα, τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθείαν ἄγειν, τὸ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, ἴσα εἶναι τὰ καταλειπόμενα καὶ τὰ τούτοις ἐπόμενα. διὸ καὶ οὔτε πᾶν πρόβλημα οὔτε πᾶν ἐρώτημα γεωμετρικόν ἐστιν, ἀλλὰ ὅσα ἐκ τῶν γεωμετρίας ἐστὶν ἀρχῶν, καὶ ὁ ἐκ τούτων ἐλεγχόμενος ἐλέγχεται ἂν ὡς γεωμέτρης. ὅσα δὲ μὴ ἐκ τούτων, οὐ γεωμετρικὰ ἀλλ' ἀγεωμέτρητα. διττὰ δὲ καὶ ταῦτά ἐστιν· ἡ γὰρ παντελῶς ἐξ ἐτέρων ἐστὶν ἀρχῶν, ὥσπερ τὸ μουσικὸν ἐρώτημά φαμεν ἀγεωμέτρητον, ὅτι ἐξ ἄλλων παντελῶς ὑποθέσεων ὥρμηται καὶ οὐκ ἐκ τῶν γεωμετρίας ἀρχῶν, ἡ τὸ ταῖς γεωμετρικαῖς ἀρχαῖς χρώμενον, ἀλλὰ διαστρόφως, οἷον εἰ τις λέγοι τὰς παραλλήλους συμπίπτειν. καὶ διὰ ταῦτα ἄρα καὶ ἡ γεωμετρία κριτήρια παραδίδωσιν ἡμῖν, ἀφ' ὧν δυνησόμεθα διαγιγνώσκειν τὰ τε ἐπόμενα ταῖς ἀρχαῖς αὐτῆς καὶ ὅσα τὴν ἐκείνων ἀλήθειαν ἐκβαίνει. οἱ γὰρ τρόποι, καθ' οὓς τὰ ψευδάρια διελέγχειν δυνατόν, ὅπη διημάρτηται, ταύτην ἔχουσι τὴν ἐπαγγελίαν. ἄλλα γὰρ ἔπεται ταῖς γεωμετρικαῖς ἀρχαῖς καὶ ἄλλα ταῖς ἀριθμητικαῖς. τί γὰρ δεῖ λέγειν περὶ τῶν ... πάμπολυ λείπονται τούτων; ἀκριβεστέρα γὰρ ἐστὶν ἐπιστήμη ἄλλη ἄλλης, ὥς φησιν Ἀριστοτέλης, ἡ τε ποικιλωτέραις ἀρχαῖς χρώμενη τῆς ἐξ ἀπλουστεύων ὑποθέσεων ὥρμημένης καὶ ἡ τὸ διότι λέγουσα τῆς τὸ ὅτι γινωσκούσης καὶ ἡ περὶ νοητῶν πραγματευομένη τῆς τῶν αἰσθητῶν ἐφαπτομένης. καὶ κατὰ ταύτας τὰς ἀποδόσεις τῆς ἀκριβείας ἀριθμητικὴ μὲν ἀκριβεστέρα γεωμετρίας — αἱ γὰρ ἐκείνης ἀρχαὶ τῇ ἀπλότητι διαφέρουσιν. ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἀθετός ἐστιν, ἡ δὲ στιγμή θέσιν ἔχουσα, καὶ ἀρχαὶ γεωμετρίας μὲν ἡ στιγμή προσλαβοῦσα τὴν θέσιν, ἀριθμητικῆς δὲ ἡ μονὰς — γεωμετρία δὲ σφαιρικῆς καὶ ἀριθμητικὴ μουσικῆς — αὗται γὰρ τὰς αἰτίας ἀποδιδόασιν καθόλου τῶν ὑπ' ἐκείνας θεωρημάτων — γεωμετρία δὲ μηχανικῆς ἢ ὀπτικῆς, ὅτι περὶ αἰσθητῶν αὗται ποιοῦνται τοὺς λόγους. αἱ μὲν οὖν ἀριθμητικῆς ἀρχαὶ καὶ γεωμετρίας τῶν ἄλλων διαφέρουσιν, αἱ δὲ αὐτῶν τούτων ὑποθέσεις διεστήχασιν μὲν ἀπ' ἀλλήλων, καθ' ἣν εἵπομεν διάστασιν, ἔχουσιν δ'

[FR59]

[FR60]

αὐτὴ καὶ κοινωνίαν πρὸς ἀλλήλας, διὸ καὶ τῶν θεωρημάτων τῶν δεικνυμένων τὰ μὲν ἐστὶν αὐταῖς κοινὰ τὰ δὲ ἴδια ἑκατέρας. τὸ μὲν γὰρ πάντα λόγον εἶναι ῥητὸν ἀριθμητικῇ προσήκει μόνῃ, γεωμετρίᾳ δὲ οὐδαμῶς· εἰσὶ γὰρ ἐν αὐτῇ καὶ ἄρρητοι λόγοι. καὶ τὸ ὠρίσθαι κατὰ τὸ ἔλασσον τοὺς τῶν τετραγώνων γνώμονας ἀριθμητικῆς ἴδιον· ἐν γεωμετρίᾳ γὰρ τὸ ἐλάχιστον ὅλως οὐκ ἔστιν. γεωμετρίας δὲ ἐστὶν ἐξαιρέτα τὰ περὶ τὰς θέσεις — οἱ γὰρ ἀριθμοὶ θέσιν οὐκ ἔχουσιν — τὰ περὶ τὰς ἀφάς — ἐν γὰρ συνεχέσι τὸ ἄπτεσθαι — τὸ περὶ τὰς ἀλόγους — ὅπου γὰρ ἐπ’ ἄπειρον ἡ διαίρεσις, ἔκει καὶ τὸ ἄλογον. κοινὰ δὲ ἐστὶν ἀμφοτέρων τὰ κατὰ τὰς τομάς, οἷας **Εὐκλείδης** ἐν τῷ δευτέρῳ παραδίδωσι, πλὴν τῆς τὴν εὐθεΐαν εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνοῦσης. τῶν δ’ αὖ κοινῶν τούτων θεωρημάτων τὸ μὲν ἀπὸ γεωμετρίας εἰς ἀριθμητικὴν μετέγεται, τὰ δὲ ἔμπαλιν ἀπὸ ἀριθμητικῆς εἰς γεωμετρίαν, τὰ δὲ ὁμοίως ἀμφοτέραις προσήκεν ἀπὸ τῆς ὅλης μαθηματικῆς ἐπιστήμης εἰς αὐτὰς καθήκοντα. τὸ μὲν γὰρ ἐναλλάξ καὶ αἱ ἀναστροφαὶ τῶν λόγων καὶ αἱ συνθέσεις καὶ αἱ διαιρέσεις κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἐστὶ κοινὸν ἀμφοτέραις, τὰ δὲ τῶν συμμετρῶν ἀριθμητικὴ μὲν θεωρεῖ πρῶτως, γεωμετρία δὲ δευτέρως ἐκείνην μιμουμένη. διὸ καὶ τὰ σύμμετρα τούτῳ ταῦτα ἀφορίζεται, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ὡς τῆς συμμετρίας προηγουμένως ἐν ἀριθμοῖς ὑφισταμένης. ὅπου γὰρ ἀριθμὸς, ἔκει καὶ τὸ σύμμετρον, καὶ ὅπου τὸ σύμμετρον, καὶ ὁ ἀριθμὸς. τὰ γε μὴν τῶν τριγώνων καὶ τετραγώνων γεωμετρία μὲν θεωρεῖ μῶτως, κατ’ ἀναλογίαν δὲ λαβοῦσα παρ’ αὐτῆς ἡ ἀριθμητικὴ· καὶ γὰρ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς σχήματα κατ’ αἰτίαν ἐστίν. ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων οὖν ὁρμηθέντες ἐπὶ τὰς αἰτίας αὐτῶν τὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς μέτιμεν, καὶ ὅπου μὲν ἀπαφαλλάκτως τὰ αὐτὰ συμπτώματα θεωροῦμεν, ὥσπερ ὅτι πᾶν πολίγωνον εἰς τρίγωνον διαλύεται, ὅπου δὲ τὸ σύνεγγυς ἀγαπῶμεν, οἷον εὐρόντες ἐν γεωμετρίᾳ τετράγωνον τετραγώνου δίπλασιον, ἐν ἀριθμοῖς δὲ οὐκ ἔχοντες ἐνὸς δέοντός φαμεν ἄλλον ἄλλου διπλάσιον ὑπάρχειν, ὥσπερ τοῦ ἀπὸ τῆς πεντάδος ὁ ἀπὸ τῆς ἐπτάδος διπλάσιος ἐνὸς δέοντος.

[FR61]

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ πλέον προηγούμεν τὴν κοινωνίαν τὴν κατὰ τὰς ἀρχὰς τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν καὶ τὴν διαφορὰν παριστάντες. γεωμετρικοῦ γὰρ τὸ συνορᾶν τὰ μὲν κοινὰ θεωρήματα, ποίαις ἀρχαῖς ἔπεται κοιναῖς, τὰ δὲ ἴδια ποίαις, καὶ οὕτω τὰ τε ἀγεωμέτρητα καὶ τὰ γεωμετρικὰ διαιρεῖσθαι, καὶ τὰ μὲν εἰς ἄλλην, τὰ δὲ εἰς ἄλλην ἐπιστήμην ἄγειν. ἄνωθεν δὲ πάλιν ἐπιόντες κατίδωμεν τὴν ὅλην γεωμετρίαν, ὅθεν τε ὥρμηται καὶ μέχρι τίνος πρόεισιν. οὕτω γὰρ τὸν ἐν αὐτῇ διάκοσμον τῶν λόγων θεασώμεθα. νοήσωμεν δὴ πᾶσι τοῖς οὖσιν αὐτὴν συμπαρεκτεινομένην καὶ πᾶσιν ἐπιβάλλουσιν τὰς ἐαυτῆς διανοήσεις καὶ πάντων ἐν ἐαυτῇ περιέχουσιν τὰ εἶδη, κατὰ μὲν τὸ ἀκρότατον αὐτῆς καὶ νοερώτατον τὰ ὄντως ὄντα περιαιροῦσαν καὶ δι’ εἰκόνων ἀναδιδάσκουσιν τὰς τε τῶν θείων διακόσμων ιδιότητας καὶ τὰς τῶν νοερῶν εἰδῶν δυνάμεις — ἔχει γὰρ καὶ τούτων τοὺς λόγους ἐν τοῖς οἰκείοις θεάμασι καὶ δείκνυσιν, τίνα μὲν ἐστὶ τὰ θεοῖς ὡς προσήκοντα σχήματα, τίνα δὲ ταῖς πρώταις οὐσίαις, τίνα δὲ ταῖς τῶν ψυχῶν ὑποστάσεσι — κατὰ δὲ τὰς μέσας γνώσεις ἀνελίττει τοὺς δι-

[FR62]

ανοητικούς λόγους καὶ ἐξαπλοῖ καὶ θεωρεῖ τὴν ἐν αὐτοῖς ποικιλίαν καὶ τὰς ὑπάρξεις αὐτῶν ἐκφαίνει καὶ τὰ περὶ αὐτοὺς πάθη, τὰς τε κοινωνίας αὐτῶν καὶ τὰς διαφορότητας, ἀφ' ὧν δὴ καὶ τὰς φανταστάς διαμορφώσεις σχημάτων ἐν πέρασιν ὠρισμένοις περιλαμβάνει καὶ ἀνάγει πρὸς τὴν οὐσιώδη τῶν λόγων ὑπόστασιν — κατὰ δὲ τὰς τρίτας τῆς διανοήσεως διεξόδους τὴν φύσιν ἐπισκοπεῖ καὶ τὰ εἶδη τῶν αἰσθητῶν στοιχείων καὶ τῶν περὶ αὐτὰ δυνάμεων, ὅπως κατ' αἰτίαν ἐν τοῖς λόγοις αὐτῆς προείληπται, παραδίδωσιν. ἔχει γὰρ εἰκόνας μὲν τῶν νοητῶν ὅλων γενῶν, παραδείγματα δὲ τῶν αἰσθητῶν, οὐσιώται δὲ κατὰ τὰ εἶδη τὰ διανοητὰ καὶ διὰ μέσων τούτων ἄνεισί τε καὶ κάτεισιν ἐφ' ὅλα τὰ ὄντα καὶ τὰ γινόμενα. γεωμετρικῶς δὲ περὶ τῶν ὄντων ἀεὶ φιλοσοφοῦσα καὶ πρὸς τοῖς λόγοις ἅπασι τῶν ἀρετῶν τὰς εἰκόνας περιέχει τῶν τε νοερῶν καὶ τῶν ψυχικῶν καὶ τῶν φυσικῶν καὶ πάσας ἐν τάξει παραδίδωσι τὰς τῶν πολιτειῶν διακοσμήσεις καὶ ἐν αὐτῇ δείκνυσι τὰς ποικίλας αὐτῶν μεταβολάς, καὶ ταῦτα μὲν ἄλλως καὶ γνωστικῶς ἐνεργοῦσα, τῆς δὲ ὕλης ἐφαπτομένη πολλὰς ἀφ' ἑαυτῆς ἐπιστήμας ἐκδίδωσιν, οἷον τὴν γεωδεσίαν, τὴν μηχανικὴν, τὴν ὀπτικήν, δι' ὧν καὶ τὸν θνητὸν βίον εὐεργετεῖ. καὶ γὰρ πολεμιστήρια ὄργανα καὶ φυλακτήρια τῶν πόλεων διὰ τούτων κατεσκευάσατο καὶ τὰς τῶν ὥρων περιόδους γνωρίμους ἐποίησεν καὶ τὰς τῶν τόπων θέσεις, μέτρα τε ὑψηλῆσατο τὰ μὲν τῶν κατὰ γῆν ὁδῶν, τὰ δὲ τῶν κατὰ θάλασσαν, ζυγά τε καὶ τρυτάνας ἐδημιούργησεν, ἀφ' ὧν τὴν κατ' ἀριθμὸν ἰσότητά ταῖς πόλεσι διηκριβώσεν, τοῦ τε παντὸς κόσμου τὴν τάξιν δι' εἰκόνων ἐμφανῆ κατέστησεν καὶ πολλὰ τοῖς ἀνθρώποις ἀπὸ ἀπίστων ἀνέφηνε καὶ πιστὰ πᾶσιν ἔδειξεν· οἷον δὴ καὶ Ἰέρων ὁ Συρακούσιος εἰπεῖν λέγεται περὶ Ἀρχιμήδους, ὅτε τὴν τριάρμενον κατεσκεύασε ναῦν, ἣν παρεσκευάζετο πέμπειν Πτολεμαίῳ τῷ βασιλεῖ τῷ Αἰγυπτίῳ. πάντων γὰρ ἅμα Συρακουσίων ἐλκῦσαι τὴν ναῦν οὐ δυναμένων Ἀρχιμήδης τὸν Ἰέρωνα μόνον αὐτὴν καταγαγεῖν ἐποίησεν. καταπλαγεὶς δὲ ἐκεῖνος Ἀπὸ ταύτης, ἔφη, τῆς ἡμέρας περὶ παντὸς Ἀρχιμήδει λέγοντι πιστευτέον. τὸ δὲ αὐτὸ καὶ Γέλωνα φασιν εἰπεῖν, ἡνίκα τοῦ στεφάνου μὴ λυθέντος, ὃν κατεσκεύασεν, τὴν ὅλην ἐκάστην ἀνεῦρεν τῶν συγκραθεισῶν ὕλων.

[FR63]

[FR64]

Ταῦτα μὲν οὖν πολλοὶ τῶν πρεσβυτέρων ἀνέγραψαν, τὴν μαθηματικὴν ἐγκωμιάζειν προθέμενοι, καὶ διὰ ταῦτα ὀλίγα ἀπὸ πολλῶν ἡμεῖς ἐν τούτοις παρεθέμεθα τὴν τῆς γεωμετρίας παντελῶς γνῶσιν καὶ ὠφέλειαν ἐπιδεικνύντες· τὴν δὲ γένεσιν αὐτῆς τὴν ἐν τῇ περιόδῳ ταύτῃ μετὰ ταῦτα λεκτέον. ὁ μὲν γὰρ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης εἰπὼν τὰ αὐτὰ δοξάσματα πολλάκις εἰς ἀνθρώπους ἀφικνεῖσθαι κατὰ τινὰς τεταγμένας περιόδους τοῦ παντός, καὶ μὴ καθ' ἡμᾶς πρῶτον ἢ τοὺς ὑφ' ἡμῶν γνωσθέντας τὰς ἐπιστήμας σύστασιν λαβεῖν ἀλλὰ καὶ ἐν ἄλλαις περιφοραῖς οὐδ' εἰπεῖν ὁπόσας ταῖς τε γενομέναις καὶ ταῖς αὖθις ἐσομέναις ἐκφανῆναι τε καὶ ἀφανισθῆναι πάλιν αὐτάς. ἐπεὶ δὲ χρὴ τὰς ἀρχὰς καὶ τῶν τεχνῶν καὶ τῶν ἐπιστημῶν πρὸς τὴν παροῦσαν περίοδον σκοπεῖν, λέγομεν, ὅτι παρ' Αἰγυπτίοις μὲν εὐρήσθαι πρῶτον ἢ γεωμετρίαν παρὰ τῶν πολλῶν ἰστόρηται, ἐκ τῆς τῶν χωρίων ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν. ἀναγκαία γὰρ ἦν ἐκείνοις αὕτη

διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ Νείλου τοὺς προσήκοντας ὅρους ἐκάστοις ἀφανίζοντας. καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν, ἐπειδὴ πᾶν τὸ ἐν γενέσει φερόμενον ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς εἰς τὸ τέλειον πρόεισιν. ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν ἢ μετὰβασις γένοιτο ἂν εἰκότως. ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξιν διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ παρ' Αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὑρηται. **Θαλῆς** δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὔρεν, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑψηλήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. μετὰ δὲ τοῦτον **Μάμερκος** [?] ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφός, ὃς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς μνημονεύεται, καὶ Ἰππίας ὁ Ἡλεῖος ἱστορήσεν ὥς ἐπὶ γεωμετρίᾳ δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. ἐπὶ δὲ τούτοις **Πυθαγόρας** τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὐλῶς καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνῶμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν. μετὰ δὲ τοῦτον **Ἀναξαγόρας** ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο τῶν κατὰ γεωμετρίαν καὶ **Οἰνοπίδης** ὁ Χῖος, ὀλίγῳ νεώτερος ὢν Ἀναξαγόρου, ὢν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν ὥς ἐπὶ τοῖς μαθημασι δόξαν λαβόντων. ἐφ' οἷς **Ἱπποκράτης** ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὕρων, καὶ **Θεόδωρος** ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν. **Πλάτων** δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τὰ τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδὴν, ὅς που δῆλός ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῶν φιλοσοφίας ἀντεχομένων ἐπεγείρων. ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ καὶ **Λεωδάμας** ὁ Θάσιος ἦν καὶ **Ἀρχύτας** ὁ Ταραντῖνος καὶ **Θεαίτητος** ὁ Ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ **Νεοκλείδης** ταὶ ὁ τούτου μαθητὴς **Λέων**, οἱ πολλὰ προσευπόρησαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορισμοὺς εὑρεῖν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον. **Εὐδόξος** δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλιγόῳ νεώτερος, ἐταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ἠύξησεν καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. **Ἀμύκλας** δὲ ὁ Ἡρακλεώτης εἷς τῶν Πλάτωνος ἐταίρων καὶ **Μέναιχμος** ἀκροαδτὴς ὢν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι δὲ συγγεγονώς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ **Δεινόστρατος** ἔτι τελεωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. **Θεῦδιος** δὲ ὁ Μάγνης ἐν τε τοῖς μαθημασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ

[FR65]

[FR66]

[FR67]

πολλὰ τῶν ὀρικῶν [?] καθολικώτερα ἐποίησεν. καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζικηνὸς Ἄθηναίος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονῶς χρόνους καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν ἐπιφανὲς ἐγένετο. διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιοῦμενοι τὰς ζητήσεις. Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλεον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος, Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ' ἐκείνου προτραπείς εἰς τὰ μαθήματα, καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα προῦβαλλεν ἑαυτῷ, ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν. οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράφαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καὶ φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὲ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένης καὶ Ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν Ἐρατοσθένης. καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ αὐτῇ οἰκείος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικά καὶ τὰ κατοπτρικά τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. διαφερόντως δ' ἂν τις αὐτὸν ἀγασθῇ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων φεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἡδύνατο παρείληφεν, ἔτι δὲ τοῖς τῶν συλλογισμῶν παντοίους τρόπους τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν αἰτίων λαμβάνοντας τὴν πίστιν, τοὺς δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὠρμημένους, πάντας δὲ ἀναλέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους, πρὸς δὲ τούτοις τὰς μεθόδους ἀπάσας τὰς διαλεκτικές, τὴν μὲν διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὐρέσεσι τῶν εἰδῶν, τὴν δὲ ὀριστικὴν ἐν τοῖς οὐσιώδεσι λόγοις, τὴν δὲ ἀποδεικτικὴν ἐν τοῖς ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς τὰ ζητούμενα μεταβάσει, τὴν δὲ ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναστροφαῖς. καὶ μὴν καὶ τὰ ποικίλα τῶν ἀντιστροφῶν εἶδη τῶν τε ἀπλουστέρων καὶ τῶν συνθετωτέρων ἱκανῶς ἐστιν ἐν τῇ πραγματείᾳ αὐτῇ διηκριβωμένα θεωρεῖν, καὶ τίνα μὲν ὅλα ὅλοις ἀντιστρέφειν δύναται, τίνα δὲ ὅλα μέρεσι καὶ ἀνάπαλιν, τίνα δὲ ὡς μέρη μέρεσιν. ἔτι δὲ λέγομεν τὴν συνέχειαν τῶν εὐρέσεων, τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν τῶν τε προηγουμένων καὶ τῶν ἐπομένων, τὴν δύναμιν, μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν. ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθεῖς ἢ ἀφελὼν οὐκ ἐπιστήμης λανθάνεις ἀποπεσὼν καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψευδὸς καὶ τὴν ἄγνοιαν ὑπενεχθεῖς;

[FR68]

[FR69]

[FR70]

ἐπειδὴ δὲ πολλὰ φαντάζεται μὲν ὡς τῆς ἀληθείας ἀντεχόμενα καὶ ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φέρεται δὲ εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν πλάνην καὶ τοὺς ἐπιπολαιότερους ἐξαπατᾷ, μεθόδους παραδέδωκεν καὶ τῆς τούτων διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμνάζειν μὲν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύτης πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ἐντίθησι, Ψευδαρίων ἐπέγραψεν, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διαριθμησάμενος καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίους θεωρήμασι καὶ τῷ ψεύδει τὸ ἀληθὲς παραθεῖς καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπάτης συναρμόσας. τοῦτο μὲν οὖν τὸ βιβλίον καθαριστικόν ἐστι καὶ γυμναστικόν, ἡ δὲ στοιχείωσις αὐτῆς τῆς ἐπιστημονικῆς θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίας πραγμάτων ἀνέλεγκτον ἔχει καὶ τελείαν ὑφήγησιν.

Τίς οὖν ὁ σκοπὸς τῆς πραγματείας ταύτης ἴσως ἐρήσεται τις, ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς τοῦτον εἴποιμι ἄν, ὅτι διοριστέον ἐστὶν τὴν πρόθεσιν κατὰ τε τὰ πράγματα, περὶ ὧν αἱ ζητήσεις, καὶ κατὰ τὸν μανθάνοντα. καὶ πρὸς μὲν αὐτὰ τὰ ὑποκείμενα βλέποντες λέγομεν, ὥς ἄρα περὶ τῶν κοσμικῶν σχημάτων ἐστὴν ὁ σύμπας τῷ γεωμέτρῃ λόγος, ἀρχόμενος μὲν ἀπὸ τῶν ἀπλῶν, τελευτῶν δὲ εἰς τὴν ποικιλίαν τῆς τούτων συστάσεως, καὶ χωρὶς μὲν ἕκαστα ὑφιστάς, ὁμοῦ δὲ τὰς εἰς τὴν σφαῖραν αὐτῶν ἐγγραφὰς καὶ τοὺς λόγους οὓς ἔχει πρὸς ἄλληλα παραδιδούς. διὸ καὶ τῶν καθ' ἕκαστα βιβλίων τοὺς σκοποὺς τινες ἐπὶ τὸν κόσμον ἀναφέρειν ἠξίωσαν καὶ τὴν χρεῖαν αὐτῶν, ἣν παρέχεται πρὸς τὴν τοῦ παντὸς θεωρίαν ἀνέγραψαν. πρὸς δὲ τὸν μανθάνοντα διοριζόμενοι τὸν σκοπὸν αὐτὸ τοῦτο, ὃ λέγεται, στοιχείωσιν αὐτῷ προκεῖσθαι φήσομεν καὶ τελείωσιν τῆς τῶν μανθανόντων διανοίας πρὸς τὴν σύμπασαν γεωμετρίαν. ἀπὸ γὰρ τούτων ὁρμώμενοι καὶ τὰ ἄλλα γινῶναι δυνησόμεθα τῆς ἐπιστήμης ταύτης μέρη, καὶ τὴν ποικιλίαν τὴν ἐν αὐτῇ περιλαβεῖν ἄνευ τούτων ἀδύνατον ἡμῖν ἐστὶν καὶ ἄληπτος ἡ τῶν ἄλλων μάθησις. τὰ γὰρ ἀρχοειδέστατα καὶ ἀπλούστατα θεωρήματα καὶ συγγενέστατα ταῖς πρώταις ὑποθέσεσιν ἐνταῦθα συνήθροισται τάξιν λαβόντα τὴν πρέπουσαν καὶ αἱ τῶν ἄλλων ἀποδείξεις τούτοις ὡς γνωριμωτάταις χρῶνται καὶ ἀπὸ τούτων ὥρμηται. καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ Ἀπολλώνιος καὶ οἱ ἄλλοι πάντες φαίνονται τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματεία δεδειγμένοις [ὡς] ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι.

[FR71]

Σκοπὸς μὲν οὖν οὗτος, στοιχειῶσαί τε πρὸς τὴν ὅλην ἐπιστήμην τοὺς μανθάνοντας καὶ τῶν κοσμικῶν σχημάτων διωρισμένας παραδοῦναι συστάσεις. αὐτὸ δὲ τοῦτο τὸ τῆς στοιχειώσεως ὄνομα καὶ τὸ τοῦ στοιχείου, παρ' ὃ καὶ ἡ στοιχείωσις, τίνα ἂν ἔχοι λόγον; ἵνα δὲ καὶ περὶ τῆς ἐπιγραφῆς τι ζητήσωμεν. τῶν τοίνυν θεωρημάτων τὰ μὲν εἰδῶσι στοιχεῖα καλεῖν, τὰ δὲ στοιχειώδη, τὰ δὲ ἔξω τῆς τούτων ἀφορίζεται δυνάμεως. στοιχεῖα μὲν οὖν ἐπονομάζονται, ὧν ἡ θεωρία διικνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην, καὶ ἀφ' ὧν παραγίνεται ἡμῖν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπόρων ἡ διάλυσις. ὡς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσιν ἀρχαὶ πρώται καὶ ἀπλούσταται καὶ ἀδιαίρετοι, αἷς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων

[FR72]

ἐπιφημίζομεν, καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ὑφέστηκεν καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὴ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστὶ τινὰ θεωρήματα προηγούμενα καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα πρὸς τὰ ἐφεξῆς καὶ διήκοντα διὰ πάντων καὶ παρεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεις συμπτωμάτων, ἃ δὴ στοιχεῖα προσαγορεύουσι. **στοιχειώδη** δ' ἐστὶν ὅσα δι-
ατείνει μὲν ἐπὶ πλείω καὶ τὸ ἀπλοῦν ἔχει καὶ τὸ χαρίεν, οὐκέτι μὴν καὶ τὴν τῶν στοιχείων [ἄξιαν] τῷ μὴ πρὸς πᾶσαν αὐτῶν τὴν ἐπιστήμην κοινὴν εἶναι τὴν θεωρίαν, οἷον τοῖς τριγώνοις τὰς ἀπὸ τῶν γωνιῶν καθέτους ἐπὶ τὰς πλαγίας καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτειν. ὅσα τε μήτε εἰς πλῆθος ἔχει διήκουσαν τὴν γνῶσιν μήτε αὖ γλαφυρόν τι προφαίνει καὶ χαρίεν, ταῦτα καὶ τῆς τῶν στοιχειωδῶν ἔξω πίπτει δυνάμει.

Πάλιν δὲ τὸ στοιχεῖον λέγεται διχῶς, ὥς φησὶν ὁ **Μέναιχμος**. καὶ γὰρ τὸ κατασκευάζον ἐστὶ τοῦ κατασκευαζομένου στοιχείου, ὥς τὸ πρῶτον παρ' **Εὐκλείδη** τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ πέμπτου τὸ τέταρτον. οὕτω δὲ καὶ ἀλλήλων εἶναι πολλὰ στοιχεῖα ῥηθήσεται· κατασκευάζεται γὰρ ἐξ ἀλλήλων. δείκνυται γὰρ καὶ ἐκ τοῦ τέτρασιν ὀρθαῖς εἶναι ἴσας τὰ ἔξω τῶν εὐθυγράμμων γωνίας τὸ πλῆθος τῶν ἐντὸς ὀρθαῖς ἴσων καὶ ἀνάπαλιν ἐκ τούτου ἐκεῖνο. καὶ ἔοικεν λήμματι τὸ τοιούτο στοχεῖον. ἄλλως δὲ λέγεται στοιχεῖον, εἰς ὃ ἀπλοῦστερον ὑπάρχον διαιρεῖται το σύνθετον· οὕτως δὲ οὐ πᾶν ἐτι ῥηθήσεται παντὸς στοι-
χεῖον, ἀλλὰ τὰ ἀρχοειδέστερα τῶν ἐν ἀποτελέσματος λόγῳ τεταγμένων, ὥσπερ τὰ αἰτήματα στοιχεῖα τῶν θεωρημάτων. κατὰ δὲ τοῦτο τοῦ στοιχείου τὸ σημα-
νόμενον καὶ τὰ παρ' Εὐκλείδη στοιχεῖα συνετάχθη, τὰ μὲν τῆς περὶ τὰ ἐπίπεδα γεωμετρίας, τὰ δὲ τῆς στερεομετρίας. οὕτω δὲ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς καὶ ἐν τοῖς ἀστρονομικοῖς στοιχειώσεις πολλοὶ συνέγραψαν.

[FR73]

Ἔστι δὲ τοῦτο χαλεπὸν καὶ τὸ ἐκλέξασθαι καὶ τάξει κατὰ τρόπον τὰ στοιχεῖα καθ' ἑκάστην ἐπιστήμην, ἅφ' ὧν τὰ ἄλλα προάγεται πάντα καὶ εἰς ἃ τὰ ἄλλα ἀναλύεται. καὶ τῶν ἐπιχειρησάντων οἱ μὲν πλείω, οἱ δὲ ἐλάττω συναγαγεῖν ἠδυνήθησαν, καὶ οἱ μὲν βραχυτέrais ἀποδείξεσιν ἐχρήσαντο, οἱ δὲ εἰς μῆκος ἀπέραντον ἐξέτειναν τὴν θεωρίαν, καὶ οἱ μὲν τὸν δι' ἀδυνάτου τρόπον ἐξέκλιναν, οἱ δὲ τὴν ἀναλογίαν, οἱ δὲ προκατασκευὰς ἐμηχανήσαντο πρὸς τοὺς ἀναιροῦντας τὰς ἀρχάς, καὶ ὅλως πολλοὶ τινες εὖρηται τρόποι τῆς στοιχειώσεως ἑκάστοις. δεῖ δὲ τὴν τοιαύτην πραγματείαν πᾶν μὲν ἀπεσκευάσθαι τὸ περιττόν —

ἐμπόδιον γὰρ τοῦτο πρὸς τὴν μάθησιν — ἐκλέγειν δὲ τὰ συνέχοντα πάντα καὶ συνάγοντα τὸ προκείμενον — ἀνυσιμώτατον γὰρ τοῦτο πρὸς τὴν ἐπιστήμην — σαφηνείας δ' ἅμα καὶ συντομίας πολλὴν πεποιῆσθαι πρόνοιαν — τὰ γὰρ ἐναντία τούτων ἐπιβολοῖ τὴν διάνοιαν ἡμῶν — τῆς τε τῶν θεωρημάτων ἐν πέραςι κα-
θολικοῖς περιλήψεως ἀντειληφθαι — τὰ γὰρ εἰς τὰ μερικώτερα τεμαχίζοντα τὴν διδασκαλίαν δυσπερίληπτον ἀπεργάζεται τὴν γνῶσιν. κατὰ πάντας δὲ τούτους τοὺς τρόπους εὖροι τις ἂν τὴν **Εὐκλείδου** στοιχειώσιν τῶν ἄλλων διαφέρουσιν· τὸ μὲν γὰρ χρήσιμον αὐτῆς εἰς τὴν περὶ τῶν περὶ τῶν ἀρχικῶν σχημάτων συν-
τελεῖ θεωρίαν, τὸ δὲ σαφὲς καὶ διηρθρωμένον ἢ ἀπὸ τῶν ἀπλουστέρων ἐπὶ τὰ ποικιλώτερα μετάβασις ἀπεργάζεται καὶ ἢ ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν καταβολὴ

[FR74]

τῆς θεωρίας, τὸ δὲ καθολικὸν τῆς ἀποδείξεως ἡ διὰ τῶν πρώτων θεωρημάτων καὶ ἀρχοειδῶν ἐπὶ τὰ ζητούμενα μετάβασις. καὶ γὰρ ὅσα παραλιμπάνειν δοκεῖ, ἢ ταῖς αὐταῖς ἐφόδοις γίγνεται γνῶριμα [τοῖς εἰρημένοις?], ὥσπερ ἡ σύστασις τοῦ σκαληνοῦ καὶ ἰσοσκελοῦς, ἢ ὡς ἀμήχανον εἰσάγοντα καὶ ἀπέραντον ποικιλίαν ἀλλότρια τῆς τῶν στοιχείων ἐστὶν ἐκλογῆς, ὥσπερ τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων ἀλόγων, ἀ ὁ Ἄπολλώνιος ἐπὶ πλέον ἐξεργάσατο, ἢ ὡς αἰτίων τῶν παραδεδομένων ἔχει τὴν σύστασιν, ὥσπερ τὰ εἶδη τῶν γωνιῶν τὰ πολλὰ καὶ τῶν γραμμῶν. ταῦτα γὰρ παραλέλειπται μὲν καὶ παρ' ἄλλοις ἐτυχε λόγου πλείονος, ἔχει δὲ τὴν γνῶσιν ἀπὸ τῶν ἀπλῶν. τοσαῦτα περὶ τῆς ὅλης στοιχειώσεως εἵχομεν ἀναγράφειν.

[FR75]

Τὴν δὲ σύμπασαν οἰκονομίαν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων ᾧδε πως ἀναδιδάξομεν. ἐπειδὴ τὴν ἐπιστήμην ταύτην τὴν γεωμετρίαν ἐξ ὑποθέσεως εἶναι φαμεν καὶ ἀπὸ ἀρχῶν ὠρισμένων τὰ ἐφεξῆς ἀποδεικνύναι — μία γὰρ ἡ ἀνυπόθετος, αἱ δὲ ἄλλαι παρ' ἐκείνης ὑποδέχονται τὰς ἀρχάς — ἀνάγκη δὴ ποῦ τὸν τὴν ἐν γεωμετρίᾳ στοιχειῶσιν συντάττοντα χωρὶς μὲν παραδοῦναι τὰς ἀρχάς τῆς ἐπιστήμης, χωρὶς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν συμπεράσματα, καὶ τῶν μὲν ἀρχῶν μὴ διδόναι λόγον, τῶν δὲ ἐπομένων ταῖς ἀρχαῖς. οὐδεμία γὰρ ἐπιστήμη τὰς ἑαυτῆς ἀρχάς ἀποδείκνυσιν, οὐδὲ ποιεῖται λόγον περὶ αὐτῶν, ἀλλ' αὐτοπίστως ἔχει περὶ αὐτάς, καὶ μᾶλλον εἰσιν αὐτῇ καταφανεῖς τῶν ἐφεξῆς. καὶ τὰς μὲν οἶδεν δι' αὐτάς, τὰ δὲ μετὰ ταῦτα δι' ἐκείνας. οὕτω γὰρ καὶ ὁ φυσιολόγος ἀπ' ἀρχῆς ὠρισμένης προάγει τοὺς λόγους ὑποθέμενος εἶναι κίνησιν, καὶ ὁ ἰατρὸς καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν [?] καὶ τεχνιτῶν ἕκαστος. εἰ δὲ τις ταῦτόν συμφύρει τὰς τε ἀρχάς καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, οὗτος ἐπιταράττει τὴν σύμπασαν γνῶσιν καὶ συγχυκᾷ τὰ μηδὲν προσήκοντα ἀλλήλοις. ἀρχὴ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς φύσει διώριστα ἀλλήλων.

Πρῶτον μὲν οὖν, ἅπερ ἔφην, ἔδει διαστείλασθαι τὰς τε ἀρχάς καὶ τὰ ἐπόμενα ταῖς ἀρχαῖς, ὃ δὴ καὶ ποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καθ' ἕκαστον ὡς εἰπεῖν βιβλίον καὶ πρὸ πάσης τῆς πραγματείας τὰς κοινὰς τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀρχάς ἐκτιθέμενος. ἔπειτα καὶ αὐτάς διαιρεῖ τὰς κοινὰς ἀρχάς εἰς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιιώματα. διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων καὶ οὐκ ἔστιν ταῦτὸ ἀξίωμα καὶ αἶτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥς πού πησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης, ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνῶριμον ᾗ καὶ καθ' αὐτὸ πιστόν τὸ παραλαμβάνομενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα το τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον τὸ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσις ἐστὶ. τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοῖον κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως, ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδείξεως χωρὶς. ὅταν δὲ αὐ καὶ ἄγνωστον ᾗ τὸ λεγόμενον καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα, φησὶν, αἶτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. δηλοῦσι δὲ οἱ περὶ τίνος τῶν αἰτημάτων καταπραγματεύεσθαι σπουδάσαντες, ὡς ὑπὸ μηδενὸς αὐτόθεν συγχωρεῖσθαι δυναμένου. καὶ κατὰ μὲν τὴν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοῦτον διώριστα τὸν τρόπον ἀξίωμα καὶ αἶτημα καὶ ὑπόθεσις. πολλάκις δὲ καὶ πάντα ταῦτα καλοῦσιν ὑποθέσεις,

[FR76]

[FR77]

ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἀξίωμα πᾶσαν ἀπόφανσιν ἀπλῆν, ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ ὑποθέσεις ἀξιώματα, κατὰ δὲ τοὺς ἐτέρους καὶ τὰ ἀξιώματα ὑποθέσεις.

Πάλιν δ' αὖ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς **προβλήματα** διαιρεῖται καὶ **θεωρήματα**, τὰ μὲν τὰς γενέσεις περιέχοντα τῶν σχημάτων καὶ τὰς τομὰς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις καὶ ὅλως τὰ παθήματα τὰ γιγνόμενα περὶ αὐτὰ, τὰ δὲ καθ' αὐτὰ συμβεβηκότα ἐκάστοις δεικνύοντα. καθάπερ γὰρ αἱ ποιητικαὶ τῶν ἐπιστημῶν θεωρίας μετέχουσιν, κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ θεωρητικαὶ τὰ προβλήματα ταῖς ποιήσεσιν ἀνάλογον προσειλήφασιν. ἤδη δὲ τῶν παλαιῶν οἱ μὲν πάντα θεωρήματα καλεῖν ἤξιωσαν, ὥς οἱ περὶ **Σπεύσιππον** καὶ **Ἀμφίνομον**, ἡγούμενοι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις οἰκειότεραν εἶναι τὴν τῶν θεωρημάτων προσηγορίαν ἢ τὴν τῶν προβλημάτων, ἄλλως τε καὶ περὶ αἰδίων ποιουμέναις τοὺς λόγους. οὐ γὰρ ἐστὶ γενέσεις ἐν τοῖς αἰδίοις ὥστε οὐδὲ τὸ πρόβλημα χῶσαν ἐπὶ τούτων ἂν ἔχοι, γενέσιν ἐπαγγελλόμενον καὶ ποιῆσιν τοῦ μήπω πρότερον ὄντος, οἷον ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν, ἢ τετραγώνου δοθείσης εὐθείας ἀναγραφὴν, ἢ θέσιν εὐθείας πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ. ἄμεινον οὖν φασι λέγειν, ὅτι πάντα ταυτὰ ἐστὶ, τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν ὥσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ αἰεὶ ὄντα, ὥστε καὶ πάντα θεωρηματικῶς ἐποῦμεν ἀλλ' οὐ προβληματικῶς λαμβάνεσθαι. οἱ δὲ ἀνάπαλιν πάντα προβλήματα λέγειν ἐδικαίουν ὥς οἱ περὶ **Μέναιχμον** μαθηματικοί, τὴν δὲ προβολὴν εἶναι διττὴν· ὅτε μὲν πορίσασθαι τὸ ζητούμενον, ὅτε δὲ περιωρισμένον λαβόντας ἰδεῖν ἢ τίς ἐστίν, ἢ ποῖόν τι, ἢ τί πέπονθεν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο σχέσεις. καὶ λέγουσι μὲν ὀρθῶς ἀμφοτέρω· καὶ γὰρ οἱ περὶ **Σπεύσιππον** καλῶς — οὐ γὰρ τοιαυτὰ ἐστὶ τὰ προβλήματα γεωμετρίας, οἷα τὰ μηχανικῆς· αἰσθητὰ γὰρ ταῦτα καὶ γενέσιν ἔχοντα καὶ παντοίαν μεταβολὴν — καὶ οἱ περὶ τὸν **Μέναιχμον** — οὐ γὰρ ἄνευ τῆς εἰς ὕλην προόδου καὶ αἱ τῶν θεωρημάτων εἰσὶν εὐρέσεις. λέγω δὲ ὕλην τὴν νοητὴν. εἰς ἐκείνην οὖν οἱ λόγοι προϊόντες καὶ μορφοῦντες αὐτὴν εἰκότως δήπου ταῖς γενέσεσιν ἐοικέναι λέγονται. τὴν γὰρ τῆς διανοίας ἡμῶν κίνησιν καὶ τὴν προβολὴν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων γενέσιν τῶν ἐν φαντασίᾳ σχημάτων εἶναι φαμεν καὶ τῶν περὶ αὐτὰ παθῶν. ἐκεῖ γὰρ αἱ συστάσεις καὶ αἱ τομαὶ καὶ αἱ θέσεις καὶ αἱ παραβολαὶ καὶ αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις, τὰ δὲ ἐν τῇ διανοίᾳ πάντα ἔστηκεν ἄνευ γενέσεως καὶ πάσης μεταβολῆς.

Ἔστι μὲν οὖν καὶ προβλήματα γεωμετρικὰ καὶ θεωρήματα, διότι δὲ θεωρία τὸ πλεονάζον ἐστὶν ἐν αὐτῇ, ὥσπερ ἐπὶ μηχανικῆς ποιήσεις, καὶ τὰ προβλήματα πάντα μετέχει θεωρίας, οὐ μὴν ἀνάπαλιν· ὅλως γὰρ αἱ ἀποδείξεις θεωρίας εἰσὶν ἔργον. πάντα δὲ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς δι' ἀποδείξεως λαμβάνεται, ὥστε κοινότερον τὸ θεωρήμα. οὐ πάντα δὲ τὰ θεωρήματα δεῖται τῶν προβλημάτων, ἀλλ' ἐστὶν ἃ καὶ αὐτόθεν ἔχει τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου. οἱ δὲ διορίζοντες τὸ θηώρημα τοῦ προβλήματος φασι πᾶν μὲν πρόβλημα ἐπιδέχεσθαι τῶν κατηγορουμένων τῆς ἐν αὐτῷ ὕλης, αὐτό τε ἕκαστον καὶ τὸ ἀντικείμενον, πᾶν δὲ θηώρημα αὐτὸ μὲν ἐπιδέχεσθαι τὸ κατηγορούμενον, οὐ μέντοι καὶ τὸ ἀντικείμενον. λέγω δὲ ὕλην μὲν αὐτῶν τὸ γένος, περὶ οὗ ἡ ζήτησις, οἷον

[FR78]

[FR79]

τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ κύκλον, σύμπτωμα δὲ κατηγορούμενον τὸ καθ' αὐτὸ συμβεβηκός, οἷον ἴσον ἢ τομὴν ἢ θέσιν ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον. ὅταν οὖν προτείνη τις οὕτως, εἰς κύκλον ἐντεῖναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα λέγει. δυνατόν γὰρ εἰς αὐτὸν ἐντεῖναι καὶ μὴ ἰσόπλευρον· καὶ πάλιν, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα τὸ τοιόνδε· δυνατόν γὰρ συστήσασθαι καὶ μὴ ἰσόπλευρον. ὅταν δὲ τῶν ἰσοσκελῶν ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει προτείνη τις, θεωρήμα φατέον αὐτὸν προτείνειν. οὐ γὰρ δυνατόν καὶ μὴ ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει τῶν ἰσοσκελῶν· ὥστε εἴ τις προβληματικῶς σχηματίσας εἴποι, εἰς ἡμικύκλιον ὀρθὴν ἐντεῖναι γωνίαν, ἀγεωμετρήτου δόξαν ἂν λάβοι. πᾶσα γὰρ ἢ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθή ἐστίν. ἐφ' ὧν τοίνυν τὸ σύμπτωμα καθολικόν ἐστι καὶ πάσῃ τῇ ὕλῃ παρομαρτοῦν, ταῦτα θεωρήματα λεκτέον, ἐφ' ὧν δὲ μὴ καθόλου μηδὲ τῷ ὑποκειμένῳ πάντως ἐπόμενον, πρόβλημα τὸ τοιοῦτον θετέον. τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν· καὶ γὰρ εἰς ἄνισα δυνατόν — πᾶσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν· ἔστι γὰρ καὶ ἡ εἰς ἄνισα διαίρεσις — ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀναγράψαι τετράγωνον· δυνατόν γὰρ καὶ μὴ τετράγωνον — καὶ πάντα, ὅσα τοιαῦτα, τῆς τῶν προβλημάτων ἐστὶν τάξεως. οἱ δὲ περὶ **Ζηνόδοτον** τὸν προσήκοντα μὲν τῇ **Οἰνοπίδου** διαδοχῇ, τῶν μαθητῶν δὲ **Ἀνδρωνος**, διώριζον τὸ θεωρήμα τοῦ προβλήματος, ἢ τὸ μὲν θεωρήμα ζητεῖ, τί ἐστὶ τὸ σύμπτωμα τὸ κατηγορούμενον τῆς ἐν αὐτῷ ὕλης, τὸ δὲ πρόβλημα, τίνος ὄντος τί ἐστίν. ὅθεν καὶ οἱ περὶ τὸν **Ποσειδώνιον** τὸ μὲν ἀφωρίζοντο πρότασιν, καθ' ἣν ζητεῖται τὸ εἰ ἐστὶν ἢ μὴ, τὸ δὲ πρόβλημα πρότασιν, ἐν ᾗ ζητεῖται τί ἐστὶν ἢ ποῖόν τι, καὶ τὴν μὲν θεωρητικὴν πρότασιν ἔλεγον δεῖν ἀποφαντικῶς σχηματίζειν, οἷον πᾶν τρίγωνον μείζους ἔχει τὰς δύο τῆς λοιπῆς, καὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, τὴν δὲ προβληματικὴν, ὥσπερ ζητοῦντας, εἴ ἐστὶν ἐπὶ τῇσδε τῆς εὐθείας συστήσασθαι τρίγωνον. διαφέρειν γὰρ, ἢ ἀπλῶς τε καὶ ἀορίστως ζητεῖν, εἰ ἐστὶ πρὸς ὀρθᾶς ἀπὸ τοῦδε τοῦ σημείου τῇδε [τῇ] εὐθείᾳ, ἢ τίς ἐστὶν ἢ πρὸς ὀρθᾶς θεωρεῖν.

[FR80]

[FR81]

Ἄλλ' ὅτι μὲν ἐστὶ τις διαφορὰ τοῦ τε προβλήματος καὶ τοῦ θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι δὲ καὶ ἡ **Εὐκλείδου** στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα τὰ δὲ θεωρήματα, φανερόν ἐσται τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον καὶ αὐτοῦ προστιθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ „ὅπερ ἔδει ποιῆσαι“ ὅπου δὲ τὸ „ὅπερ ἔδει δεῖξαι“, ὡς τῶν θεωρημάτων χαρακτηριστικόν, καίτοι, καθάπερ εἵπομεν, οὔσης καὶ ἐν τοῖς προβλήμασιν ἀποδείξεως, ἀλλ' ὅμως, ὅπου μὲν καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς γενέσεως χάριν — ἵνα γὰρ δείξωμεν, ὅτι πεποιήται τὸ προταχθέν, τὴν ἀπόδειξιν παραλαμβάνομεν — ὅπου δὲ αὐτὴ δι' ἑαυτὴν ἐστὶν σπουδῆς ἀξία τὴν φύσιν τοῦ ζητουμένου παριστάνειν δυνάμενη. εὐροῖς δ' ἂν τὸν **Εὐκλείδην** τοτὲ μὲν συμπλέκοντα τὰ θεωρήματα τοῖς προβλήμασι καὶ παρὰ μέρος αὐτοῖς χρώμενον, ὡς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τοτὲ δὲ πλεονάζοντα κατὰ τὰ ἕτερα. τὸ μὲν γὰρ τέταρτον ὅλον προβλημάτων ἐστὶ, τὸ δὲ πέμπτον θεωρημάτων.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων ἡμῖν εἰρήσθω· μετὰ δὲ ταῦτα τὸν σκοπὸν ἀφορισάμενοι τοῦ πρώτου βιβλίου καὶ τὴν διαίρεσιν παραστήσαντες ἀρξώμεθα τῆς περὶ

τοὺς ὅρους πραγματείας. ἡ μὲν οὖν πρόθεσις ἐστὶν ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ τὰς ἀρχὰς παραδοῦναι τῆς τῶν εὐθυγράμμων θεωρίας. εἰ γὰρ καὶ φύσει κρείττων ὁ κύκλος καὶ ἡ περὶ αὐτὸν πραγματεία τῆς τῶν εὐθυγράμμων οὐσίας τε καὶ γνώσεως, ἀλλ' ἡμῖν προσήκουσα μᾶλλον ἡ περὶ τούτων διδασκαλία τοῖς ἀτελεστέροις καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἐπὶ τὰ νοητὰ μετάγειν τὴν διάνοιαν σπεύδουσιν. καὶ γὰρ τοῖς μὲν αἰσθητοῖς οἰκεῖα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα, τοῖς δὲ νοητοῖς ὁ κύκλος, διότι δὴ τὸ μὲν ἀπλοῦν καὶ μονοειδὲς καὶ ὠρισμένον προσήκει τῇ φύσει τῶν ὄντων, τὸ δὲ ποικίλον καὶ ἀορίστως αὐξανόμενον τῷ πλήθει τῶν περιεχουσῶν πλευρῶν διαφέρει τοῖς αἰσθητοῖς. ἐν τούτῳ δὴ οὖν τῷ βιβλίῳ τὰ πρώτιστα καὶ ἀρχοειδέστατα σχήματα τῶν εὐθυγράμμων παραδίδονται, τό τε τρίγωνον λέγω καὶ τὸ παραλληλόγραμμον· ἐν γὰρ τούτοις ὡς ἐν γένει περιέχεται καὶ τὰ αἷτια τῶν στοιχείων, τό τε ἰσοσκελὲς καὶ τὸ σκαληνὸν καὶ τὰ συνιστάμενα ἐκ τούτων, τό τε ἰσοπλευρον τρίγωνον καὶ τετράγωνον, ἀφ' ὧν τὰ σχήματα τῶν τεττάρων στοιχείων ἔσχεν τὴν σύστασιν. εὐρήσομεν οὖν καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τετραγώνου γένεσιν, τοῦ μὲν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς δοθείσης. τὸ οὖν ἰσοπλευρον τρίγωνον προσεχὲς αἰτίον ἐστὶ τῶν τριῶν στοιχείων πυρὸς ἀέρος ὕδατος, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς γῆς. συνήρτηται δὴ οὖν ὁ σκοπὸς τοῦ πρώτου βιβλίου πάσῃ τῇ πραγματείᾳ καὶ συντελεῖ πρὸς ὅλην τὴν τῶν κοσμικῶν στοιχείων θεωρίαν. ἔτι δὲ καὶ στοιχειοῖ τοὺς μανθάνοντας εἰς τὴν περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων ἐπιστήμην τὰς πρώτας αὐτῶν ἀρχὰς καλῶς ἀνευρών καὶ δι' ἀκριβείας καταδῆσαμενος.

[FR82]

Διήρηται δὲ τὸ βιβλίον εἰς τρία μέγιστα τμήματα, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τῶν τριγώνων τὰς γενέσεις καὶ τὰς ιδιότητας ἐμφανίζει κατὰ τε γωνίας καὶ πλευράς καὶ ποιεῖται συγκρίσεις αὐτῶν πρὸς ἄλληλα καὶ ἕκαστα ἐφ' ἑαυτοῦ θεωρεῖ. καὶ γὰρ ἐν τρίγωνον λαβὼν ποτὲ μὲν ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἐπισκοπεῖ τὰς γωνίας, ποτὲ δὲ ἀπὸ τῶν γωνιῶν τὰς πλευράς, ἰσότητός τε πέρι καὶ ἀνισότητος, καὶ δύο ὑποθέμενος τὰ αὐτὰ πάλιν διὰ ποικίλων εὐρίσκει. τὸ δὲ δεύτερον τὴν περὶ τῶν παραλληλογράμμων ἐξυφαίνει θεωρίαν, τὰς τε ιδιότητας τῶν παραλλήλων καὶ τὰς γενέσεις τῶν παραλληλογράμμων ἀναγράφον καὶ ἔτι τὰ συμπτώματα τὰ ἐν αὐτοῖς ἀποδεικνύς. τὸ δὲ τρίτον τὴν κοινωνίαν τῶν τε τριγώνων καὶ τῶν παραλληλογράμμων *[sic.]* ἀναφαίνει, ἐν τε τοῖς συμπτώμασι καὶ ταῖς πρὸς ἄλληλα συγκρίσεσι. καὶ γὰρ τὰ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ἴσων τριγώνων ἢ παραλληλόγραμμα δείκνυται τὰ αὐτὰ πεπονθότα, καὶ μετὰ συμπλοκῆς ἀμφοτέρων ἐπὶ μιᾷς ὄντων βάσεως, καὶ πῶς ἂν γένοιτο ἴσον τριγώνῳ παραλληλόγραμμον, καὶ τέλος περὶ τῶν ἀναγραφόμενων ἐν τοῖς ὀρθογωνιαίοις τριγώνοις τετραγώνων ἀπὸ τῶν πλευρῶν τίνα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν αὐτήν. τοία δέ τις ἔστω καὶ ἡ πρόθεσις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως καὶ ἡ διαίρεσις.

[FR83]

[FR84]

Ἀρχὴν δὲ ποιούμενοι τῆς τῶν καθ' ἕκαστα ζητήσεως προαγορεύομεν τοῖς ἐντευξομένοις, μὴ ταῦτα παρ' ἡμῶν ἀπαιτεῖν ὅσα διατεθρύληται τοῖς πρὸ ἡμῶν λημμάτια καὶ πτώσεις καὶ εἴ τι τοιοῦτο. τούτων μὲν γὰρ διακορεῖς ἐσμέν καὶ

στανίως αὐτῶν ἐφαψόμεθα. ὅσα δὲ πραγματειωδεστέραν ἔχει θεωρίαν καὶ συντελεῖ πρὸς τὴν ὅλην φιλοσοφίαν, τούτων προηγουμένην ποιησόμεθα τὴν ὑπόμνησιν, ζηλοῦντες τοὺς **Πυθαγορείους**, οἷς πρόχειρον ἦν καὶ τοῦτο σύμβολον „σῆμα καὶ βῆμα, ἀλλ’ οὐ σῆμα καὶ τριώβολον“ ἐνδεικνυμένων, ὡς ἄρα δεῖ τὴν γεωμετρίαν ἐκείνην μεταδιώκειν, ἥ καθ’ ἕκαστον θεώρημα βῆμα τίθησιν εἰς ἄνοδον καὶ ἀπαίρει τὴν ψυχὴν εἰς ὕψος, ἀλλ’ οὐκ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς καταβαίνειν ἀφίησιν καὶ τὴν σύννοικον τοῖς θνητοῖς χρεῖαν ἀποπληροῦν καὶ ταύτης στοχαζομένην τῆς ἐντεῦθεν περιαγωγῆς καταμελεῖν.

[FR85]

DEFINITIONES.

Def. I. Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν.

Ὅτι μὲν κατὰ τὴν ἀπὸ τῶν συνθετωτέρων ἐπὶ τὰ ἀπλούστερα μετάβασιν ὁ γεωμέτρης ἀνέδραμεν, ἐκ μὲν τοῦ τριχῆ διεστῶτος εἰς τὴν τοῦτο περατοῦσαν ἐπιφάνειαν, ἐκ δὲ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ταύτης πέρας τὴν γραμμὴν, ἐκ δὲ τῆς γραμμῆς εἰς τὸ πάσης διαστάσεως καθαρεῦον σημεῖον, εἴρηται πολλάκις καὶ παντὶ καταφανές. ἐπειδὴ δὲ τὰ πέρατα ταῦτα πολλαχοῦ μὲν διὰ τὴν ἀπλότητα τῆς τῶν συνθέτων φύσεως εἶναι δοκεῖ σεμνότερα, πολλαχοῦ δὲ συμβεβηκόσιν ἔοικεν ἐν τοῖς ὑφ’ ἑαυτῶν περατουμένοις ἔχοντα τὴν ὑπαρξιν, διοριστέον τούτων ἑκάτερον, ἐν ποίοις γένεσι θεωρεῖται τῶν ὄντων. λέγω δὴ οὖν, ὅτι τὰ μὲν αἴτια καὶ ἐν χωριστοῖς ὑφ’ ἑαυτῶν περατουμένοις λόγοις καὶ εἴδεσιν αὐτοῖς ὑφ’ ἑαυτῶν ἰδρυμένοις αἰετὴν τῶν ἀπλουστέρων ὑπόστασιν ἀρχικωτέραν προεστήσατο τῶν συνθετωτέρων καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἐν τῷ νῶ καὶ ἐν τοῖς μέσοις διακόσμοις καὶ τοῖς ψυχικοῖς καὶ ἐν αὐταῖς ταῖς φύσεσι προσεχῶς ἐμπνεύσαις τὰ σώματα τῶν περατουμένων τὰ περατοῦντα κατ’ οὐσίαν ὑπερφέρει, καὶ ἐστιν ἀμερέστερα καὶ ἐνοειδέστερα καὶ ἀρχικώτερα· τὸ γὰρ ἐν ἐν τοῖς αἴτοις εἴδεσιν τοῦ πλήθους καὶ τὸ ἀμέριστον τοῦ πάντη προϊόντος καὶ τὸ ἀφορίζον τοῦ δεχομένου τὸν ὅρον ἀπ’ ἄλλου τελειότερον. τὰ δ’ αὖ ὕλης δεόμενα καὶ ἐν ἄλλοις ἐδραζόμενα καὶ τῆς ἑαυτῶν οὐσίας ἐκστάντα καὶ σκιδνάμενα περὶ τὰ ὑποκείμενα καὶ τὴν ἔνωσιν ἐπέισακτον ἔχοντα τοὺς συνθετωτέρους λόγους ἔλαχεν τῶν ἀπλουστέρων. κατὰ τοῦτο τὰ ἐν φαντασίᾳ καὶ τῇ ὕλῃ τῶν φανταστῶν σχημάτων ἰνδαλλόμενα καὶ τὰ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ὑπὸ τῆς φύσεως ἀπογεννώμενα προηγουμένους ἔχει τοὺς τῶν περατουμένων λόγους, ἐπομένους δὲ τοὺς τῶν περατούντων καὶ οἷον ἐπεισοδιώδεις. ἵνα γὰρ τὸ τριχῆ διαστὰν μὴ εἰς ἄπειρον ἐκταθῇ μέγεθος ἢ κατὰ τὴν νόησιν ἢ κατὰ τὴν αἴσθησιν, δι’ ἐπιφανείας πανταχόθεν ἐπερατώθη, καὶ ἵνα μὴ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἀοριστίαν λάθῃ προελθόν, ἡ γραμμὴ περιέλαβεν αὐτὸ καὶ ὥρισεν ἐν αὐτῷ γενομένη, καὶ τὸ σημεῖον ὡσαύτως τὴν γραμμὴν τῶν συνθέτων ἔνεκα τῶν ἀπλῶν ὑπισταμένων. καὶ γὰρ αὖ καὶ τοῦτο δῆλον, ὅτι ἐν μὲν τοῖς χωριστοῖς εἴδεσιν οἱ λόγοι τῶν περάτων ἐν ἑαυτοῖς εἰσιν καὶ οὐκ ἐν τοῖς περατουμένοις, καὶ μένοντες,

[FR86]

οἷπερ εἰσὶν, ὑποστατικοὶ γίνονται τῶν δευτέρων, ἐν δὲ τοῖς ἀχωρίστοις ὕλης ἐπιδεδώκασιν ἑαυτοὺς τοῖς περατουμένοις καὶ ἐν ἐκείνοις ἰδρύνθησαν καὶ οἷον μέρη γεγόνασιν ἐκείνων καὶ ἀνεπλήσθησαν τῶν χειρόνων, ὅθεν δὴ καὶ τὸ ἀμερὲς ἐνταῦθα τῆς μεριστῆς οὐσίας καὶ τὸ ἀπλατὲς πλάτους μετέσχευεν καὶ τῇ ἑαυτῶν ἀπλότητα καὶ τὸ εἰλικρινὲς οὐκ ἔτι τὰ περατοῦντα φυλάττει δεδύνηται. γενόμενα γὰρ ἐν ἄλλῳ συνηλλοίωται τῷ ὑποκειμένῳ. ἡ γὰρ ὕλη τὴν τούτων ἐπεθόλωσεν ἀκρίβειαν καὶ ὁ μὲν τοῦ ἐπιπέδου λόγος βαθύνει τὸ ἐπίπεδον, ὁ δὲ τῆς γραμμῆς ἀμυδρώσας τὴν ἐφ' ἐν διάστασιν πάντῃ γίνεται μεριστός, ὁ δὲ τοῦ σημείου σωματοειδὴς ἀποτελεῖται καὶ συνδίδασται τοῖς ὑφ' ἑαυτοῦ περαστουμένοις. πάντες γὰρ εἰς ὕλην ῥέυσαντες, οἱ μὲν ἀπὸ διανοίας εἰς τὴν νοητὴν οἱ δὲ ἀπὸ τῆς φύσεως εἰς τὴν αἰσθητὴν, ἀνεπλήσθησαν τῶν ὑποκειμένων καὶ τῆς αὐτῶν ἀπλότητος ἐξέστησαν εἰς ἀλλοτρίας συνθέσεις τε καὶ διαστάσεις. ἀλλὰ πῶς ἐν τῷ νῶ καὶ ἐν τῇ ψυχῇ πάντων ἀμερῶς ὄντων καὶ ἀδιαστάτως ἐν τῇ ὕλῃ τὰ μὲν προηγούμενως ἐμερίσθη τὰ δὲ διὰ τὴν ἐκείνης φύσιν; ἢ καὶ τοῖς αὐτοῖς εἶδεσι τάξις ἐστὶ πρώτων τε καὶ μέσων καὶ τελευταίων, καὶ τὰ μὲν ἐνοειδέστερα τῶν εἰδῶν ἐστὶ, τὰ δὲ πληθύνεται μᾶλλον, καὶ τὰ μὲν συνεσπειραμένας ἔχει τὰς ἑαυτῶν δυνάμεις, τὰ δὲ εἰς διάστασιν σπευδούσας, καὶ τὰ μὲν πρὸς τοῦ πέρατός ἐστι, τὰ δὲ πρὸς τῆς ἀπειρίας; εἰ γὰρ καὶ πάντα μετέχει τῶν δύο τούτων ἀρχῶν, ἀλλὰ τὰ μὲν τῆς ἐτέρας ἐστὶν ἔκγονα καὶ πλέον ταύτης μετείληχεν, τὰ δὲ τῆς λοιπῆς. τὸ μὲν οὖν σημεῖον ἀμερὲς ἐκεῖ πάντῃ, εἰ καὶ κατὰ τὸ πέρας ὑφέστηκεν, ἔχει δὲ τὴν ἄπειρον δύναμιν κρυφίως, καθ' ἣν καὶ γεννᾷ πάντα τὰ διαστήματα. καὶ ἡ πρόοδος τῶν διαστημάτων πάντων οὐκ ἐξελίττει τὴν ἄπειρον ἐκείνου δύναμιν, τὸ δὲ σῶμα καὶ ὁ τοῦ σώματος λόγος τῆς ἀπείρου μειζόνως μετέχει φύσεως, διὸ καὶ τῶν ἀλλαχόθεν περατουμένων ἐστὶν καὶ τῶν ἐπ' ἄπειρον διαιρετῶν κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις. τὰ δ' αὖ μεταξὺ τούτων κατὰ τὴν τῶν ἄκρων ἀπόστασιν ἢ τῶν κατὰ τὸ πέρας ἐστὶ πλεοναζόντων ἢ τῶν τῆς ἀπειρίας ἀπολελαυκότων. διὸ καὶ περατοῖ καὶ περατοῦται, καθ' ὅσον μὲν ἐκ τοῦ πέρατος ὑφέστηκεν ἄλλα δυνάμενα περατοῦν, καθ' ὅσον δ' αὖ μετέχει τῆς ἀπειρίας ὀρίζεσθαι παρ' ἄλλων δεόμενα. πέρας οὖν καὶ τὸ σημεῖον ὑπάρχον ἐν τῇ μεθέξει τὴν οἰκείαν διαφυλάττει δύναμιν, ἔχον δὲ τὴν ἀπειρίαν κρυφίως καὶ πανταχοῦ παρῆναι τοῖς ὑφ' ἑαυτοῦ περατουμένοις ἐπαιγόμενον ἀπειραχῶς ἐστὶν ἐν αὐτοῖς, καὶ ἐπεὶ δυνάμεις ἦν ἐκεῖ τὸ ἄπειρον γεννητικὴ τῶν διαστατῶν, δυνάμει γέγονεν ἐν τοῖς μετέχουσιν. καὶ γὰρ ἡ ἀπειρία παρ' ἐκείνοις μὲν, τοῖς νοητοῖς λέγω, πρωτουργὸς ἦν αἰτία καὶ γόνιμος τῶν ὅλων δυνάμεις, ἐν δὲ τοῖς ἐνύλοις ἀτελὴς καὶ δυνάμει μόνον οὔσα τὰ πάντα. καὶ ὥς συνελόντι φάναι τὰ δι' ἀπλότητα καὶ ἀμέρειαν ἐν ταῖς ἀρχαῖς ὑπερισχυμένα τῶν εἰδῶν ἐν ταῖς μεθέξεσι φυλάττει μὲν ὥς πέφυκε τὴν ἑαυτῶν ιδιότητα, καταδεέστερα δὲ τῶν συνηθεωτέρων γενόμενα λόγων. καὶ γὰρ ἡ ὕλη τούτων τρανέστερον μετέχειν δύναται καὶ πρὸς ταῦτα μᾶλλον ἢ πρὸς ἀπλουστάτας τῶν ὄντων αἰτίας παρεσκευάσται. διὸ τῶν μὲν ἐξηρημένων ἀρχῶν ἵχνη κάτεισιν εἰς αὐτήν, τῶν δὲ δευτέρων καὶ τρίτων αἱ μεταδόσεις ἐναργέστεραι προφαίνονται. μᾶλλον οὖν μετέσχε τῆς τοῦ σώματος αἰτίας ἢ τῆς τοῦ ἐπιπέδου,

[FR87]

[FR88]

[FR89]

καὶ ταύτης μᾶλλον ἢ τοῦ εἶδους τῆς γραμμῆς, καὶ τούτου μειζόνως ἢ τοῦ πάντα περατοῦντος ταῦτα σημεῖον καὶ συνέχοντος. ὁ γὰρ τοῦ σημείου λόγος πάσης ταύτης ἐξηγεῖται τῆς σειρᾶς καὶ πάντα ἐνοῖ τὰ μεριστὰ καὶ συνέχει καὶ ὀρίζει τὰς προόδους αὐτῶν καὶ παράγει πάντα καὶ περιλαμβάνει παναχόθεν. διὸ καὶ ἐν ταῖς εἰκόσιν ἄλλα μὲν ἄλλων πέρατα, πάντων δὲ τὸ σημεῖον. ὅτι δὲ οὐ δεῖ νομίζειν κατ' ἐπίνοιαν ψιλὴν ὑφessestάναι τὰ τοιαῦτα πέρατα, λέγω τῶν σωμάτων, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ὑπέλαβον, ἀλλ' εἶναί τινες φύσεις ἐν τοῖς οὖσι τοιάσδε καὶ λόγους αὐτῶν προεστάναι δημιουργικούς, ἀναμνησθεῖμεν ἂν εἰς τὸν ὅλον κόσμον ἀποβλέψαντες καὶ τὰς ἐν αὐτῷ περιφορὰς καὶ τὰ κέντρα τῶν περιφορῶν καὶ τοὺς δι' ὅλων αὐτῶν διήκοντας ἄξονας. τὰ τε γὰρ κέντρα κατ' ἐνέργειαν ὑφέστηκε συνεκτικὰ τῶν σφαιρῶν ὑπάρχοντα καὶ ἐνίζοντα τὰς διαστάσεις αὐτῶν καὶ σφίγγοντα τὰς δυνάμεις τὰς ἐν αὐταῖς καὶ συνερείδοντα πρὸς ἑαυτά, καὶ οἱ ἄξονες συνελίσσουσιν αὐτὰς καὶ περιάγουσιν, αὐτοὶ μονίμως ἡδρασμένοι, καὶ περὶ ἑαυτοὺς ἀνακυκλοῦσιν. καὶ μὴν καὶ οἱ πόλοι τῶν σφαιρῶν καὶ αὐτοὺς τοὺς ἄξονας ἀφορίζοντες καὶ τὰς ὅλας περιφορὰς ἀφ' ἑαυτῶν συνέχοντες πῶς οὐχὶ δηλοῦσιν ἐναργῶς, ὅτι τὰ σημεῖα δημιουργικὰς ἔχει καὶ συνεκτικὰς δυνάμεις καὶ τελειωτικὰς τῶν διεστώτων πάντων ἐνώσεώς τε χορηγούς καὶ τῆς ἀναύστου κινήσεως; ὅθεν δὲ καὶ ὁ Πλάτων ἀδαμαντίνην αὐτῶν τὴν ὑπόστασιν εἶναί φησιν, τὸ ἄτρεπτον καὶ διαιωνίζον καὶ μόνομον καὶ ὡσαύτως ἔχον τῆς οὐσίας αὐτῶν ἐνδεικνύμενος. τὸν τε ἄτραχτον ὅλον περὶ αὐτὰ κινεῖσθαι φησιν καὶ περιχορεύειν αὐτῶν τὴν ἔνωσιν. ἄλλοι δὲ ἀπορρητότεροι λόγοι καὶ τὸν δημιουργὸν ἐφεστάναι τῷ κόσμῳ λέγουσιν τοῖς πόλοις ἐποχούμενον καὶ δι' ἔρωτος θεοῦ τὸ πᾶν ἐπιστρέφοντα πρὸς ἑαυτόν. οἱ δὲ γε Πυθαγόρειοι τὸν μὲν πόλον σφραγίδα τῆς Ῥέας ἀποκαλεῖν ἡξίουσαν ὡς τῆς ζωογόνου θεότητος ἄρρητον καὶ δραστήριον δύναμιν εἰς τὸ πᾶν διὰ τούτου προιεμένης, τὸ δὲ κέντρον Ζανὸς φυλακὴν, διότι δημιουργικὴν φρουρὰν ὁ Ζεὺς τοῖς κόλποις ἐντιθεὶς τοῦ κόσμου περὶ τὸ μέσον αὐτὴν σταθερῶς ἡδρασεν. τοῦ γὰρ κέντρου μένοντος καὶ τὸ πᾶν ἀσάλευτον ἔχει τὴν διακόσμησιν καὶ ἄπαυστον τὴν περιφορὰν, καὶ μένει πάντα φυλάττοντα τὴν ἑαυτῶν τάξιν ἀμετάστατον, οἱ τε πολοκράτορες θεοὶ συναγωγὸν τῶν διηρημένων καὶ ἐνοποιὸν τῶν πεπληθυσμένων κεκλήρωται δύναμιν, καὶ οἱ τοὺς ἄξονας λαχόντες συνελάνουσι τὰς περιφορὰς καὶ διαιωνίως ἀνακυκλοῦσι. καὶ εἰ με δεῖ τοῦμόν εἰπεῖν, τὰ μὲν κέντρα πασῶν τῶν σφαιρῶν καὶ οἱ πόλοι σύμβολα τῶν ἰυγγικῶν εἰσι θεῶν τὸ ἄγνωστον ἐκείνων καὶ ἐνωτικὸν ἀπεικονισμένοι σύνθημα, οἱ δὲ ἄξονες τὰς συνοχὰς τῶν ὅλων διακόσμων ἀποτυποῦνται καὶ αὐτοὶ συνεκτικοὶ τῶν ἐγκοσμίων εἰσιν ὁλοτήτων καὶ τῶν περιόδων, ὥσπερ ἐκεῖνα τῶν νοερῶν, αὐταὶ δὲ αἱ σφαῖραι τῶν τελεσιουργῶν θεῶν εἰκόνες εἰσὶν ἀρχὴν τέλει συνάπτουσαι καὶ πάντων σχημάτων ἀπλότητι καὶ ὁμοιότητι καὶ τελειότητι διαφέρουσαι.

[FR90]

[FR91]

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ πλέον προηγάγομεν εἰς ἐνδειξιν τῆς τῶν ἡμερῶν καὶ ὅλως τῶν ἐν τῷ κόσμῳ περάτων δυνάμεως, καὶ ὅτι ταῦτα καθόσον εἰκόνα φέρει τῶν πρώτων καὶ ἀρχικωτάτων αἰτίων μεγίστην ἐν τῷ παντὶ κεκλήρωται τάξιν. οὐ

γὰρ τοιαῦτα πέρατά ἐστιν τὰ κέντρα καὶ οἱ πόλοι, οἷα τὰ τῶν περατουμένων ἀλλὰ κατ' ἐνέργειαν ἱδρύται καὶ ὑπαρξιν ἔχει καὶ δύναμιν αὐτοτελεῇ καὶ διήκουσαν διὰ πάντων τῶν μεριστῶν. οἱ δὲ πολλοὶ τὰ ἐν τοῖς περατουμένοις αὐτοῖς ἀτελῶς ὑπεστηκότα θεωροῦντες ἀμυδρὰν αὐτῶν οἶονται τὴν ὑπόστασιν εἶναι καὶ οἱ μὲν κατ' ἐπίνοιαν μόνην χωρίζεσθαι φασιν αὐτὰ τῶν αἰσθητῶν, οἱ δὲ μὴδὲ ἀλλοχοῦ που τὴν οὐσίαν ἔχειν ἢ ἐν ταῖς ἡμετέραις ἐπινοίαις. ἐπεὶ δὲ ἔστι μὲν καὶ ἐν τῇ νοεῖ φύσει τὰ εἶδη τούτων πάντων, ἔστι δὲ καὶ ἐν τοῖς ψυχικοῖς διακόσμοις, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ φύσει καὶ ἐν τοῖς σώμασιν ἐσχάτως, νοήσωμαν, ὅπως κατὰ τὴν ἐν αὐτοῖς τάξιν καὶ τὴν ὑπόστασιν ἔλαχεν ἐν τοῖς γένεσιν τῶν ὄντων. καὶ πάντα μὲν ἐν νῷ προυφέστηκεν, ἀλλ' ἀμερίστως καὶ ἐνοειδῶς, ὥστε πάντα καθ' ἐν εἶδος ὑφεστάναι κατὰ τὸν τοῦ σημείου λόγον κρυφίως ἔχοντα καὶ ἀμερῶς [πάντα] — πάντα δὲ ἐν ταῖς ψυχαῖς, ἀλλὰ κατὰ τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος ἐκ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν περιφερῶν γραμμῶν ὑπεστήσατο τὴν ψυχὴν· καὶ γὰρ τῶν κύκλων ἕκαστος γραμμὴ ἐστὶ μόνον — πάντα δὲ ἐν ταῖς φύσεσιν, ἀλλὰ κατὰ τὸν τοῦ ἐπιπέδου λόγον. διὸ καὶ ὁ Πλάτων τοὺς φυσικοὺς λόγους τοὺς ὑποστατικοὺς τῶν σωμάτων διὰ τῶν ἐπιπέδων ἡξίου δηλοῦν, καὶ ἡ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ἐπίπεδα ἀνάλυσις ἐπὶ τὴν αἰτίαν ἡμᾶς περιῆγε τὴν προσεχῆ τῶν φαινομένων — πάντα μὲν καὶ ἐν τοῖς σώμασιν, ἀλλὰ σωματοειδῶς κατὰ τὴν μεριστὴν φύσιν τῶν σωμάτων, πάντων ἐν αὐτοῖς ὑφεστώτων τῶν εἰδῶν. πάντα ἄρα πανταχοῦ καὶ ἕκαστα κατὰ τὴν οἰκεῖαν τάξιν ἐκφαίνεται καὶ ἡ ἐξαλλαγὴ παρὰ τὴν ἐπικρατοῦσαν δύναμιν, καὶ πανταχοῦ μὲν τὸ σημεῖον ἀμερές καὶ τῶν μεριστῶν διαφέρει ἀπλότητι, κατὰ δὲ τὴν ὑφείκει τῶν ὄντων καὶ τοῦτο τὴν ἐξηρημένην ἔλαχεν τῶν μεριστῶν ὑπόστασιν καὶ ὅπου μὲν παντελῶς αὐτῶν ὑπερίδρυται κατὰ τὴν τῆς αἰτίας ὑπεροχὴν, ὅπου δὲ συντέτακται αὐτοῖς, ὅπου δὲ ἐπεισοδιώδη τὴν ὑπαρξιν ἐν αὐτοῖς ἐκλήρωσατο καὶ οἷον καταπινόμενον ὑπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν ἐσχάτων ἐκλύει τὴν οἰκεῖαν ἀμέρειαν. καθάπερ οὖν ἡ μονὰς ἄλλη μὲν ἢ γεννητικὴ τῶν ἀριθμῶν, ἄλλη δὲ ὡς ὕλη τοῖς ἀριθμοῖς ὑπεστρωμένη, καὶ ἀρχὴ μὲν ἑκατέρω καὶ οὐχ ὅπερ ἀριθμὸς, ἄλλον δὲ τρόπον ἀρχὴ καὶ ἄλλον — κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ σημεῖον οὐ μὲν ὑποστατικόν ἐστὶ τῶν μεγεθῶν, οὐ δὲ ἄλλως ἀρχὴ καὶ οὐ κατὰ τὴν γεννητικὴν αἰτίαν.

[FR92]

[FR93]

Ἄρ' οὖν τὸ σημεῖον μόνον ἀμερές; ἢ καὶ τὸ νῦν τοιοῦτον ἐν χρόνῳ καὶ ἡ μονὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς; ἢ τῷ μὲν φιλοσόφῳ περὶ πάντων ποιουμένῳ τῶν ὄντων λόγους πάντα μὲν τὰ ὅπως οὖν μεριστὰ προσήκει θεωρεῖν, πάσας δὲ τὰς τῶν ἀμερῶν ὑποστάσεις τὰς τούτων ἀρχικάς, τῷ δὲ τῶν καθ' ἕκαστα ἐπιστήμονι ἀπὸ τινων ὠρισμένων ἀρχῶν προσάγοντι τὴν θεωρίαν καὶ μέχρις ἐκεῖνων ἀνατρέχοντι, τὰς δὲ προόδους τῶν ὄντων οὐ περιεργαζομένῳ, ταύτην μόνην ἐπιβάλλει καὶ σκοπεῖν καὶ παραδιδόναι τὴν ἀμερῇ φύσιν; ἢ ταῖς αὐτοῦ διαφέρει πρωτίσταις ἀρχαῖς καὶ ταύτην ὁρᾷ τὴν ἀπλότητα τὴν τῶν ὑποκειμένων αὐτῷ γνωστῶν ἐξηγουμένην; μόνον οὖν τὸ σημεῖον ἀμερές κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ὕλην καὶ ἡ μονὰς κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν, καὶ ὁ τοῦ σημείου λόγος, εἰ καὶ πρὸς ἄλλον ἀτελής, ἀλλὰ πρὸς γε τὴν παροῦσαν ἐπιστήμην τέλειος, ἐπεὶ

καὶ ὁ ἰατρὸς στοιχεῖα τῶν σωμάτων πῦρ καὶ ὕδωρ λέγει καὶ τὰ τούτοις ὅμοια. καὶ ἡ ἀνάλυσις αὐτῶν μέχρι τούτων. ἀλλ' ὁ γε φυσικὸς ἐπ' ἄλλα μέτεισι τὰ τούτων ἀπλούστερα καὶ ὁ μὲν ὀρίζεται στοιχεῖον τὸ πρὸς αἰσθησιν ἀπλοῦν ὁ δὲ τὸ πρὸς τὸν λόγον ἀπλοῦν, καὶ ἑκάτερος ὀρθῶς πρὸς γε τὴν οἰκεῖαν ἐπιστήμην. μὴ τοίνυν μηδὲ τὸν ὅρον τοῦ σημείου διημαρτῆσθαι νομίζωμεν μηδὲ ἀτελῆ θώμεθα αὐτὸν εἶναι. πρὸς γὰρ τὴν γεωμετρικὴν ὕλην καὶ κὰς ἀρχὰς τὰς ταύτης ἱκανῶς ἀποδέδοται. μόνον γὰρ οὐχὶ λέγει σαφῶς, ὅτι τὸ ἀμερές κατ' ἐμὲ σημεῖον ἐστὶ καὶ ἡ ἐμὴ ἀρχή, καὶ τὸ ἀπλούστατον οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν ἢ τοῦτο, καὶ οὕτω προσήκει τοῦ γεωμέτρου λέγοντος ἀκούειν.

[FR94]

Ὁ μὲν οὖν **Εὐκλείδης** διὰ τῆς ἀποφάσεως τῶν μεριστῶν ἐσήμηνεν ἡμῖν τὴν ἀρχὴν πάσης τῆς ὑποκειμένης αὐτῷ φύσεως εἰς θεωρίαν. καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς, ὥς ὁ Παρμενίδης ἡμᾶς ἀναδιδάσκει τὴν τε πρωτίστην αἰτίαν καὶ τὴν ἐσχάτην διὰ μόνων τῶν ἀποφάσεων παραδούς. πᾶσα γὰρ ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς καθ' ἑτέραν οὐσίαν ὑφέστηκεν καὶ αἱ τούτων ἀποφάσεις τὴν ἐκείνης ἡμῖν δηλοῦσιν ἰδιότητα. τὸ γὰρ αἷτιον μὲν τούτων, οὐδὲν δὲ τούτων ὑπάρχον, ὣν αἷτιόν ἐστι, γινώριμον πῶς γίνεται διὰ τοῦ τρόπου τούτου τῆς διδασκαλίας.

Ἴσως δ' ἂν τις ἀπορήσειεν, πῶς πάντα μορφωτικῶς καὶ μεριστῶς τῆς φαντασίας δεχομένης ἀμερές τι σημεῖον ὁ γεωμέτρης ἐν αὐτῇ θεωρεῖ. μὴ γὰρ ὅτι τοὺς ἐν διανοίᾳ λόγους, ἀλλὰ καὶ τὰς τῶν νοερῶν καὶ θείων εἰδῶν ἐμφάσεις ἢ φαντασία κατὰ τὴν οἰκεῖαν δέχεται φύσιν, τῶν μὲν ἀμόρφων μορφὰς τῶν δὲ ἀσχηματίστων σχήματα προτείνουσα. πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπορίαν λέγομεν, ὅτι τῆς φανταστικῆς κινήσεως τὸ εἶδος οὔτε μεριστόν ἐστὶ μόνον οὔτε ἀμέριστον, ἀλλ' ἐκ τοῦ ἀμερίστου πρόεισιν εἰς τὸ μεριστόν καὶ ἐκ τοῦ ἀμόρφου εἰς τὸ μεμορφωμένον. εἴτε γὰρ μεριστὴ μόνον ἦν, οὐκ ἂν τοὺς πολλοὺς τύπους τῶν εἰδῶν ἐν ἑαυτῇ σώζειν ἡδύνατο τῶν ἐπεισιόντων ἀμυδρούντων τοὺς πρὸ αὐτῶν, καθότι τῶν σωμάτων οὐδὲν ἅμα καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ πολλοῖς κατέχεται σχήμασιν, ἀλλὰ διὰ τῶν δευτέρων ἀφανίζεται τὰ πρότερα, εἴτε ἀμέριστος, τῆς διανοίας οὐκ ἂν ἦν καταδεεστέρα καὶ τῆς ἐν ἀμερεῖ πάντα θεωρούσης ψυχῆς, οὐδ' ἂν μορφωτικὰς ἐποιεῖτο τὰς ἐνεργείας. ἀνάγκη δὴ οὖν αὐτὴν ἀρχεσθαι μὲν ἐκ τοῦ ἀμεροῦς κατὰ τὴν κίνησιν καὶ προβάλλειν ἐκεῖθεν τὸ συνεσπειραμένον εἶδος ἐκάστου τῶν εἰς αὐτὴν ἡκόντων γνωστῶν, ἀπολήγειν δὲ εἰς μορφὴν καὶ σχῆμα καὶ διάστασιν. εἰ τοίνυν τοιαύτην ἔλαχεν φύσιν, ἔστι πως ἐν αὐτῇ καὶ τὸ ἀμέριστον, καὶ κατ' ἐκεῖνο τὴν οὐσίαν ἔχει μάλιστα τὸ σημεῖον λεκτέον. καὶ γὰρ τοῦ γραμμῆς εἶδος κατ' ἐκεῖνο συνηρημένως ἐστὶν ἐν αὐτῇ. διττὴν οὖν συνέχουσα δύναμιν, ἀμέριστον καὶ μεριστήν, ἔχει καὶ τὸ σημεῖον ἀμερῶς καὶ τὰ διαστήματα μεριστῶς.

[FR95]

Ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ **Πυθαγόρειοι** τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, σκεπτέον τί ποτε νοοῦντες λέγουσιν. ὅτι μὲν οὖν οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεγεθῶν αὐλότεροι καὶ καθαρώτεροι, καὶ ὅτι τῶν ἀριθμῶν ἡ ἀρχὴ τῆς τῶν μεγεθῶν ἐστὶν ἀπλουστέρα, παντὶ καταφανές. ἀλλ' ὅταν λέγωσι τὴν μὲν μονάδα θέσιν ἔχουσαν, ἐνδείκνυσθαι μοι δοκοῦσιν, ὥς ἄρα ἡ μὲν μονὰς καὶ ὁ ἀριθμὸς ἐν

[FR96]

δόξη τὴν ὑπόστασιν κέκτηται, λέγω δὲ τὸν μοναδικὸν ἀριθμὸν. διὸ καὶ τῶν ἀριθμῶν ἕκαστος εἷς ἐστίν, οἷον ὁ πέντε καὶ ὁ ἐπτά, καὶ οὐ πολλοὶ καθ' ἑκάστην ψυχὴν, καὶ σχήματος καὶ μορφῆς ἐπεισοδιώδους καθαρεύουσι. τὸ δὲ σημεῖον ἐν φαντασίᾳ προτείνεται καὶ οἷον ἐν τόπῳ γέγονεν, καὶ ἔνυλόν ἐστι κατὰ τὴν νοητὴν ὕλην. ἄθετος οὖν ἡ μονὰς ὡς ἄυλος καὶ παντὸς ἔξω διαστήματος καὶ τόπου. θέσιν δὲ ἔχει τὸ σημεῖον ὡς ἐν τοῖς φαντασίαις κόλποις ἰνδαλλόμενον καὶ ἔνυλον. διὰ δὲ τὴν κοινωνίαν τῶν ἀρχῶν καὶ ἡ μονὰς στιγμῆς ἀπλουστέρα. κατὰ γὰρ τὴν θέσιν ἐπλεόνασεν ἡ στιγμή τῆς μονάδος, αἱ δὲ προσθέσεις ἐν τοῖς ἀσωμάτοις ὑφέσεις ἀποτελοῦσι τῶν τὰς προσθήκας δεχομένων.

Def. II. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

Δευτέραν ἔχει τὴν τάξιν ἡ γραμμὴ, καθόσον το πρῶτιστόν ἐστι διάστημα καὶ ἀπλούστατον, ὅπερ ὁ γεωμέτρης μῆκος ἐκάλεσε προσθεῖς τὸ ἀπλατές, ἐπειδὴ καὶ ἡ γραμμὴ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἀρχῆς ἔχει λόγον· τὸ μὲν γὰρ σημεῖον ὡς πάντων ἀρχὴν τῶν μεγεθῶν διὰ μόνης τῆς ἀποφάσεως ἐδίδαξεν, τὴν δὲ γραμμὴν τῇ μὲν καταφατικῶς, τῇ δὲ ἀποφατικῶς. ἐστὶ μὲν γὰρ μῆκος, καὶ τούτῳ τῆς τοῦ σημείου πλεονάζει ἀμερείας, ἀμλατῆς δὲ ὡς τῶν ἄλλων καθαρεύουσα διαστάσεων. πᾶν γὰρ δὴ τὸ ἀπλατές καὶ ἀβαθές ἐστίν, οὐ μὴν ἀνάπαλιν. ἀφελὼν οὖν τὸ πλάτος ἔχει καὶ τὸ βάθος συνανηρημένον, διόπερ οὐδὲ προσέθηκεν, ὅτι καὶ ἀβαθές, ὡς ἐπόμενον τῇ τοῦ ἀμλατοῦς ἐννοίᾳ.

[FR97]

Ἀφορίζονται δὲ αὐτὴν καὶ κατ' ἄλλας μεθόδους, οἱ μὲν ῥύσιν σημείου λέγοντες, οἱ δὲ μέγεθος ἐφ' ἐν διαστατόν. ἀλλ' οὗτος μὲν ὁ ὅρος τέλειός ἐστιν τὴν οὐσίαν σημαίνων τῆς γραμμῆς, ὁ δὲ σημείου ῥύσιν εἰπὼν ἔοικεν ἀπὸ τῆς αἰτίας αὐτὴν τῆς γεννητικῆς δηλοῦν καὶ οὐ πᾶσαν γραμμὴν ἀλλὰ τὴν ἄυλον παρίστησι· ταύτην γὰρ ὑφίστησι τὸ σημεῖον ἀμερὲς ὑπάρχον, ὑπάρξεως δὲ τοῖς μεριστοῖς αἴτιον ὄν. ἡ δὲ ῥύσις τὴν πρόοδον ἐνδείκνυται καὶ τὴν γόνιμον δύναμιν, τὴν ἐπὶ πᾶσαν διάστασιν φθάνουσαν καὶ οὐκ ἐλαττουμένην, τὴν αὐτὴν μὲν ἐστῶσαν, πᾶσι δὲ τοῖς μεριστοῖς τὴν οὐσίαν παρεχομένην.

Ἀλλὰ ταῦτα μὲν γνώριμα παντί, ἀναμνήσωμεν δὲ ἡμᾶς αὐτοὺς τῶν Πυθαγορικωτέρων λόγων, οἱ τὸ μὲν σημεῖον ἀνάλογον τίθενται μονάδι, τὴν δὲ γραμμὴν δυάδι, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῇ τριάδι καὶ τὸ στερεὸν τῇ τετράδι. καίτοι γε ὡς διαστατὰ λαμβάνοντες μοναδικὴν μὲν εὐρήσομεν τὴν γραμμὴν, δυαδικὴν δὲ τὴν ἐπιφάνειαν, τριαδικὸν δὲ τὸ στερεόν, ὅθεν καὶ ὁ Ἀριστοτέλης τὸ σῶμα τῇ τριάδι φησὶν τετελειῶσθαι. καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν τὸ μὲν σημεῖον διὰ τὴν ἀμέρειαν πρῶτως οἰκειῶσθαι τῇ μονάδι, τὰ δὲ μετὰ τὸ σημεῖον ὑφεστάναι μὲν κατὰ τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὺς καὶ τούτων σώζειν τὸν λόγον πρὸς τὸ σημεῖον, ὃν ἐκεῖνοι πρὸς τὴν μονάδα, μετέχειν δὲ ἕκαστον τοῦ προσεχῶς ὑπὲρ αὐτόν, καὶ ταύτην ἔχειν τὴν ἀξίαν πρὸς τὸ ἐγγὺς καὶ τὸ ἐφεξῆς, ἣν ἐκεῖνο πρὸς ἑαυτό· λέγω δὲ οἷον τὴν γραμμὴν δυάδος μὲν ἔχειν τάξιν πρὸς τὸ σημεῖον, μονάδος δὲ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ταύτην τριάδος μὲν πρὸς τὸ σημεῖον καὶ τὴν γραμμὴν,

[FR98]

δυάδος δὲ πρὸς τὸ στερεόν, καὶ διὰ τοῦτο τὸ σῶμα πρὸς μὲν τὸ σημεῖον εἶναι τετραδικόν, πρὸς δὲ τὴν γραμμὴν τριαδικόν. ἔχει μὲν οὖν ἡ διάστασις ἑκατέρω λόγον, ἀρχοειδεστέρα δὲ ἡ τῶν **Πυθαγορείων**, ἄνωθεν ὠρμημένη καὶ τῇ φύσει τῶν ὄντων ἐπομένη. τὸ μὲν γὰρ σημεῖον διττόν· ἡ γὰρ καθ' αὐτό ἐστὶν ἡ ἐν τῇ γραμμῇ, καὶ ὡς πέρας ὃν μόνον καὶ ἐν οὔτε ὅλον οὔτε μέρη ἔχον μιμεῖται τὴν ἀκρότητα τῶν ὄντων καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἀνάλογον τέτακται τῇ μονάδι. καὶ γὰρ ἡ μονὰς ἐκεῖ πρῶτον, ὅπου πατρικὴ μονὰς ἐστὶ, φησὶ τὸ λόγιον. ἡ δὲ γραμμὴ πρώτη μὲν ἔχουσα μέρη καὶ ὅλον, οὔσα δὲ καὶ μοναδικὴ διὰ τὸ ἐφ' ἐν διαστατόν, καὶ δυαδικὴ διὰ τὴν πρόοδον — εἴτε γὰρ ἄπειρος, μετέχει τῆς ἀορίστου δυάδος, εἴτε πεπερασμένη, δυοῖν αὐτῇ δεῖ περάτων, καὶ τὸ πόθεν ποῖ πρὸς τὸν ἀπ' αὐτῆς [?] — διὰ ταῦτα τοίνυν τὴν ὁλότητα μιμεῖται καὶ τὴν ταξιν ἐκείνην, ἡ καὶ ταναὴ μονὰς ἐστὶν καὶ δύο γεννᾷ. καὶ γὰρ αὕτη τὴν τε εἰς μῆκος ἔκτασιν προβέβληται καὶ τὸ ταναὸν διαστατῶς καὶ τὸ ἐφ' ἐν καὶ τὴν τῆς δυάδος μετουσίαν. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τριάς οὔσα καὶ δυὰς καὶ τῶν πρώτων σχημάτων ὑποδοχὴ καὶ μορφήν καὶ εἶδος λαβοῦσα πρώτη τῇ περατούσῃ μὲν τὰ ὄντα πρώτως καὶ τριαδικῇ φύσει, διαιρούσῃ δὲ αὐτὴν δυάδι πως προσέοικεν. τὸ δ' αὖ στερεὸν τριχῇ διαστάν καὶ κατὰ τὴν τετράδα τὴν τῶν λόγων πάντων περιληπτικὴν ἀφορισθὲν εἰς ἐκείνην ἀναφέρεται τὴν διακόσμησιν, ἀφ' ἧς καὶ ἡ τῶν σωματικῶν κόσμων ἐκφαίνεται διάκρισις καὶ ἡ εἰς τρία τῶν ὅλων διαίρεσις, μετὰ τῆς τετραδικῆς ιδιότητος, τοῦτο δὲ ἐστὶ μετὰ τῆς γεννητικῆς καὶ θηλυπρεποῦς.

[FR99]

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ πλεόν ἐξεργάζεσθαι δυνατόν. τὴν δ' αὖ γραμμὴν δευτέραν οὔσαν καὶ κατὰ τὴν πρώτην ἀπὸ τοῦ ἀμεροῦς κίνησιν ὑποστᾶσαν εἰκότως καὶ ὁ τῶν **Πυθαγορείων** λόγος ἐκάλει δυαδικήν. ὅτι δὲ καὶ τὸ σημεῖον μετὰ τὴν μονάδα καὶ ἡ γραμμὴ μετὰ τὴν δυάδα καὶ ἡ ἐπιφάνεια μετὰ τὴν τριάδα δηλοῖ που καὶ ὁ Παρμενίδης τοῦ ἐνὸς ἀποφάσκων τὰ πολλὰ πρῶτον, εἴτα τὸ ὅλον· εἰ δὲ τὰ πολλὰ πρὸ τοῦ ὅλου, καὶ ὁ ἀριθμὸς πρὸ τοῦ συνεχοῦς καὶ ἡ δυὰς πρὸ τῆς γραμμῆς καὶ ἡ μονὰς πρὸ τοῦ σημείου. καὶ γὰρ τὸ μὲν „οὐ πολλὰ“ τῇ μονάδι προσήκει τῇ γεννώσῃ τὸ πλῆθος ὑφιστάντι. καὶ γὰρ τοῦτο μέρος ἔχειν λέγεται.

[FR100]

Τοσαῦτα περὶ τῆς γραμμῆς εἰρήσθω κατὰ τὰς θεωρικωτέρας ἐπιβολάς. ἀποδεξώμεθα δὲ καὶ τοὺς περὶ **Ἀπολλώνιον** λέγοντας, ὅτι γραμμῆς ἐννοίαν μὲν ἔχομεν, ὅταν τὰ μήκη μόνον ἢ τῶν ὁδῶν ἢ τῶν τοίχων ἀναμετρεῖν κελεύωμεν· οὐ γὰρ προσποιούμεθα τότε τὸ πλάτος, ἀλλὰ τὴν ἐφ' ἐν διάστασιν ἀναλογιζόμεθα, καθάπερ δὴ καὶ ὅταν χωρία μετρῶμεν, τὴν ἐπιφάνειαν ὁρῶμεν, ὅταν δὲ φρέατα, τὸ στερεόν. πάσας γὰρ ὁμοῦ τὰς διαστάσεις συλλαβόντες ἀποφαινόμεθα τοσόνδε εἶναι τὸ διάστημα τοῦ φρέατος κατὰ τε μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος. αἰσθησιν δὲ αὐτῆς λάβοιμεν ἂν ἀπιδόντες εἰς τοὺς διορισμοὺς τῶν πεφωτισμένων τόπων ἀπὸ τῶν ἐσχιασμένων καὶ ἐπὶ τῆς σελήνης καὶ ἐπὶ τῆς γῆς. τοῦτο γὰρ τὸ μέσον κατὰ μὲν πλάτος ἀδιάστατόν ἐστὶ, μῆκος δὲ ἔχει τὸ συμπαρεκτεινόμενον τῷ φωτὶ καὶ τῇ σκιᾷ.

[FR101]

Def. III. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεία.

Πᾶν τὸ σύνθετον ἀπὸ τοῦ ἀπλοῦ καὶ πᾶν τὸ μεριστὸν ἀπὸ τοῦ ἀμερίστου καταδέχεται τὸν ὅρον. καὶ τούτων εἰκόνες ἐν ταῖς ἀρχαῖς προτείνονται τῶν μαθημάτων. ὅταν γὰρ καὶ τὴν γραμμὴν ὑπὸ τῶν σημείων περατοῦσθαι λέγῃ, δῆλός ἐστιν αὐτὴν καθ' αὐτὴν ἄπειρον ποιῶν, ὡς ἂν διὰ τὴν οἰκείαν πρόοδον οὐκ ἔχουσιν πέρας. ὥσπερ οὖν ἡ δυὰς ἀπὸ τῆς μονάδος ὀρίζεται καὶ τὴν ἄσχετον ἐαυτῆς τόλμαν περατοῖ κρατουμένη παρ' ἐκείνης, οὕτω δὲ καὶ ἡ γραμμὴ τοῖς σημείοις ὀρίζεται. δυοειδῆς γὰρ οὖσα καίτοι τοῦ σημείου, μονάδος ἔχοντος λόγον, μετέχει δυαδικῶς. ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς φανταστοῖς καὶ τοῖς αἰσθητοῖς αὐτὰ τὰ σημεία τὰ ἐν τῇ γραμμῇ περατοῖ τὴν γραμμὴν, ἐν δὲ τοῖς ἀύλοις εἶδεσι προὔφεστηκε μὲν ὁ ἀμέριστος τοῦ σημείου λόγος, προϊὼν δ' ἐκεῖθεν αὐτὸς ὁ πρώτιστος ἐαυτὸν διαστήσας καὶ κινούμενος καὶ ῥέων ἐπ' ἄπειρον καὶ τὴν ἀόριστον δυάδα μιμούμενος κρατεῖται μὲν ὑπὸ τῆς ἰδίας ἀρχῆς, ἐνίζεται δὲ ὑπ' αὐτῆς καὶ περιλαμβάνεται πανταχόθεν. ἄπειρος οὖν ἅμα καὶ πεπερασμένος ἐστί, κατὰ μὲν τὴν ἐαυτοῦ πρόοδον ἄπειρος, κατὰ δὲ τὴν τῆς αἰτίας τῆς περατοειδοῦς μέθεξιν πεπερασμένος. ἐαυτῷ γὰρ προελθὼν τῇ ἐκείνης περιοχῇ κεκράτηται καὶ ὀρίζεται κατὰ τὴν ἐκείνης ἔνωσιν. ὅθεν δὲ καὶ ἐν ταῖς εἰκόσι τὰ σημεία τὸ πέρας καὶ τὴν ἀρχὴν καταλαμβάνοντα τῆς γραμμῆς ὀρίζειν αὐτὴν λέγεται. ἐκεῖ μὲν οὖν ἐστὶ τὸ πέρας ἐξηρημένον τοῦ περατουμένου, ἐνταῦθα δὲ διττόν· ἐν αὐτῷ γὰρ ὑφέστηκε τῷ περατουμένῳ. καὶ τοῦτο φέροι ἂν ἐνδειξιν θαυμαστὴν τοῦ τὰ εἶδη μένοντα μὲν ἐφ' ἐαυτῶν κατ' αἰτίαν προηγεῖσθαι τῶν μετεχόντων, ἐπιδόντα δὲ ἐκείνοις ἐαυτὰ κατὰ τὴν ἐκείνων ιδιότητα τὴν ὑπόστασιν λαμβάνειν, συμπληθύμενα αὐτοῖς καὶ συμμεριζόμενα καὶ ἀνολαύοντα τῆς τῶν ὑποκειμένων διαιρέσεως.

[FR102]

Καὶ μὲν καὶ τοῦτο δεῖ προειληφέναι περὶ τῆς γραμμῆς, ὅτι τριχῶς αὐτῇ χρῆται ὁ γεωμέτρης. καὶ γὰρ ὡς ἐφ' ἐκάτερα πεπερασμένη, ὡς τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι, καὶ ὡς τῇ μὲν ἀπείρῳ, τῇ δὲ πεπερασμένῃ, ὡς ἐπ' ἐκείνου τοῦ προβλήματος „ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι“. ἐν γὰρ τῇ κατασκευῇ φησιν „ἐκχεῖσθω τις εὐθεῖα ἐπὶ θάτερα μὲν πεπερασμένη, ἐπὶ θάτερα δὲ ἄπειρος“. τριχῶς οὖν ἡ γραμμὴ λαμβάνεται παρ' αὐτῷ.

Πρὸς δὲ τούτοις κἄκεῖνο ἐπιστάσεως ἄξιον ὃν μὴ παραδράμωμεν. πῶς γὰρ εἴρηται γραμμῆς πέρατα σημεία, καὶ ποίας γραμμῆς; οὔτε γὰρ τῆς ἀπείρου οὔτε πάσης τῆς πεπερασμένης· ἐστὶ γὰρ τις γραμμὴ καὶ πεπερασμένη καὶ οὐκ ἔχουσα πέρατα σημεία. τοιαύτη γὰρ ἡ κυκλικὴ αὐτὴ εἰς ἐαυτὴν συννεύουσα καὶ οὐ σημείοις χρωμένη πέρασιν ὡς ἡ εὐθεῖα· τοιαύτη καὶ ἡ τοῦ θυρεοῦ. μὴ ποτε οὖν τὴν γραμμὴν ὁρᾶν δεῖ καθόσον ἐστὶ γραμμὴ. λάβοιμεν γὰρ ἂν καὶ περιφέρειάν τινα περατουμένην ὑπὸ σημείων καὶ μέρος τῆς τοῦ θυρεοῦ γραμμῆς ὡσαύτως ἔχον πέρατα σημεία. πᾶσα δὲ ἡ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ θυρεοῦ καὶ ἄλλην ιδιότητα προσείληφεν, καθ' ἣν οὐ μόνον γραμμὴ ἐστὶν ἀλλὰ καὶ σχήματος

[FR103]

ἀποτελεστική. εἰ μὲν οὖν γραμμαὶ ἄμφω, πέρατα ἔχουσι σημεία, εἰ δὲ σχημάτων ποιητικὰ τοιῶνδε, συννεύουσιν εἰς αὐτάς. εἰ δὲ καὶ γραφομένας αὐτάς νοήσεως, εὗροις ἂν ὅπῃ περατοῦνται ὑπὸ σημείων, γεγραμμένας δὲ λαβὼν καὶ τέλος ἀρχὴ συνάψας οὐκέτι θεωρῆσαι δύνασθαι τὰ πέρατα αὐτῶν.

Def. III. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’
ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Ὁ μὲν Πλάτων τῆς γραμμῆς δύο τὰ ἀπλούστατα καὶ ἀρχοειδέστατα θέμενος εἶδη, τὴν τε εὐθεῖαν καὶ τὴν περιφερῆ, τὰ ἄλλα πάντα κατὰ μίξιν ἐκ τούτων ὑφίστησιν, ὅσα τε ἐλικοειδῆ λέγεται τῶν μὲν ἐπιπέδων τῶν δὲ περὶ τὰ στερεὰ τὴν ὑπόστασιν δεχομένων καὶ ὅσα κατὰ τὰς τομὰς τῶν στερεῶν ὑφίσταται εἶδη καμπύλων γραμμῶν. καὶ ἔοικεν τὸ μὲν σημεῖον εἰκόνα φέρειν, εἰ θέμις εἰπεῖν, τοῦ ἐνὸς κατὰ τὸν Πλάτωνα. καὶ γὰρ τοῦτο μέρος οὐδὲν ἔχει, ὥσπερ καὶ ἐκεῖνος δείκνυσιν ἐν Παρμενίδῃ. ἐπεὶ δὲ μετὰ τὸ ἐν τρεῖς εἰσιν ὑποστάσεις, τὸ πέρας, τὸ ἄπειρον, τὸ μικτόν, διὰ τούτων ὑφίσταται τὰ τε τῶν γραμμῶν εἶδη καὶ τὰ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν σχημάτων· καὶ τῷ μὲν πέρατι ἀνάλογον ἡ περιφέρεια καὶ ἡ περιφερόγραμμος γωνία καὶ ὁ κύκλος ἐν ἐπιπέδοις καὶ ἡ σφαῖρα ἐν στερεοῖς, τῇ δὲ ἀπειρίᾳ τὸ εὐθύ κατὰ πάντα ταῦτα — διήκει γὰρ διὰ πάντων οἰκείως ἐκασταχοῦ φανταζόμενον — τὸ δὲ μικτόν τὸ ἐν ἅπασιν τούτοις τῷ ἐκεῖ μικτῷ. καὶ γὰρ γραμμαὶ μικταὶ εἰσιν ὥς αἱ ἔλικες, καὶ γωνίαι ὥς ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἡ κερατοειδῆς, καὶ σχήματα ἐπίπεδα μὲν τὰ τμήματα καὶ αἱ ἀψίδες, στερεὰ δὲ κῶνοι καὶ κύλινδροι καὶ τὰ τοιαῦτα. τὸ ἄρα πέρας καὶ ἄπειρον καὶ μικτόν ἐστιν ἐν τούτοις ἅπασιν. καὶ μέντοι καὶ ὁ Ἀριστοτέλης τὴν αὐτὴν ἔχει τῷ Πλάτωνι διάνοιαν. πᾶν γὰρ εἶδος γραμμῆς εὐθύ φησὶν ἐστὶν ἢ περιφερὲς ἢ μικτόν ἐκ τούτων. διὸ καὶ κινήσεις τρεῖς, ἡ μὲν ἐπ’ εὐθείας, ἡ δὲ κύκλῳ, ἡ δὲ μικτῇ.

[FR104]

Διαμφισβητοῦσι δὲ τινες πρὸς τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ φασὶ μὴ δύο μόνας εἶναι τὰς ἀπλᾶς γραμμάς, ἀλλὰ καὶ τρίτην ἄλλην, τὴν περὶ τὸν κύλινδρον ἔλικα γραφομένην, ὅταν εὐθείας κινουμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου σημείου ὁμοταχῶς ἐπ’ αὐτῆς κινῆται. γίνεται γὰρ ἔλιξ, ἥς ὁμοιομερῶς πάντα τὰ μέρη πᾶσιν ἐφαρμόζει, καθάπαρ Ἀπολλώνιος ἐν τῷ περὶ τοῦ κοχλίου γράμματι δείκνυσιν. καὶ τοῦτο τὸ πάθος μόνῃ πέπονθεν ἔλικων αὕτη. καὶ γὰρ τῆς ἐπιπέδου τὰ μόρια ἀνόμοια ἀλλήλοις καὶ τῆς περὶ τὸν κῶνον γραφομένης καὶ τῆς περὶ τὴν σφαῖραν. μόνῃ δὲ ὁμοιομερῆν ἡ κυλινδρική, καθάπερ δὴ καὶ ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφερὲς γραμμὴ. μήποτε οὖν τρεῖς εἰσιν αἱ ἀπλαῖ γραμμαὶ καὶ οὐ δύο μόνον;

[FR105]

Πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπορίαν ἀναντησόμεθα λέγοντες, ὁμοιομερῆ μὲν εἶναι τὴν ἔλικα ταύτην, ὥς καὶ Ἀπολλώνιος δέδειχεν, ἀπλῆν δὲ οὐδαμῶς. οὐ γὰρ ταύτῃ εἶναι τό τε ὁμοιομερὲς καὶ τὸ ἀπλοῦν, ἐπεὶ καὶ τῶν φύσει συνσετώτων ὁμοιομερῆς μὲν ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος, ἀπλᾶ δὲ ταῦτα οὐκέτι. δηλοῦν δὲ τῆς κυλινδρικῆς ἔλικος τὴν μίξιν τὴν ἐκ τῶν ἀπλῶν καὶ αὐτὴν τὴν γένεσιν. γεννᾶται γὰρ τῆς μὲν εὐθείας κύκλῳ κινουμένης περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου,

τοῦ δὲ σημείου φερομένου ἐπὶ τῆς εὐθείας. δύο τοίνυν κινήσεις αἱ ἀπλαῖ τὴν ὑπόστασιν αὐτῇ παρέσχον, ὥστε τῶν μικτῶν ἐστὶ γραμμῶν καὶ οὐ τῶν ἀπλῶν. τὸ γὰρ ἐξ ἀνομοίων ὑποστάν οὐχ ἀπλοῦν ἐστὶν ἀλλὰ καὶ μικτόν, καὶ ὀρθῶς ὁ Γεμῖνος ἐκ πλειόνων μὲν κινήσεων καὶ τῶν ἀπλῶν τινα γραμμῶν ὑφίστασθαι διδοὺς οὐ μέντοι πᾶσαν εἶναι τὴν τοιαύτην μικτήν, ἀλλὰ τὴν ἐξ ἀνομοίων. καὶ γὰρ εἰ τετράγωνον νοήσεις καὶ δύο κινήσεις, τὴν μὲν κατὰ τὸ μῆκος, τὴν δὲ κατὰ τὸ πλάτος γινομένην, ἰσοταχεῖς, ὑποστήσεται ἡ διαγώνιος, εὐθεῖα οὖσα· καὶ οὐ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα μικτή· οὐ γὰρ προηγεῖται τις αὐτῆς ἑτέρα γραμμὴ κατὰ ἀπλῆν ὑφισταμένη κίνησιν, ὥς τῆς κυλινδρικής ἐλέγομεν ἑλικος. ἀλλ' οὐδὲ εἰ τις ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ νοήσῃ ὑποβιβαζομένην εὐθεῖαν καὶ τῇ διχοτομίᾳ κύκλον γράφουσιν, διὰ τοῦτο ἡ κυκλικὴ γραμμὴ κατὰ μίξιν ὑφέστηκεν· τῆς γὰρ οὕτω κινουμένης τὰ μὲν πέρατα ὁμαλῶς κινούμενα εὐθυγραφεῖ, ἡ δὲ διχοτομία ἀνωμάλως φερομένη κυκλογραφεῖ, τὰ δὲ ἄλλα σημεῖα γράφει τὴν ἑλλειψιν, ὥστε τῇ ἀνωμαλίᾳ τῆς κατὰ τὴν διχοτομίαν φορᾶς ἐπηκολούθησεν ἡ γένεσις τῆς κυκλικῆς γραμμῆς παρὰ τὸ δεδόσθαι ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ τὴν καταβιβαζομένην εὐθεῖαν, ἀλλὰ μὴ κατὰ φύσιν κινεῖσθαι.

[FR106]

Ταῦτα μὲν οὖν περὶ τούτων. δόξειε δ' ἂν ἀμφοτέρων οὐσῶν ἀπλῶν τῶν γραμμῶν, τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφεροῦς, ἀπλουστέρα μᾶλλον ἢ εὐθεῖα εἶναι. ἐν ταύτῃ μὲν γὰρ οὐδὲ κατ' ἐπίνοιάν ἐστὶν ἀνομοιότης, ἐπὶ δὲ τῆς περιφεροῦς τὸ κοῖλον καὶ κυρτὸν ἑτεροίωσιν ἐμφαίνει. καὶ ἡ μὲν εὐθεῖα τὴν περιφέρειαν οὐ συνεισάγει κατὰ τὴν ἐπίνοιαν, ἡ δὲ περίφερεια τὴν εὐθεῖαν, εἰ καὶ μὴ κατὰ τὴν γένεσιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν πρὸς τὸ κέντρον σχέσιν. τί οὖν, εἰ λέγοι τις καὶ τὴν περιφέρειαν δεῖσθαι τῆς εὐθείας εἰς τὴν ὑπόστασιν; εἰ γὰρ εὐθείας πεπερασμένης θάτερον μὲν τῶν περάτων μένοι, θάτερον δὲ κινεῖτο, γράφει κύκλον, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ μένον τῆς εὐθείας πέρας. ἢ τὸ γράφον τὸν κύκλον τὸ σημεῖόν ἐστι περὶ τὸ μένον φερόμενον, οὐκ ἢ εὐθεῖα; τὴν γὰρ ἀπόστασιν αὕτη μόνον ἀφορίζει, τὴν δὲ κυκλικὴν γραμμὴν τὸ σημεῖον ὑφίστησι κινούμενον κυκλικῶς.

[FR107]

Τούτων μὲν οὖν ἄλλος. ἔοικεν δὲ ἡ μὲν περίφερεια πρὸς τοῦ πέρατος εἶναι καὶ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον πρὸς τὰ ἄλλας γραμμάς, ὃν πρὸς πάντα τὰ ὄντα τὸ πέρας — καὶ γὰρ ὥρισται καὶ σχῆμα ἀποτελεῖ μόνη τῶν ἀπλῶν — ἢ δὲ εὐθεῖα πρὸς τῆς ἀπειρίας· ἐπ' ἀπειρον οὖν ἐκβαλλομένη οὐδὲ παύεται. καὶ ὥς ἐκ πέρατος καὶ ἀπείρου τὰ ἄλλα πάντα, οὕτως ἐκ τοῦ περιφεροῦς καὶ τοῦ εὐθέως πᾶν τὸ μικτόν τῶν γραμμῶν γένος τῶν τε ἐπιπέδων καὶ τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς. καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν καὶ ἡ ψυχὴ τό τε εὐθὺ καὶ τὸ περιφερὲς κατ' οὐσίαν ἐν αὐτῇ προεῖληφεν, ἵνα πᾶσαν τὴν ἐν τῷ κόσμῳ τοῦ ἀπείρου συστοιχίαν καὶ πᾶσαν τὴν περιττοειδῆ κατευθύνῃ φύσιν, τῷ μὲν εὐθεῖ τὴν πρόοδον αὐτῶν ὑφιστάσῃ, τῷ δὲ περιφερεῖ τὴν ὑποστροφὴν, καὶ τῷ μὲν εἰς πλῆθος αὐτὰ προάγουσα, τῷ δὲ εἰς ἓν πάντα συνάγουσα. καὶ οὐχ ἡ ψυχὴ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὁ τὴν ψυχὴν ὑποστήσας καὶ ταύτας αὐτῇ τὰς δυνάμεις παραδοὺς ἀμφοτέρων ἔχει τὰς πρωτουργοὺς αἰτίας ἐν ἑαυτῷ. τῶν γὰρ ὄντων ἀπάντων ἀρχὴν καὶ μέσα καὶ τέλη προεῖληφώς εὐθείας περαίνει κατὰ φύσιν περιπορευόμενος, φησὶν ὁ

[FR108]

Πλάτων. καὶ γὰρ ἐπὶ πάντα πρόεισι ταῖς προνοητικαῖς ἐνεργείαις καὶ πρὸς ἑαυτὸν ἐπέστραπται μένων ἐν τῷ ἑαυτοῦ κατὰ τρόπον ἦθι, φησὶν ὁ Τίμαιος. σύμβολον δὲ ἡ μὲν εὐθεία τῆς ἀπαρεγκλίτου προνοίας καὶ ἀδιαστρόφου καὶ ἀχράντου καὶ ἀνεκλείπτου καὶ παντοδυνάμου καὶ πᾶσι παρούσης, ἡ δὲ περιφέρεια καὶ τὸ περιπορεύεσθαι τῆς εἰς ἑαυτὴν συννευούσης ἐνεργείας καὶ πρὸς ἑαυτὴν συνελιττομένης καὶ καθ' ἑν νοερὸν πέρας τῶν ὅλων ἐπικρατούσης. δύο δὲ ταύτας ὁ δημιουργικὸς νοῦς ἐν ἑαυτῷ προστησάμενος ἀρχάς, τὸ εὐθὺ καὶ τὸ περιφερές, δύο μονάδας προήγαγεν ἀφ' ἑαυτοῦ, τὴν μὲν κατὰ τὸ περιφερὲς ἐνεργοῦσαν καὶ τῶν νοερῶν οὐσιῶν τελεσιουργόν, τὴν δὲ κατὰ τὸ εὐθὺ καὶ τοῖς αἰσθητοῖς τὴν γένεσιν παρεχομένην. ἐπειδὴ δὲ ἡ ψυχὴ μέση τῶν νοερῶν ἐστίν καὶ τῶν αἰσθητῶν καθόσου μὲν συνάπτει τῇ νοερᾷ φύσει, κατὰ κύκλον ἐνεργεῖ, καθόσον δὲ τοῖς αἰσθητοῖς ἐπιστατεῖ, κατὰ τὸ εὐθὺ ποιεῖται τὴν πρόνοιαν.

[FR109]

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς πρὸς τὰ ὄντα τούτων τῶν εἰδῶν ὁμοιότητος· τὸν δὲ τῆς εὐθείας ὀρισμὸν ὁ μὲν **Εὐκλείδης** τοῦτον ἀποδédωκεν, ὃν καὶ παρεθέμεθα, καὶ δηλοῖ διὰ τούτου μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα τῷ μεταξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων. ὁδὸν γὰρ ἀπέχει θάτερον τῶν σημείων θατέρου, τοσοῦτον τὸ μένειος τῆς εὐθείας τῆς ὑπ' αὐτῶν περατουμένης. καὶ τοῦτό ἐστίν τὸ ἐξ ἴσου κείσθαι τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. εἰ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ καὶ ἄλλης τινὸς γραμμῆς δύο σημεῖα λάβοις, τὸ μεταξὺ τούτων ἀπολαμβάνόμενον διάστημα τῆς γραμμῆς μεῖζόν ἐστι τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. καὶ πᾶσα γραμμὴ τοῦτο πεπονθυῖα φαίνεται πλὴν τῆς εὐθείας. διὸ καὶ κατὰ κοινὴν ἔννοιαν τοὺς μὲν ἐπ' εὐθείας ὁδεύοντας τὴν ἀναγκαῖαν μόνην πορεύεσθαι φασιν καὶ οἱ πολλοί, τοὺς δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας πλείον τῆς ἀναγκαίας. ὁ δὲ **Πλάτων** ἀφορίζει τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἥς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ. καὶ γὰρ τοῦτο τὰ μὲν ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοισι κείμενα πᾶσχειν ἀναγκαῖον, τὰ δ' ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἢ ἄλλης διαστάσεως οὐκ ἀναγκαῖον. ὅθεν δὴ καὶ οἱ ἀστρολογικοὶ φασὶ τότε τὸν ἥλιον ἐκλείπειν, ὅταν ἐπὶ μιᾷ εὐθείας γένηται αὐτός τε καὶ ἡ σελήνη καὶ τὸ ὄμμα τὸ ἡμέτερον. τότε γὰρ ὑπὸ τῆς σελήνης ἐπιπροσθεῖσθαι μέσης αὐτοῦ καὶ ἡμῶν γενομένης. καὶ ἴσως ἔνδειξιν ἂν φέροι τὸ πάθος τῆς εὐθείας τοῦ καὶ ἐν τοῖς οὐσι κατὰ τὰς προόδους τὰς ἀπὸ τῶν αἰτιῶν τὰ μέσα διαιρετικὰ γίνεσθαι τῆς τῶν ἄκρων ὑποστάσεως καὶ τῆς πρὸς ἀλλήλα αὐτῶν κοινωνίας. ὥσπερ δὴ κατὰ τὰς ἐπιστροφὰς συνελίττει καὶ τὰ ἀφ' ἑαυτῶν πρὸς τὰς ἀρχικὰς διεστῶτα αἰτίας. ὁ δ' αὖ **Ἀρχιμέδης** τὴν εὐθεῖαν ὠρίστατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν. διότι γὰρ, ὡς ὁ **Εὐκλείδης** λόγος φησὶν, ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις, διὰ τοῦτο ἐλαχίστη ἐστὶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν. εἰ γὰρ εἴν τις ἐλάττων, οὐκ ἐξ ἴσου κείσεται τοῖς πέρασιν ἑαυτῆς. καὶ μὴν καὶ οἱ ἄλλοι πάντες ὀρισμοὶ τῆς εὐθείας εἰς τὰς αὐτὰς ἐννοίας ἐμπίπτουσιν· οἷον ὅτι ἐπ' ἄκρον ἐστὶ τεταμένη γραμμὴ· καὶ ὅτι μέρος μὲν οὐκ ἔστιν αὐτῆς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεωροτέρῳ· καὶ ὅτι πάντα αὐτῆς τὰ μέρη πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει· καὶ ὅτι ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα· καὶ ὅτι ἡ μετὰ τῆς ὁμοειδοῦς μιᾶς σχῆμα μὴ ἀποτελοῦσα. πάντα γὰρ ταῦτα τὴν ιδιότητα σημαίνει τῆς εὐθείας,

[FR110]

ἣν ἔχει τῷ τε ἀπλῇ εἶναι καὶ μίαν ἔχειν πρόοδον ἐλαχίστην τῶν ἀπὸ τοῦ περάτος ἐπὶ θάτερον πέρας.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν ὀρισμῶν τῆς εὐθείας γραμμῆς· διαιρεῖ δ' αὖ τὴν γραμμὴν ὁ **Γεμῖνος** πρῶτον μὲν εἰς τὴν ἀσύνθετον καὶ τὴν σύνθετον — καλεῖ δὲ σύνθετον τὴν κεκλασμένην καὶ γωνίαν ποιοῦσαν — ἔπειτα τὴν σύνθετον εἰς τε τὴν σχηματοποιοῦσαν καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένην, σχῆμα λέγων ποιεῖν τὴν κυκλικήν, τὴν τοῦ θυρεοῦ, τὴν κιττοειδῆ, μὴ ποιεῖν δὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τὴν τοῦ ἀμβλυγωνίου, τὴν κογχοειδῆ, τὴν εὐθεῖαν, πάσας τὰς τοιαύτας. καὶ πάλιν κατ' ἄλλον τρόπον τῆς ἀσυνθέτου γραμμῆς τὴν μὲν ἀπλῆν εἶναι, τὴν δὲ μικτήν, καὶ τῆς ἀπλῆς τὴν μὲν σχῆμα ποιεῖν ὡς τὴν κυκλικήν, τὴν δὲ ἀόριστον εἶναι ὡς τὴν εὐθεῖαν, τῆς δὲ μικτῆς τὴν μὲν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εἶναι, τὴν δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς, καὶ τῆς ἐν ἐπιπέδοις τὴν μὲν ἐν αὐτῇ συμπίπτειν ὡς τὴν κιττοειδῆ, τὴν δ' ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι, τῆς δὲ ἐν στερεοῖς τὴν μὲν κατὰ τὰς τομὰς ἐπινοεῖσθαι τῶν στερεῶν, τὴν δὲ περὶ τὰ στερεὰ ὑφίστασθαι. τὴν μὲν γὰρ ἔλικα τὴν περὶ σφαῖραν ἢ κῶνον περὶ τὰ στερεὰ ὑφεστάναι, τὰς δὲ κωνικάς τομὰς ἢ τὰς σπειρικὰς ἀπὸ τοιαύτου τομῆς γεννᾶσθαι τῶν στερεῶν. ἐπινενοῆσθαι δὲ ταύτας τὰς τομὰς τὰς μὲν ὑπὸ **Μεναιχμοῦ** τὰς κωνικάς, ὃ καὶ **Ἐρατοσθένης** ἱστορῶν λέγει· Μὴ δὲ Μεναιχμίους κωνοτομεῖν τριάδας· τὰς δὲ ὑπὸ **Περσέως**, ὃς καὶ τὸ ἐπίγραμμα ἐποίησεν ἐπὶ τῇ εὐρέσει.

[FR111]

[FR112]

Τρεῖς γραμμάς ἐπὶ πέντε τομαῖς εὐρῶν [ἐλικώδεις]

Περσεὺς τῶνδ' ἔνεκεν δαίμονας ἰλάσατο.

αἱ μὲν δὴ τρεῖς τομαὶ τῶν κώνων εἰσὶν παραβολὴ καὶ ὑπερβολὴ καὶ ἔλλειψις, τῶν δὲ σπειρικῶν τομῶν ἡ μὲν ἐστὶν ἐμπεπλεγμένη, ἐοικυῖα τῇ τοῦ ἵππου πέδῃ, ἡ δὲ κατὰ τὰ μέσα πλατύνεται, ἐξ ἑκατέρου δὲ ἀπολήγει μέρους, ἡ δὲ παραμήκης οὖσα τῷ μὲν μέσῳ διαστήματι ἐλάττονι χρηταί, εὐρύνεται δὲ ἐφ' ἑκάτερα. τῶν δὲ ἄλλων μίξεων τὸ πλῆθος ἀπέραντόν ἐστιν· καὶ γὰρ στερεῶν σχημάτων πλῆθος ἐστὶν ἄπειρον καὶ τομαὶ αὐτῶν συνίστανται πολυειδεῖς. οὐ γὰρ εὐθεῖα μὲν κατὰ κύκλον κινουμένη ποιεῖ τινα ἐπιφάνειαν, οὐχὶ δὲ καὶ αἱ κωνικαὶ γραμμαὶ καὶ αἱ κογχοειδεῖς καὶ αὐταὶ αἱ περιφέρειαι. παντοίως οὖν ταῦτα τὰ στερεὰ τεμνόμενα ποικίλα δείκνυσιν εἶδη γραμμῶν.

Τῶν δὲ περὶ τὰ στερεὰ συνισταμένων γραμμῶν αἱ μὲν εἰσὶν ὁμοιομερεῖς, ὡς αἱ περὶ τὸν κύλινδρον ἔλικες, αἱ δὲ ἀνομοιομερεῖς, ὥσπερ αἱ ἄλλαι πᾶσαι. συνάγεται οὖν ἐκ τούτων τῶν διαιρέσεων, ὡς αἱ τρεῖς μόναι γραμμαὶ ὁμοιομερεῖς εἰσιν, ἡ εὐθεῖα, ἡ κυκλικὴ καὶ ἡ κυλινδρική ἔλιξ. δύο μὲν ἐν ἐπιπέδῳ ἀπλᾷ, μία δὲ μικτὴ περὶ στερεῶ. καὶ τοῦτο ἀποδείκνυσιν ἐναργῶς ὁ **Γεμῖνος** προαποδείξας ὅτι, ἂν πρὸς ὁμοιομερῇ γραμμῇ ἀπὸ τοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι προσεκβληθῶσιν ἴσας πρὸς αὐτὴν ποιοῦσαι γωνίας, ἴσαι εἰσὶν. καὶ ληπτέον ἐκ τῶν ἐκείνου τοῖς φιλομαθέσι τὰς ἀποδείξεις, ἐπεὶ καὶ τὰς γενέσεις τῶν σπειρικῶν γραμμῶν καὶ τῶν κογχοειδῶν καὶ τῶν κισσοειδῶν παραδίδωσιν. ἡμεῖς δὲ τὰς μὲν ἐπωνυμίας αὐτῶν καὶ τὰς διαιρέσεις ἱστορήσομεν εἰς τὴν περὶ αὐτῶν ζήτησιν ἐγείροντες

[FR113]

τοὺς εὐφυεῖς, τὸ δὲ περὶ τὴν ἐκάστων ζήτησιν τοὺς λόγους ἀκριβοῦν ἐν τοῖς παροῦσιν ἡγούμεθα περίεργον εἶναι, τοῦ γεωμέτρου τὰς ἀπλᾶς καὶ ἀρχοειδεῖς ἡμῖν ἐνταῦθα μόνας γραμμὰς ἐκφήναντος, τὴν μὲν εὐθεῖαν κατὰ τὸν προκείμενον ὀρισμὸν, τὴν δὲ περιφέρειαν κατὰ τὴν ἀπόδοσιν τοῦ κύκλου. τότε γὰρ ἔρεῖ τὴν γραμμὴν τὴν περατοῦσαν τὸν κύκλον εἶναι περιφέρειαν. μικτῆς δὲ γραμμῆς οὐδαμοῦ μέμνηται. καίτοι γωνίας οἶδε μικτάς, ὥσπερ τὴν τῶν ἡμικυκλίων καὶ τὴν κερατοειδῆ, καὶ σχήματα ἐπίπεδα μικτὰ, [τὰ τμήματα] καὶ τοὺς τομέας, καὶ στερεά, τοὺς κώνους καὶ κυλίνδρους. τῶν μὲν οὖν ἄλλων ἐκάστου τὰ τρία παραδίδωσιν εἶδη, τῶν δὲ γραμμῶν τὰ δύο μόνα, τὸ εὐθύ καὶ περιφερές, ἡγούμενος δεῖν ἐν τοῖς περὶ τῶν ἀπλῶν λόγοις τὰ ἀπλᾶ παραλαμβάνειν εἶδη. πάντα γὰρ τὰ ἄλλα συνθετώτερα τῶν γραμμῶν. ἐπόμενοι δὲ οὖν καὶ ἡμεῖς τῷ γεωμέτρῃ στήσωμεν ἐπὶ τῶν ἀπλῶν γραμμῶν τὴν διάρθρωσιν αὐτῶν.

[FR114]

Def. V. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστὶν ὁ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Μετὰ τὸ σημεῖον καὶ τὴν γραμμὴν ἡ ἐπιφάνεια τέτακται διχῇ διαστάσα κατὰ τε μῆκος καὶ πλάτος, ἀβαθῆς δὲ μείνασα καὶ ταύτῃ τοῦ τριχῇ διαστάντος ἀπλουστέραν ἔχουσα φύσιν. διὸ καὶ ὁ γεωμέτρης τὸ μόνον προσέθηκε τοῖς δύο διαστήμασιν ὡς ἂν τῆς τρίτης διαστάσεως οὐκ οὔσης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ ἐστὶ καὶ τοῦτο τῇ ἀποφάσει τοῦ βάθους ἴσον δυνάμενον, ἵνα ἀνταῦθα τὴν μὲν ὑπεροχὴν τῆς ἐπιφανείας τὴν κατὰ ἀπλότητα πρὸς τὸ στερεὸν σημαίνει διὰ τῆς ἀποφάσεως ἢ τῆς ἰσοδυναμούσης τῇ ἀποφάσει προσθήκης τὴν δὲ ὕφεσιν τὴν πρὸς τὰ πρὸ αὐτῆς διὰ τῶν καταφάσεων.

Ἄλλοι δὲ πέρας αὐτὴν ὠρίσαντο σώματος ταῦτόν πως λέγοντες — τὸ γὰρ περατοῦν τοῦ περατομένου μιᾷ λείπεται διαστάσει — οἱ δὲ μέγεθος διχῇ διαστατόν, οἱ δὲ ἄλλως, ὅπως οὖν σχηματίζοντες τὴν ἀπόδοσιν σημαίνοντες ταῦτόν.

Τῆς δὲ ἐπιφανείας ἔννοιαν μὲν ἔχειν ἡμᾶς φασιν, ὅταν τὰ χωρία μετρώμεν καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἀπορίζωμεν κατὰ τε μῆκος καὶ πλάτος, αἰσθῆσιν δὲ τινα λαμβάνειν εἰς τὰς σκιὰς ἀποβλέποντας· αὗται γὰρ ἀβαθεῖς οὔσαι διὰ τὸ μὴ δύνασθαι χωρεῖν εἰς τὸ κάτω τῆς γῆς πλάτος ἔχουσι μόνον καὶ μῆκος. οἱ δὲ γε **Πυθαγόρειοι** τῇ τριάδι προσήκειν ἔλεγον αὐτήν, διότι δὴ τὰ ἐπ' αὐτῆς σχήματα πάντα πρωτίστην αἰτίαν ἔχει τὴν τριάδα. ὁ μὲν γὰρ κύκλος, ὅς ἐστιν ἀρχὴ τῶν περιφερομένων, ἐν κρυφίῳ ἔχει τὸ τριαδικὸν τῷ κέντρῳ τῇ διαστάσει τῇ περιφερείᾳ· τὸ δὲ τρίγωνον ἀνάγκη ἡγεμονοῦν τῶν εὐθυγράμμων παντί που δῆλον, ὅτι τῇ τριάδι κατέχεται καὶ κατ' ἐκείνην μεμόρφωται.

[FR115]

Def. VI. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

Καὶ ἀπὸ τούτων ὡς εἰκόνων ληπτέον ὅτι πᾶν τὸ προσεχῶς ἐκάστου τῶν ὄντων ἀπλούστερον τὸν ὅρον ἐπάγει καὶ τὸ πέρας ἐκάστω. καὶ γὰρ ψυχὴ τὴν

τῆς φύσεως ἐνέργειαν ἀφορίζει καὶ τελειοῖ καὶ φύσις τὴν τῶν σωμάτων κίνησιν, καὶ πρὸ τούτων νοῦς μετρεῖ τὰς περιόδους τῆς ψυχῆς καὶ αὐτοῦ τοῦ νοῦ τὴν ζῶν τὸ ἔν. πάντων γὰρ ἐκεῖνο μέτρον. ὥσπερ δὴ καὶ ἐν τούτοις ὀρίζεται μὲν τὸ στερεὸν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὀρίζεται δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς γραμμῆς καὶ αὕτη ὑπὸ τοῦ σημείου· πάντων γὰρ ἐκεῖνο πέρασ. ἐν μὲν οὖν τοῖς ἀύλοις εἶδεσι καὶ ἀμερέσι λόγοις ἡ γραμμὴ, μονοειδὴς ὑπάρχουσα κατὰ τὴν πρόοδον, τὴν τῆς ἐπιφανείας ποικίλην κίνησιν περατοῖ καὶ συνέχει, καὶ τὴν ἀπειρίαν αὐτῆς ἐνίζει προσεχῶς, ἐν δὲ ταῖς εἰκόσιν αὐτοῦ τοῦ περατουμένου τὸ περατοῦν γεγονὸς οὕτως αὐτῷ δίδωσι τὸν ὅρον.

[FR116]

Εἰ δέ τις ἐπιζητοῖν κἀνταῦθα πῶς πάσης ἐπιφανείας πέρατα γραμμαί, μὴ δὲ τῆς πεπερασμένης πάσης — ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πεπέρασται μὲν, οὐχ ὑπὸ γραμμῶν δέ, ἀλλ' αὕτη ὑφ' αὐτῆς — ἐροῦμεν, ὅτι τὴν ἐπιφάνειαν, καθόσον ἐστὶ διχῇ διαστατή, λαβόντες εὐρήσομεν ὑπὸ γραμμῶν ὀριζομένην κατὰ τε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, εἰ δὲ τὴν σφαιρικὴν θεωροῖμεν ἐσχηματισμένην αὐτὴν καὶ πορσλαβοῦσαν ἄλλην ποιότητα, λαμβάνομεν καὶ πέρασ ἀρχῇ συνάψασαν καὶ ἐκ τῶν δύο περάτων ἐν ποιήσασαν, καὶ τοῦτο δυνάμει μόνον ἐν ὑπάρχον καὶ οὐ κατ' ἐνέργειαν.

Def. VII. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἐαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Τοῖς μὲν παλαιότεροις τῶν φιλοσόφων οὐκ ἐδόκει τῆς ἐπιφανείας εἶδος τίθεσθαι τὸ ἐπίπεδον ἀλλ' ὡς ταῦτ' ἐκάτερον παραλαμβάνειν εἰς παράστασιν τοῦ διχῇ διαστάντος μεγέθους. οὕτω γὰρ καὶ ὁ θεῖος Πλάτων τὴν γεωμετρίαν τῶν ἐπιπέδων ἔφατο θεωρητικὴν εἶναι, πρὸς τὴν στερεομετρίαν αὐτὴν ἀντιδιαίρων ὡς ἂν τῆς αὐτῆς οὐσης τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ἐπιφανείας· καὶ ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης ὡσαύτως. Εὐκλείδης δὲ καὶ οἱ μετ' αὐτὸν γένος μὲν ποιοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν, εἶδος δὲ τὸ ἐπίπεδον ὡς τῆς γραμμῆς τὴν εὐθειάν. διὸ καὶ τὸ ἐπίπεδον χωρὶς ἀφορίζεται τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ ἀνάλογον τῇ εὐθείᾳ· καὶ γὰρ ἐκείνην ἴσην εἶναι τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν σημείων ἔλεγεν καὶ ταύτην ὁμοίως δυεῖν εὐθειῶν ἐκκειμένων ἴσον κατέχειν τόπον τῷ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν. αὕτη γὰρ ἐστὶν ἡ ἐξ ἴσου κειμένη ταῖς ἐφ' ἐαυτῆς εὐθείαις ἢ καὶ ἕτεροι, τὸ αὐτὸ δηλοῦντες, ἐπ' ἄκρον τεταμένην εἰρήκασιν, οἱ δὲ ἥς πᾶσι τοῖς μέρεσιν εὐθεῖα ἐφαρμόζει. φαῖεν δὲ ἂν τινες αὐτὴν καὶ ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἐπιφανειῶν, καὶ ἥς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, καὶ πάντας τοὺς τῆς εὐθείας ὅρους καὶ εἰς τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τὸ γένος μόνον ἐξαλλάττοντες δυνήσονται μεταφέρειν. τὸ γὰρ εὐθὺ τοῦτο καὶ περιφερὲς καὶ τὸ μικτὸν ἀπὸ τῶν γραμμῶν ἀρξάμενα διατείνει μέχρι τῶν στερεῶν, ὡς εἵπομεν. ἔστι γὰρ καὶ ἐν ἐπιφανείαις καὶ ἐν στερεοῖς κατὰ τὸ ἀνάλογον. διὸ καὶ ὁ Παρμενίδης πᾶν σχῆμά φησιν ἢ εὐθὺ εἶναι ἢ περιφερὲς ἢ μικτόν. εἴπερ οὖν ἐθέλοις τὸ εὐθὺ θεωρεῖν ἐν ἐπιφανείαις, λάβε τὸ ἐπίπεδον, ὃ ἐφαρμόζει παντοίως ἢ εὐθεῖα, εἰ δὲ τὸ περιφερὲς, τὴν σφαιρικὴν

[FR117]

ἐπιφάνειαν, εἰ δὲ τὸ μικτόν, τὴν κυλινδρικήν ἢ κωνικήν ἢ τινά τοιαύτην. δεῖ δέ, φησὶν ὁ Γεμῖνος, μικτῆς λεγομένης γραμμῆς, μικτῆς δὲ καὶ ἐπιφανείας εἰδέναι τὸν τρόπον τῆς μίξεως ὄντα διάφορον. οὔτε γὰρ κατὰ σύνθεσιν ἢ μίξις ἐπὶ τῶν γραμμῶν, οὔτε κατὰ κρᾶσιν. ἡ γὰρ ἔλιξ μικτὴ ἐστὶν καὶ οὐκ ἔστι μέρος μὲν αὐτῆς εὐθύ, μέρος δὲ περιφερὲς ὥσπερ τῶν κατὰ σύνθεσιν μικτῶν, οἷδὲ τεμνομένη πως ἢ ἔλιξ ἔμφασιν παρέχεται τῶν ἀπλῶν ὅπερ ὑπομένει τὰ μεμιγμένα κατὰ κρᾶσιν, ἀλλ' ἔστιν ἐν αὐτῇ συνεφθαρμένα τὰ ἄκρα καὶ συνεχυμένα, ὥστε τοῦτό γε Θεόδωρος ὁ μαθηματικὸς οὐκ ὀρθῶς κρᾶσιν ἐπὶ τῶν γραμμῶν παραλαμβάνει. ἐν δὲ ταῖς ἐπιφανείαις ἢ μίξις οὔτε κατὰ σύνθεσιν οὔτε κατὰ σύγχυσιν, ἀλλὰ μᾶλλον κατὰ τινά κρᾶσιν. νοήσαντες γὰρ κύκλον ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ καὶ σημεῖον μετέωρον καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου προσεκβάλλοντες εὐθεῖαν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ καὶ περιελίζαντες αὐτὴν ποιήσομεν κωνικήν ἐπιφάνειαν μικτὴν οὔσαν, καὶ πάλιν τέμνοντες αὐτὴν ἀναλύσομεν εἰς τὰ ἀπλᾶ. διὰ μὲν γὰρ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἄγοντες τὴν τομὴν ποιήσομεν τρίγωνον, παρὰ δὲ τὴν βάσιν ἄγοντες τὴν τομὴν ποιήσομεν τὸ τέμνον ἐπίπεδον κυκλικόν. τῶν δὲ γραμμῶν ἡ ἰδέα τὸν τρόπον τῆς μίξεως οὐ δείκνυσιν ὄντα κατὰ κρᾶσιν· οὐδὲ γὰρ ἀναπέμπει ἡμᾶς εἰς τὴν τῶν στοιχείων ἀπλῆν φύσιν. αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τεμνόμεναι εὐθύς ἐμφαίνουσιν καὶ δι' ὁποίων εἰσὶ γεγονυῖαι γραμμῶν.

[FR118]

Ὁ μὲν οὖν τρόπος τῆς μίξεως διάφορος ἐπὶ τε γραμμῶν, ὡς εἴρηται, καὶ ἐπιφανειῶν. ὥσπερ δὲ ἐν ταῖς γραμμαῖς ἦσαν ἀπλᾶί τινες, ἥτε εὐθεῖα καὶ ἡ περιφερὴς — τούτων γὰρ καὶ οἱ πολλοὶ προλήψεις ἔχουσιν ἀδιδάκτους, τῶν δὲ μικτῶν τὰ εἶδη τεχνικωτέρας ἐδεῖτο κατανοήσεως — οὕτω δὲ καὶ τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις στοιχειωδεστάτων, τῆς ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαιρικῆς, αὐτόθεν τὰς ἐννοίας ἔχομεν, τῶν δὲ κατὰ μίξιν ὑφισταμένων ἢ ἐπιστήμη καὶ ὁ ταύτης λόγος ἀνευρίσκει τὴν ποικιλίαν. ὃ δὲ ἐστὶ θαυμαστὸν ἐν ταύταις, ὅτι καὶ ἀπὸ κυκλικῆς μίξης γίνεται πολλάκις τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν γένεσιν, ὃ δὲ συμβαίνειν φανερὸν κατὰ τὴν σπειρικὴν ἐπιφάνειαν· κατὰ γὰρ κύκλου νοεῖται στροφὴν ὀρθοῦ διαμένοντος καὶ στρεφομένου περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, διὸ καὶ τριχῶς ἡ σπεῖρα γίνεται, ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτός. καὶ εἰ μὲν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον, γίνεται σπεῖρα συνεχῆς, εἰ δὲ ἐντός, ἡ ἐμπεπλεγμένη, εἰ δὲ ἐκτός, ἡ διεχῆς. καὶ τρεῖς αἱ σπειρικαὶ τομαὶ κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας διαφοράς. πᾶσα δὲ ὅμως σπεῖρα καίτοι μιᾷς οὔσης καὶ κυκλικῆς τῆς κινήσεως μικτὴ ἐστὶ. γίνονται δὲ ἐπιφάνειαι μικταὶ καὶ ἀπὸ τῶν ἀπλῶν, ὡς εἴπαμεν, γραμμῶν τοιῶσδε κινουμένων καὶ ἀπὸ τῶν μικτῶν. αἱ γοῦν κινητικαὶ γραμμαὶ τρεῖς οὔσαι τέτταρας ποιοῦσιν ἐπιφανείας μικτάς, ἃς καλοῦσι κωνοειδεῖς. ἀπὸ μὲν γὰρ τῆς παραβολῆς στρεφομένης περὶ τὸν ἄξονα γίγνεται τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδές, ἀπὸ δὲ τῆς ἐλλείψεως τὰ καλούμενα σφαιροειδῆ, εἰ μὲν περὶ τὸν μείζονα τῶν ἄξόνων ἡ στροφὴ γένοιτο, τὸ ἐπίμηκες, εἰ δὲ περὶ τὸν ἐλάσσονα, τὸ ἐπίπλευ, ἀπὸ δὲ τῆς ὑπερβολῆς ἄλλο κωνοειδές. δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι ποτὲ μὲν ἀπὸ τῶν γραμμῶν εἰς ἐννοιαν ἐρχόμεθα τῶν ἐπιφανειῶν, ποτὲ δὲ ἀνάπαλιν. ἀπὸ γὰρ τῶν κωνικῶν καὶ σπειρικῶν ἐπιφανειῶν

[FR119]

[FR120]

προσεπενοήσαμεν τάς τε κωνικάς καὶ τὰς σπειρικές γραμμάς.

Καὶ μὴν καὶ τοῦτο δεῖ προειληφθῆναι περὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν διαφοράς, ὅτι γραμμαὶ μὲν εἰσι τρεῖς ὁμοιομερεῖς, ὥσπερ ἤδη προείπομεν, ἐπιφάνειαι δὲ δύο μόνον, ἐπίπεδος καὶ σφαιρική, οὐκέτι δὲ καὶ ἡ κυλινδρική. οὐ γὰρ πάντα πᾶσιν ἐφαρμόττειν δύναται τὰ μέρη τῆς κυλινδρικής ἐπιφανείας.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἡμῖν εἰρήσθω διαφορῶν, ὧν μίαν ὁ γεωμέτρης ἐκλεξάμενος, τὴν ἐπίπεδον, ταύτην ὠρίσατο, καὶ ὡς ἐπὶ ταύτης ὑποκειμένης θεωρήσει τὰ τε σχήματα καὶ τὰ τούτων πάθη. καὶ γὰρ εὐπορώτερος ὁ λόγος αὐτῷ γίνεται μᾶλλον ἢ ἐπ' ἄλλης ἐπιφανείας. καὶ γὰρ εὐθείας καὶ κύκλους καὶ ἑλικας ἐπὶ ταύτης νοεῖν δυνατόν, καὶ τομὰς κύκλων καὶ εὐθειῶν καὶ ἀφάς καὶ παραβολὰς καὶ γωνιῶν παντοίων συστάσεις. ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν οὐ πάντα ταῦτα δύναται θεωρηθῆναι. ἐπὶ γὰρ τῆς σφαιρικής πῶς ἂν εὐθεῖαν λάβοις ἢ εὐθύγραμμον γωνίαν, ἐπὶ δὲ τῆς κωνικής ἢ κυλινδρικής πῶς ἂν κύκλων τομὰς ἢ εὐθειῶν θεωρήσεις; εἰκότως οὖν καὶ ὠρίσατο ταύτην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπ' αὐτῆς πάντα ἐκτιθέμενος πραγματεύεται. καὶ γὰρ τὴν πραγματείαν ἐντεῦθεν ἐπίπεδον προσείρηκεν καὶ οὕτω δεῖ νοεῖν τὸ μὲν ἐπίπεδον οἷον προβεβλημένον καὶ πρὸ ὁμμάτων κείμενον, πάντα δὲ ὡς ἐπὶ τούτῳ τὴν διάνοιαν γράφουσιν, τῆς μὲν φαντασίας οἷον ἐπιπέδῳ κατόπτρῳ προσεικασμένης, τῶν δὲ ἐν διανοίᾳ λόγων τὰς ἑαυτῶν ἐμφάσεις εἰς ἐκεῖνο καταπεμπόντων.

[FR121]

Def. VIII. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Τὴν γωνίαν οἱ μὲν τῶν παλαιῶν ἐν τῇ τοῦ πρὸς τι κατηγορίᾳ τάττοντες κλίσιν εἰρήκασιν ἢ γραμμῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας κεκλιμένων ἢ ἐπιπέδων, οἱ δὲ ἐν τῇ ποιότητι καὶ ταύτην περιλαμβάνοντες, ὡς τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπύλον πάθος τοιόνδε λέγουσιν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ, οἱ δὲ εἰς ποσότητα ἀναφέροντες ἐπιφάνειαν ἢ στερεὸν αὐτὴν εἶναι συγχωροῦσι. διαιρεῖται γὰρ ἡ μὲν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ὑπὸ γραμμῆς ἡ δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς ὑπὸ ἐπιφανείας. τὸ δὲ ὑπὸ τούτων, φασὶ διαιρούμενον οὐκ ἄλλο τι ἐστὶν ἢ μέγεθος καὶ τοῦτο οὐ γραμμικόν — ἢ γὰρ γραμμὴ ὑπὸ σημείου διαιρεῖται —, λείπεται οὖν αὐτὴν ἢ ἐπιφάνειαν ἢ στερεὸν εἶναι. ἀλλ' εἰ μέγεθος, πάντα δὲ τὰ ὁμογενῆ μεγέθη πεπερασμένα ὄντα λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα, καὶ αἱ γωνίαι πᾶσαι αἱ ὁμογενεῖς ἡγουν αἱ ἐν ἐπιφανείαις λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔξουσιν, ὥστε καὶ ἡ κερατοειδὴς πρὸς τὴν εὐθύγραμμον. τὰ δὲ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δύναται ἀλλήλων ὑπερέχειν πολλαπλασιαζόμενα. ὑπερέξει ἄρα ποτὲ καὶ ἡ κερατοειδὴς τὴν εὐθύγραμμον ὅπερ ἀδύνατον. δείκνυται γὰρ ὅτι πάσης ἐστὶν ἐλάττων εὐθυγράμμου. καὶ μὴν καὶ εἰ ποιότης μόνον ἐστὶν ὡς ἡ θερμότης καὶ ἡ ψυχρότης, πῶς εἰς ἴσα διαιρετὴ ἐστίν; οὐ γὰρ παρ' ἑλαττον ταῖς γωνίαις ὑπάρχει τὸ ἴσον καὶ ἄνισον ἢ τοῖς μεγέθεσιν, καὶ ὅλως τὸ

[FR122]

διαιρετὸν ὁμοίως ἑκατέροις καθ' αὐτὸ συμβέβηκεν. εἰ δὲ οἷς ταῦτα καθ' αὐτὸ ὑπάρχει ποσὰ ἄττα ἐστὶ καὶ οὐ ποιότητες, καὶ αἱ γωνίαι ποιότητες δῆλον ὅτι οὐκ ἂν εἶεν· τῆς γὰρ ποιότητος τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον οἰκεῖα πάθη καὶ οὐ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. ἔδει τοίνυν μὴ λέγειν ἀνίσους γωνίας καὶ τὴν μὲν μείζονα τὴν δὲ ἐλάσσονα, ἀλλ' ἀνομοίους καὶ τὴν μὲν μᾶλλον γωνίαν, τὴν δὲ ἥσσον. ταῦτα δὲ ὅτι τῆς τῶν μαθημάτων ὑπάρξεως ἐστὶν ἀλλότρια, παντί που καταφανές. πᾶσα γὰρ γωνία τὸν αὐτὸν ἐπιδέχεται λόγον καὶ οὐχὶ ἡ μὲν ἐστὶ γωνία μᾶλλον ἢ δὲ ἥσσον. τὸ δὲ τρίτον, εἰ κλίσις ἐστὶν ἡ γωνία καὶ ὅλως τῶν πρὸς τι, συμβήσεται μιᾶς οὔσης κλίσεως μίαν εἶναι καὶ γωνίαν ἀλλ' οὐ πλείους. εἰ γὰρ μηδὲν ἐστὶν ἄλλο παρὰ τὴν σχέσιν τῶν γραμμῶν ἢ τῶν ἐπιπέδων, τίς μηχανὴ μίαν μὲν εἶναι τὴν σχέσιν, πλείους δὲ γωνίας; εἰ τοίνυν νοήσεως κῶνον τῷ διὰ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τριγώνῳ τετμημένον ἐν τῷ ἡμικωνίῳ κατὰ τὴν κορυφὴν μίαν μὲν θεωρήσεις κλίσιν τῶν γραμμῶν τῶν τοῦ τριγώνου, δύο δὲ ἀφεστώσας γωνίας, τὴν μὲν ἐπίπεδον, τὴν αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, τὴν δὲ ἐπὶ τῆς μικτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, περιεχομένην δὲ ἑκατέραν ὑπὸ τῶν προειρημένων δυεῖν γραμμῶν. οὐκ ἄρα ἡ τούτων σχέσις ἐποίει τὴν γωνίαν ἀλλὰ μὴν ἀναγκαῖον αὐτὴν ἢ ποιότητα λέγειν, ἢ ποσόν, ἢ τῶν πρὸς τι. τὰ μὲν γὰρ σχήματα ποιότητες, οἱ δὲ λόγοι τούτων πρὸς ἄλληλα τῶν πρὸς τι. δεῖ τοίνυν καὶ τὴν γωνίαν ὑφ' ἑν τι τούτων ἀνάγεσθαι τῶν τριῶν γενῶν.

[FR123]

Τοιούτων δὴ τῶν ἀπόρων ὄντων καὶ τοῦ μὲν **Εὐκλείδου** κλίσιν λέγοντος τὴν γωνίαν, τοῦ δὲ **Ἀπολλωνίου** συναγωγὴν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ πρὸς ἐνὶ σημείῳ ὑπὸ κεκλασμένη γραμμῇ ἢ ἐπιφανείᾳ — δοκεῖ γὰρ οὗτος καθόλου πᾶσαν ἀφορίζεσθαι γωνίαν —, λεκτέον ἡμῖν ἐπομένοις τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι, τὴν γωνίαν μηδὲν μὲν εἶναι τῶν εἰρημένων αὐτὸ καθ' αὐτό, διὰ δὲ τῆς πάντων τούτων συνδρομῆς ἔχειν τὴν ὑπόστασιν, καὶ διὰ τοῦτο τὴν ἀπορίαν ποιῆσαι τοῖς εἰς ἑν τι ῥέψασιν. ἐστὶν δὲ οὐχ ἡ γωνία μόνη τοιοῦτον, ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον· μέτεστι μὲν γὰρ αὐτῷ ποσότητος καὶ ἴσον λέγεται καὶ ἄνισον, οἷον ὕλης τάξιν ἔχον πρὸς αὐτό, πάρεστι δὲ αὐτῷ καὶ ἡ κατὰ τὸ σχῆμα ποιότης, ὁπόθεν καὶ ὅμοια τρίγωνα λέγεται καὶ ἴσα, τὸ μὲν ἀπ' ἄλλης ἔχοντα κατηγορίας, τὸ δὲ ἀπ' ἄλλης. οὕτω τοίνυν καὶ ἡ γωνία πάντως μὲν δεῖται τῆς ἐν τῷ μεγέθει ποσότητος ὑποκειμένης, δεῖται δὲ καὶ ποιότητος, καθ' ἣν οἷον μορφήν οἰκεῖαν ἔχει καὶ χαρακτηῖρα τῆς ὑπάρξεως, δεῖται δὲ καὶ τῆς σχέσεως τῶν ἀφορίζουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων. καὶ τὸ ἐκ πάντων ἐστὶν ἡ γωνία καὶ οὐχ ἑν τι τούτων, καὶ διαιρετὴ μὲν ἐστὶ καὶ ἰσότητος δεκτικὴ καὶ ἀνισότητος κατὰ τὸ ἐν αὐτῇ ποσόν, οὐκ ἀναγκάζεται δὲ τὸν λόγον ἐπιδέχεσθαι τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν διὰ τὸ καὶ ποιότητα ἰδιάζουσιν ἔχειν, καθ' ἣν ἀσύμβλητοι πολλάκις εἰσὶν γωνίαι ἄλλαι ἄλλαις, οὐδὲ μίαν ἀποτελεῖν τὴν γωνίαν, εἰ μία ἢ κλίσις, ἐπεὶ καὶ τὸ μεταξὺ τῶν κεκλιμένων ποσὸν συμπληροῖ τὴν οὐσίαν αὐτῆς. εἰ δὲ πρὸς τούτους ἀποβλέπομεν τοὺς διορισμούς, καὶ τὰ ἅπορα διαλύσομεν καὶ τὴν ιδιότητα τῆς γωνίας εὐρήσομεν συναγωγὴν μὲν οὐκ οὕσαν, ὥς περ καὶ ὁ **Ἀπολλωνίος** φησιν, ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ, συμπληρούντων δὲ καὶ τούτων τὴν οὐσίαν αὐτῆς, αὐτὴν

[FR124]

δὲ τὴν συνηγμένην ἐπιφάνειαν πρὸς τῷ σημείῳ καὶ περιεχομένην ὑπὸ τῶν κεκλιμένων γραμμῶν ἢ τῆς μιᾶς γραμμῆς πρὸς αὐτὴν κεκλιμένης, καὶ αὐτὸ τὸ συνηγμένον στερεὸν ὑπὸ ἐπιπέδοις πρὸς ἄλληλα κεκλιμένοις, ἵνα τὸ πεποιωμένον ποσὸν καὶ ὑπὸ τοιαύτῃ σχέσει συνιστάμενον αὐτὴν ἀφορίζῃ, καὶ οὔτε ἡ ποσότης καθ' αὐτὴν οὔτε ἡ ποιότης μόνον οὔτε ἡ σχέσις.

[FR125]

Τοσαῦτα περὶ τῆς τῶν γωνιῶν ὑποστάσεως εἰρήσθω κοινὴν προλαμβάνοντα θεωρίαν ἀπάσης γωνίας πρὸ τῆς τῶν εἰδῶν αὐτῆς διαιρέσεως. τριῶν δὲ δοξῶν οὐσῶν περὶ τῆς γωνίας **Εὐδημος** μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν. γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν οὐκ ἄλλην εἶναι φησιν ἢ τὴν κλάσιν τῶν γραμμῶν — εἰ δὲ ἡ εὐθύτης ποιότης καὶ ἡ κλάσις ποιότης — ἐν ποιότητι οὖν ἔχουσιν αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποιότητα. **Εὐκλείδης** δὲ καὶ ὅσοι κλίσιν εἰρήκασιν ἐν τοῖς πρὸς τι καταλέγουσι. ποσότητα δὲ εἰρήκασιν αὐτὴν, ὅσοι φασὶ τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν, ὧν καὶ ὁ **Πλούταρχος** ἐστίν, εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν **Ἀπολλώνιον**. δεῖ γὰρ εἶναι τι, φησὶ, διάστημα προῶτον ὑπὸ τὴν κλάσιν τῶν περιεχουσῶν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν, καίτοι γε συνεχοῦς ὄντος τοῦ ὑπὸ τὸ σημεῖον διαστήματος ἀδύνατον τὸ πρῶτον λαβεῖν. ἐπ' ἄπειρον γὰρ πᾶν διάστημα διαιρετόν. πρὸς τῷ καὶ ἐὰν ὁπωσοῦν ἀφορίσωμεν τὸ πρῶτον καὶ δι' ἐκείνου εὐθεῖαν ἀγάγωμεν, γίνεσθαι τρίγωνον, ἀλλ' οὐ μίαν γωνίαν. **Κάρπος** δὲ ὁ Ἀντιοχεύς ποσὸν μὲν εἶναι φησὶ τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν. καὶ ἐφ' ἐν διεστῶς τοῦτο, μὴ μέντοι διὰ τοῦτο γραμμὴν εἶναι τὴν γωνίαν. οὐ γὰρ πᾶν τὸ ἐφ' ἐν διαστατὸν ὑπάρχειν γραμμὴν. τοῦτο δὲ πάντων παραδοξότατον, εἰ ἔστιν τι μέγεθος ἐφ' ἐν διαστατὸν ἔξω γραμμῆς.

[FR126]

Ἀλλὰ τούτων μὲν ἄδην, τῶν δὲ γωνιῶν τὰς μὲν ἐν ἐπιφανείαις συνίστασθαι λεκτέον, τὰς δὲ ἐν στερεοῖς, καὶ τῶν ἐν ἐπιφανείαις τὰς μὲν ἐν ταῖς ἀπλαῖς, τὰς δὲ ἐν ταῖς μικταῖς. καὶ γὰρ ἐν τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ γένοιτο ἂν γωνία καὶ ἐν τῇ κωνικῇ καὶ ἐν τῇ σφαιρικῇ καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ. τῶν δὲ ἐν ταῖς ἀπλαῖς ἐπιφανείαις αἱ μὲν ἐν ταῖς σφαιρικαῖς, αἱ δὲ ἐν ταῖς ἐπιπέδοις ἔχουσι τὴν σύστασιν. ποιεῖ γὰρ γωνίας καὶ ὁ ζωδιακὸς τέμνων ἰσημερινὸν δύο κατὰ κορυφὰς τῶν τεμνουσῶν περιφερειῶν. καὶ εἰσὶν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας αἱ τοιαύδε γωνίαι. τῶν δὲ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αἱ μὲν ὑπὸ ἀπλῶν περιέχονται γραμμῶν, αἱ δὲ ὑπὸ μικτῶν, αἱ δὲ ὑπὸ ἀμφοτέρων. ἐν γὰρ τῷ θυρεῷ περιέχεται γωνία ὑπὸ τε τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τοῦ θηρεοῦ γραμμῆς. ἀλλὰ τούτων ἡ μὲν μικτὴ ἐστίν, ἡ δὲ ἀπλῇ· καὶ εἰ τέμνοι κύκλος θυρεὸν ἔσται ἡ ὑπὸ τε περιφερείας καὶ τῆς ἐλλείψεως περιεχομένη γωνία. ὅταν δὲ αἱ κισσοειδεῖς γραμμαὶ συννεύουσιν πρὸς ἐν σημεῖον ὥσπερ τὰ τοῦ κισσοῦ φύλλα — καὶ γὰρ τὴν ἐπωνυμίαν ἐκεῖθεν ἔσχον — ποιῶσιν γωνίαν, ὑπὸ μικτῶν ἢ τοιαύτη δῆπου περιέχεται γραμμῶν· καὶ ὅταν ἡ ἵπποπέδη, μία τῶν σπειρικῶν οὔσα, τὰ (?) πρὸς ἄλλην ποιῇ γωνίαν, καὶ ταύτην μικταὶ γραμμαὶ περιέχουσιν. αἱ δὲ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφερείας ὑπὸ ἀπλῶν περιέχονται γραμμῶν. τούτων δ' αὖ πάλιν αἱ μὲν ὑπὸ ὁμοειδῶν περιλαμβάνονται. καὶ γὰρ δύο περιφέρειαι τέμνουσαι ἀλλήλας ἢ ἐφαπτόμεναι ποιοῦσι γωνίας, καὶ αὗται τρισσάς· ἡ γὰρ ἀμφικύρτους,

[FR127]

ὅταν ἐκτὸς ᾗ τὰ κυρτὰ τῶν περιφερειῶν, ἢ ἀμφικοίλους, ὅταν ἀμφότερα τὰ κοῖλα ἐκτὸς ὑπάρχη, ἃς καλοῦσι ξυστροειδεῖς, ἢ μικτὰς ἀπὸ κυρτῆς καὶ κοίλης, ὥσπερ τὰς τῶν μηνίσκων. καὶ μὴν καὶ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφερείας περιέχονται γωνίαι διχῶς· ἢ γὰρ ὑπὸ εὐθείας καὶ κυρτῆς περιφερείας, ὡς ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἢ ὑπὸ εὐθείας καὶ κοίλης ὡς ἡ κερατοειδῆς. αἱ δὲ ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν περιεχόμεναι πᾶσαι εὐθύγραμμοι κληθήσονται τριττὴν ἔχουσαι καὶ αὗται διαφοράν.

Ταύτας τοίνυν ἀπάσας τὰς ἐν ἐπιπέδοις ἐπιφανείαις συνισταμένας ὁ γεωμέτρης ἐν τούτοις ἀφορίζειται, κοινὸν ὄνομα θέμενος αὐταῖς τὸ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, καὶ τὸ μὲν γένος αὐτῶν κλίσιν εἰπών, τὸν δὲ τότε τὸ ἐπιπεδον — καὶ γὰρ αἱ γωνίαι θέσιν ἔχουσιν — τὴν δὲ γένεσιν, ὅτι δύο εἶναι δεῖ γραμμὰς καὶ οὐ τρεῖς τοῦλάχιστον, ὥσπερ ἐπὶ τῆς στερεᾶς, καὶ ταύτας ὁμιλεῖν ἀλλήλαις καὶ ὁμιλούσας μὴ κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ἵνα κλάσις εἴη καὶ περιοχὴ τῶν γραμμῶν, ἀλλὰ μὴ ἐκτασις μόνον καθ' ἐν διάστημα. δοκεῖ δὲ ὁ λόγος οὗτος πρῶτον μὲν ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς οὐ συγχωρεῖν ἀποτελεῖσθαι γωνίαν — καίτοιγε ἡ κισσοειδῆς μία οὕσα ποιεῖ γωνίαν καὶ ἡ ἵπποπέδη. τὴν γὰρ ὅλην κισσοειδῆ καλοῦμεν ἀλλ' οὐ τὰ μόρια αὐτῶν, ἵνα λέγῃ τις, ὅτι ταῦτα ποιεῖ τὴν γωνίαν συννεύοντα, καὶ τὴν ὅλην σπειρικὴν, ἀλλ' οὐ τὰ μέρη. τοίνυν ἑκατέρα μία τυγχάνουσα ποιεῖ γωνίαν αὐτὴ πρὸς ἑαυτήν, οὐ πρὸς ἄλλην — ἔπειτα κλίσιν ἀφορίζόμενος τὴν γωνίαν πλημμελεῖν — πῶς γὰρ μιᾶς οὕσης κλίσεως δύο ἔσονται γωνία; πῶς δὲ ἴσας καὶ ἀνίσους ἔτι γωνίας λέγομεν, καὶ ὅσα ἄλλα πρὸς ταύτην εἴωθεν ὑποφέρεσθαι τὴν δόξαν; — τρίτον δὲ παρέλκειν ἐπὶ τινων γωνιῶν τὸ καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, οἷον ἐπὶ τῶν περιφερογράμμων· καὶ γὰρ ἄνευ τούτου τέλειος ὁ ὁρισμός. ἢ γὰρ πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν τούτων κλίσις ποιήσει τὴν γωνίαν· τὴν ἀρχὴν γὰρ οὐδὲ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι τὰς περιφερεῖς δυνατόν. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς ἀποδόσεως τῆς **Εὐκλείδου** λέγειν ἔχομεν τὰ μὲν ἀφερμεύοντες αὐτήν, τὰ δὲ ἐπαποροῦντες πρὸς αὐτήν.

[FR128]

Def. IX. Ὅταν δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος ἡ γωνία καλεῖται.

Τὴν γωνίαν σύμβολον εἶναί φαμεν καὶ εἰκόνα τῆς συνοχῆς τῆς ἐν τοῖς θείοις γένεσι καὶ τῆς συναγωγῇ τάξεως τῶν διηρημένων εἰς ἐν καὶ τῶν μεριστῶν εἰς τὸ ἀμερὲς καὶ τῶν πολλῶν εἰς συνδετικὴν κοινωνίαν. δεσμὸς γὰρ γίνεται καὶ αὕτη τῶν πολλῶν γραμμῶν καὶ ἐπιπέδων, καὶ συναγωγὸς τοῦ μεγέθους εἰς τὸ ἀμερὲς τῶν σημείων, καὶ συνεκτικὴ παντὸς τοῦ κατ' αὐτὴν ὑφισταμένου σχήματος. διὸ καὶ τὰ λόγια τὰς γωνιακὰς συμβολὰς τῶν σχημάτων συνοχηίδας ἀποκαλεῖ, καθόσον εἰκόνα φέρουσι τῶν συνοχικῶν ἐνώσεων καὶ τῶν συζεύξεων τῶν θείων, καθ' ὅς τὰ διεστῶτα συνάπτουσιν ἀλλήλοις. αἱ μὲν οὖν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις γωνίαι αὐλοτέρας αὐτῶν καὶ ἀπλουστέρας ἀποτυποῦνται καὶ τελειοτέρας ἐνώσεις, αἱ δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς τὰς προϊούσας μέχρι τῶν ἐσχάτων καὶ τοῖς διεσπασμένοις κοινωνίαν καὶ τοῖς πάντῃ μεριστοῖς ὁμοφυῇ σύνταξιν παρεχομένας.

[FR129]

τῶν δὲ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις αἱ μὲν τὰς πρώτας αὐτῶν καὶ ἀμίختους, αἱ δὲ τὰς τῆς ἀπειρίας συνεκτικὰς τῶν ἐν αὐταῖς προόδων ἀπεικονίζονται, καὶ αἱ μὲν τὰς τῶν νοερῶν εἰδῶν ἐνοποιοῦσιν, αἱ δὲ τὰς τῶν αἰσθητῶν λόγων, αἱ δὲ τὰς τῶν μεταξὺ τούτων συνδετικές. αἱ μὲν οὖν περιφερόγραμματοι γωνίαι μιμοῦνται τὰς συνελιπτούσας αἰτίας τὴν νοερὰν ποικιλίαν εἰς ἔνωσιν — νοῦ γὰρ καὶ νοερῶν εἰδῶν αἱ περιφέρειαι συννεύειν ἐπειγόμεναι πρὸς ἑαυτὰς εἰκόνες — αἱ δὲ εὐθύγραμματοι τὰς τῶν αἰσθητῶν προϊσταμένας καὶ τὴν σύνδεσιν τῶν ἐν τούτοις λόγων παρεχομένας, αἱ δὲ μίχται τὰς τε κοινωνίας τῶν τε αἰσθητῶν καὶ τῶν νοερῶν εἰδῶν κατὰ μίαν ἔνωσιν ἀσάλευτον φυλαττούσας.

[FR130]

Δεῖ δὴ πρὸς ταῦτα τὰ παραδείγματα ἀποβλέποντας καὶ τῶν καθ' ἕκαστα τὰς αἰτίας ἀποδιδόναι. καὶ γὰρ παρὰ τοῖς **Πυθαγορείοις** εὐρήσομεν ἄλλας γωνίας ἄλλοις θεοῖς ἀνακειμένας, ὥσπερ καὶ ὁ **Φιλόλαος** πεποίηκε τοῖς μὲν τὴν τριγωνικὴν γωνίαν τοῖς δὲ τὴν τετραγωνικὴν ἀφιερώσας, καὶ ἄλλας ἄλλοις καὶ τὴν αὐτὴν πλείοσι θεοῖς καὶ τῷ αὐτῷ πλείους, κατὰ τὰς διαφόρους ἐν αὐτῷ δυνάμεις ἀνείς. πρὸς ἃ μοι δοκεῖ καὶ ὁ Ἀθηναῖος (?) φιλόσοφος ἀφορῶν κατὰ τὸ τρίγωνον τὸ δημιουργικὸν τὸ πάσης πρωτουργὸν αἴτιον τῆς τῶν στοιχείων διακοσμήσεως ἄλλους μὲν ὑποστήσαι θεοὺς κατὰ τὰς πλευράς, ἄλλους δὲ κατὰ τὰς γωνίας, τοὺς μὲν προόδου καὶ δυνάμεως χορηγούς, τοὺς δὲ τῆς συζεύξεως τῶν ὅλων καὶ τῆς εἰς ἐν πάλιν τῶν προελθόντων συναγωγῆς.

Ταῦτα μὲν οὖν εἰς τὴν τῶν ὄντων ἡμᾶς περιάγει θεωρίαν· εἰ δὲ ἐνταῦθα αἱ γραμμαὶ περιέχουν λέγονται τὴν γωνίαν, θαυμαστὸν οὐδέν· τὸ γὰρ ἐν τούτοις ἐν καὶ τὸ ἀμέριστον ἐπεισοδιῶδες ἐστίν. ἐν δὲ τοῖς θεοῖς καὶ τοῖς ὄντως οὐσι προηγείται τῶν πολλῶν καὶ διηρημένων τὸ ὅλον καὶ ἀμέριστον ἀγαθόν.

[FR131]

Def. X.—XII. Ὅταν δὲ εὐθειᾶ ἐπ' εὐθειᾶν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα γραμμὴ κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν· ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Ταῦτα ἐστὶ τὰ τριπλᾶ τῶν γωνιῶν εἶδη, περὶ ὧν καὶ ὁ ἐν τῇ πολιτείᾳ Σωκράτης φησὶν, ἐξ ὑποθέσεως παρὰ τοῖς γεωμέτραις λαμβανομένων τῆς εὐθυγράμμου κατὰ τὴν εἰς τὰ εἶδη διαίρεσιν ταύτας ὑφιστάσης τὰς γωνίας, τὴν ὀρθήν, τὴν ἀμβλεῖαν, τὴν ὀξεῖαν, τῆς μὲν κατὰ τὸ ἴσον καὶ τὸ ταῦτόν καὶ ὅμοιον ἀφωρισμένης, τῶν δὲ κατὰ τὸ μείζον καὶ ἔλασσον καὶ ὅλως τὸ ἄνισον καὶ τὴν ἑτερότητα καὶ τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον ἀορίστως ὑφισταμένων. οἱ μὲν οὖν πολλοὶ γεωμέτραι τῆς διαίρεσεως ταύτης οὐκ ἔχουσιν ἀποδιδόναι λόγον, ἀλλ' ὑποθέσει χρῶνται καὶ ταύτη, τρεῖς εἶναι γωνίας. ἐπειδὴν δὲ τὴν αἰτίαν αὐτοὺς ἀνερωτήσωμεν, οὐ φασὶ χρῆναι ταῦτα παρ' αὐτῶν ἀπαιτεῖν. οἱ δὲ **Πυθαγορικοὶ** τῆς τριπλῆς διανομῆς ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναφέροντες τὴν λύσιν οὐκ ἀποροῦσιν αἰτίας ἀποδιδόναι

καὶ ταύτης τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν. ἐπειδὴ γὰρ τῶν ἀρχῶν ἡ μὲν κατὰ τὸ πέρας ὑφέστηκεν καὶ ἐστὶν ὅρου καὶ ταυτότητος αἰτία τοῖς ἀποτελέσμασι καὶ ἰσότητος καὶ πάσης τῆς ἀμείνωνος συστοιχείας, ἡ δὲ ἄπειρόν ἐστι καὶ δίδωσι τὴν ἐπ' ἄπειρον πρόοδον καὶ αὕξησιν καὶ μείωσιν καὶ ἀνισότητα καὶ παντοίαν ἑτερότητα τοῖς γεννωμένοις ἐφ' ἑαυτῆς, καὶ ὅλως ἐξηγεῖται τῆς καταδεεστέρας σειρᾶς· εἰκότως δὴ διὰ ταῦτα καὶ τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν κατ' ἐκείνας ὑφισταμένων ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἦκων λόγος τὴν ὀρθὴν ἀπετέλεσεν γωνίαν μίαν ἰσότητι κρατουμένην καὶ ὁμοιότητι πρὸς πᾶσαν ὀρθὴν καὶ ὠρισμένην αἰεὶ καὶ τὴν αὐτὴν ἐστῶσαν καὶ μήτε αὕξησιν μήτε μείωσιν ἐπιδεχομένην, ὁ δὲ ἀπὸ τῆς ἀπειρίας δεύτερος ὢν καὶ δυαδικὸς καὶ γωνίας ἀνέφηνε διπλᾶς περὶ τὴν ὀρθὴν ἀνισότητι διηρημένas κατὰ τὸ μείζον καὶ ἔλασσον καὶ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἥσσον ἀπέραντον ἐχούσας κίνησιν τῆς μὲν ἀμβλυνομένης μᾶλλον καὶ ἥττον, τῆς δὲ ὀξυνομένης. διὰ δὴ ταῦτα καὶ τῶν θείων διακόσμων καὶ τῶν μερικωτέρων δυνάμεων τὰς μὲν ὀρθὰς γωνίας εἰς τοὺς ἀχράντους ἀναπέμπουσιν ὥς τῆς ἀκλίτου προνοίας τῶν δευτέρων αἰτίους — τὸ γὰρ ὀρθὸν καὶ τὸ ἀκλινὲς πρὸς τὰ χείρονα καὶ ἄτρεπτον ἐκείνοις προσήκει τοῖς θείοις — τὰς δὲ ἀμβλείας καὶ ὀξείας τοῖς τῆς προόδου καὶ τοῖς τῆς κινήσεως καὶ τῆς ποικιλίας τῶν δυνάμεων χορηγοῖς ἀνεῖσθαι λέγουσι· τό τε γὰρ ἀμβλὺ τῆς ἐπὶ πᾶν ἀπλουμένης τῶν εἰδῶν ἐκτάσεως ἐστὶν εἰκὼν, καὶ τὸ ὅξυ τῆς διαιρετικῆς καὶ κινητικῆς τῶν ὅλων αἰτίας ἀφομοίωσιν ἔλαχεν. καὶ μὴν καὶ ἐν αὐτοῖς τοῖς οὖσιν τῇ μὲν οὐσίᾳ ἡ ὀρθότης τὸν αὐτὸν ὅρον τοῦ εἶναι φυλάττουσα προσέεικε, τοῖς δὲ συμβεβηκόσιν ἢ τε ἀμβλεῖα καὶ ἡ ὀξεῖα. ταῦτα γὰρ δέχεται τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον καὶ ἀορίστως μεταβάλλοντα οὐδέποτε παύεται. ὀρθῶς ἄρα καὶ τῇ ψυχῇ παρακελεύονται τὴν κάθοδον τὴν εἰς γένεσιν ποιῆσθαι κατὰ τὸ ἀκλινὲς τοῦτο τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶδος μὴ ῥεπούση πρὸς τάδε μᾶλλον ἢ τάδε, μηδὲ προσπασχούση μᾶλλον ἄλλοις καὶ ἥττον. ὁ γὰρ τῆς συμπαθείας μερισμὸς εἰς τὴν ἔνυλον αὐτὴν κατάγει πλημμέλειαν καὶ τὴν ἀοριστίαν. σύμβολον οὖν καὶ ἡ κάθετός ἐστὶν ἀρρεψίας, καθαρότητος, ἀχράντου δυνάμεως, ἀκλινοῦς, πάντων τῶν τοιούτων. ἐστὶ δὲ καὶ μέτρου θείου καὶ νοεροῦ σύμβολον. διὰ γὰρ καθέτων καὶ τὰ ὕψη τῶν σχημάτων ἀναμετροῦμεν καὶ τῇ πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀναφορᾷ τὰς ἄλλας εὐθυγράμμους γωνίας ὀρίζομεν αὐτὰς ἀφ' ἑαυτῶν ἀορίστους οὖσας. ἐν ὑπερβολῇ γὰρ καὶ ἐλλείψει θεωροῦνται τούτων δὲ ἑκατέρω καθ' αὐτὴν ἀπέραντός ἐστι. διὸ καὶ τὴν ἀρετὴν κατὰ τὴν ὀρθότητά φασιν ἐστάναι, τὴν καὶ δὲ κακίαν κατὰ τὴν ἀοριστίαν τῆς ἀμβλείας καὶ ὀξείας ὑφίστασθαι καὶ μερίζεσθαι τὰς ἐνδείας καὶ ὑπερβολὰς καὶ τῷ μᾶλλον καὶ ἥττον δεικνύναι τὴν ἑαυτῆς ἀμετρίαν. τελειότητος ἄρα καὶ ἀκλινοῦς ἐνεργείας καὶ ὅρου νοεροῦ καὶ πέρατος καὶ τῶν τούτοις ὁμοίων εἰκόνα θησόμεθα τὴν ὀρθότητα τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν, τὴν δὲ ἀμβλεῖαν καὶ ὀξεῖαν ἀορίστου κινήσεως καὶ ἀσχέτου προόδου καὶ διαιρέσεως καὶ μερισμοῦ καὶ ὅλως ἀπειρίας.

Τοσαῦτα περὶ τούτων. δεῖ δὲ τοῖς ὀρισμοῖς τῆς τε ἀμβλείας καὶ ὀξείας προστιθέναι τὸ γένος. ἐστὶ γὰρ ἑκατέρω εὐθύγραμμος, ἡ μὲν μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐλάσσων. ἀλλ' οὐχ ἀπλῶς ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς ὀξεῖα ἐστὶ. καὶ γὰρ ἡ κερ-

[FR132]

[FR133]

[FR134]

ατοειδῆς πάσης ἐστὶν ὀρθῆς ἐλάσσων, ὅπου γε καὶ ὀξείας, ἀλλ' οὐκ ὀξεῖα, καὶ ἢ τοῦ ἡμικυκλίου πάσης ὀρθῆς ὡσαύτως ἐλάσσων, ἀλλ' οὐκ ἔστιν ὀξεῖα. τὸ δὲ αἴτιον, ὅτι καὶ μικταὶ εἰσι καὶ οὐκ εὐθύγραμμοι. καὶ μὲν δὴ καὶ τῶν περ-
 ιφερογράμμων πολλὰ μείζους ἂν φανείεν ὀρθῶν ἀλλ' οὐκ εἰσὶν ἀμβλεῖαι διὰ
 τοῦτο. δεῖ γὰρ εὐθύγραμμον εἶναι τὴν ἀμβλεῖαν. τοῦτό τε οὖν ἐπισημαίνομαι
 καὶ ὅτι τὴν ὀρθὴν ἀφορίσασθαι προθέμενος ἔλαβεν εὐθεῖαν ἐπὶ τινος εὐθείας
 ἐστῶσαν καὶ ποιοῦσαν ἴσας ἀλλήλαις ἀλλήλαις τὰς ἐφεξῆς, τὴν δὲ ἀμβλεῖαν καὶ
 τὴν ὀξεῖαν οὐκέτι λαβὼν εὐθεῖαν ἐπὶ θάτερα κεκλιμένην ἀποδίδωσιν, ἀλλ' ἐκ
 τῆς πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀναφορᾶς. μέτρον γὰρ αὕτη καὶ τῶν μὴ ὀρθῶν, ὅσπερ ἢ
 ἰσότης καὶ τῶν ἀνίσων. αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐγκεκλιμέναι ἄπειροι ἦσαν καὶ οὐ μία
 μόνον, ὡσπερ ἢ κάθετος. ἐπὶ δὲ τούτοις το γωνίας εἶπεῖν „ἀλλήλαις ἴσας“ τῆς
 γεωμετρικῆς ἀκριβείας εἶναι τίθεμαι. δυνατόν γὰρ ἂν ἦν καὶ ἴσας εἶναι γωνίας
 ἄλλαις καὶ μὴ ὀρθὰς ἀλλήλαις. διὸ ἴσας οὕσας ἀναγκαῖον εἶναι ὀρθὰς. καὶ τὸ
 „ἐφεξῆς“ προστεθὲν οὐ φαίνεται μοι παρέλκειν, ὥς γε [?] οὐ καλῶς τισιν ἔδοξεν,
 ἀλλ' ἐνδείκνυσθαι τὸν λόγον τῆς ὀρθότητος. διὰ τοῦτο γὰρ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν
 γωνιῶν, ὅτι ἐφεξῆς οὕσαι ἴσαι εἰσὶ, τῆς ἐφεστῶσης εὐθείας διὰ τὴν ἀρρεψίαν ἐπὶ
 θάτερα τῆς ἰσότητος ἀμφοτέραις καὶ τῆς ὀρθότητος ἑκατέρᾳ γενομένης αἰτίας.
 οὐχ ἀπλῶς οὖν ἢ πρὸς ἀλλήλας ἰσότης ἀλλ' ἢ ἐφεξῆς θέσις μετὰ τῆς ἰσότητος
 αἰτία τῆς τῶν γωνιῶν ὀρθότητος.

[FR135]

Ἐπὶ πᾶσι δὴ οὖν ἀξιῶ μεμνησθαι τῆς τοῦ στοιχειωτοῦ κἀνταῦθα προθέσεως,
 ὅτι περὶ τῶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ συνισταμένων ποιεῖται τὸν λόγον ὥστε οὐδὲ καθέτου
 πάσης οὗτος ὁ ὅρος ἐστίν, ἀλλὰ τῆς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. τὴν δὲ στερεὰν
 λεγομένην οὐκ ἦν καιρὸς ἀφορίζεσθαι νῦν. ὡσπερ οὖν τὴν ἐπίπεδον ὠρίσατο
 γωνίαν, οὕτω καὶ κάθετον τὴν τοιαύτην, ἐπεὶ ἢ γε στερεὰ κάθετος οὐ πρὸς μίαν
 μόνον εὐθεῖαν ὀφείλει ποιεῖν ὀρθὰς γωνίας, ἀλλὰ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας
 αὐτῆς καὶ οὕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. τοῦτο γὰρ ἴδιον ἐκείνης.

[FR136]

Def. XIII. Ὅρος ἐστὶν ὃ τινός ἐστι πέρας.

Τὸν ὅρον οὐ πρὸς πάντα ἀναφέρειν δεῖ τὰ μεγέθη — καὶ γὰρ γραμμῆς ὅρος
 ἐστὶ καὶ πέρας — ἀλλὰ πρὸς τὰ χωρία τὰ ἐν ἐπιφανείαις καὶ τὰ στερεά. νῦν γὰρ
 ὅρον καλεῖ τὴν περιοχὴν τὴν ἀφορίζουσαν ἕκαστον χωρίον, καὶ πέρας ἀφορίζεται
 τοῦτον τὸν τρόπον οὐχ ὥς τὸ σημεῖον λέγεται πέρας γραμμῆς, ἀλλ' ὥς τὸ
 περικλεῖον ταὶ περιεῖργον ἀπὸ τῶν περικειμένων. ἐστὶ δὲ τὸ ὄνομα οἰκεῖον τῇ ἐξ
 ἀρχῆς γεωμετρίας, καθ' ἣν τὰ χωρία ἐμέτρουν καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἐφύλαττον
 ἀσυγχύτους, ἀφ' ἧς καὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης εἰς ἐπίνοιαν ἦλθον. τὴν τοίνυν
 περιοχὴν τὴν ἔξωθεν ὅρον καλέσας ὁ στοιχειωτῆς εἰκότως αὐτὴν καὶ πέρας
 ἀφωρίσατο τῶν χωρίων. διὰ γὰρ ταύτης ἕκαστον τῶν περιεχομένων περατοῦται.
 λέγω δὲ οἶον ἐπὶ τοῦ κύκλου τὴν μὲν περιφέρειαν ὅρον καὶ πέρας, αὐτὸ δὲ τὸ
 ἐπίπεδόν τι χωρίον. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως.

Def. XIV. Σχήμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα λέγεται πολλαχῶς καὶ κατ' εἶδη διάφορα διαιρεῖται, δεῖ πρῶτον τὰς διαφορὰς αὐτοῦ θεωρήσαντας οὕτω ἐπὶ τοῦ προκειμένου σχήματος ἐν τῷ ὁρισμῷ διελθεῖν. ἔστι μὲν οὖν τι σχῆμα καὶ κατὰ τροπὴν ὑφιστάμενον καὶ ἀπὸ πάθους ἐγγινόμενον πληττομένων ἢ διαιρουμένων ἢ ἀφαιρουμένων ἢ προσθήκας δεχομένων ἢ ἀλλοιουμένων τῶν σχηματιζομένων ἢ ἄλλα παθήματα ποικίλα πασχόντων. ἔστι δὲ καὶ ἀπὸ τέχνης οἷον πλαστικῆς ἢ ἀνδριαντοποιητικῆς ἀπογεννώμενον κατὰ τὸν ἐν τῇ τέχνῃ προυπάρχοντα λόγον, τῆς μὲν τέχνης προβαλλούσης τὸ εἶδος, τῆς δὲ ὕλης δεχομένης τὴν μορφήν καὶ τὸ κάλλος καὶ τὴν εὐσχημοσύνην ἐκεῖθεν. ἔστι δὲ τούτων ἔτι σεμνότερα καὶ διαπρεπέστερα σχήματα, φύσεως δημιουργήματα, τὰ μὲν ἐν τοῖς ὑπὸ σελήνην στοιχείοις συνεκτικὰ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων, τὰ δὲ κατ' οὐρανὸν τὰς τε δυνάμεις αὐτῶν ἀφορίζοντα καὶ τὰς κινήσεις. καὶ γὰρ καθ' ἑαυτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα τὰ οὐράνια σώματα πολλὴν καὶ θαυμαστὴν προτείνει σχημάτων ποικιλίαν καὶ ἄλλοτε ἄλλας δείκνυσι μορφὰς εἰκόνα φερούσας τῶν νοερῶν εἰδῶν, καὶ ταῖς εὐρύθμοις ἑαυτῶν χορείαις ἀπογράφεται τὰς ἀσωμάτων καὶ αὐλῶν τῶν σχημάτων δυνάμεις. ἔστι δ' αὖ καὶ τούτων ἐπέκεινα κάλλει καθαρώτατα καὶ τελειότατα τὰ σχήματα τῶν ψυχῶν ζωῆς ὄντα μεστὰ καὶ αὐτοκίνητα προὔφρεστώτα τῶν ἑτεροκινήτων καὶ αὐλῶν καὶ ἀδιαστάτως ὄντα πρὸ τῶν διαστατῶν καὶ ἐνύλων, περὶ ὧν καὶ ὁ Τίμαιος ἡμᾶς ἀνεδίδαξε τὸ δημιουργικὸν καὶ οὐσιῶδες σχῆμα τῶν ψυχῶν ἀναπλώσας. ἔστι γε μὴν καὶ τῶν ψυχικῶν σχημάτων τὰ νοερὰ πολὺ θειότερα πάντη μὲν ὑπερέχοντα τῶν μεριστῶν οὐσιῶν, πάντη δὲ διαλάμποντα τῷ ἀμερίστῳ καὶ νοερῷ φωτί, γόνιμα δὲ καὶ δραστήρια καὶ τελεσιουργὰ τῶν ὄλων καὶ πᾶσιν ἐξ ἴσου παρόντα καὶ ἐν αὐτοῖς μονίμως ἐστώτα καὶ τοῖς μὲν ψυχικοῖς σχήμασι τὴν ἔνωσιν ἐπάγοντα, τῶν δὲ αἰσθητῶν τὴν παράλλαξιν εἰς τὸν οἰκεῖον ὅρον ἀνακαλούμενα. ἔστιν δ' ἄρα καὶ τούτων ἀνάντων ἐξηρμένα τὰ τέλεια καὶ ἐνοειδῆ καὶ ἀγνωστα καὶ ἄφραστα σχήματα τῶν θεῶν, ἐποχούμενα μὲν τοῖς νοεροῖς σχήμασι, περατοῦντα δὲ ἠνωμένως τὰ ὅλα σχήματα, συνέχοντα δὲ τὰ πάντα τοῖς ἑαυτῶν ἐνιαίοις ὅροις, ὧν καὶ ἡ θεουργία τὰς ιδιότητας ἀποτυπουμενὴ τοῖς τῶν θεῶν ἀγάλμασιν ἄλλα ἄλλοις περιβάλλει σχήματα. καὶ τὰ μὲν διὰ τῶν χαρακτήρων ἀρρήτως ἀπεικάζεται — καὶ γὰρ οὗτοι τὰς ἀγνώστους δυνάμεις τῶν θεῶν ἐκφαίνουσιν — τὰ δὲ διὰ τῶν μορφωμάτων καὶ τῶν τύπων ἀπομιμεῖται, τὰ μὲν ἐστώτα τὰ δὲ καθήμενα ποιοῦσα καὶ τὰ μὲν καρδιοειδῆ τὰ δὲ σφαιροειδῆ τὰ δὲ ἄλλως σχηματιζόμενα καὶ τὰ μὲν ἀπλᾶ τὰ δὲ σύνθετα ἐκ πλειόνων μορφῶν καὶ τὰ μὲν σεμνὰ τὰ δὲ ἥμερα καὶ τό ἴλεον προτείνοντα τῶν θεῶν τὰ δὲ βλοσυρὰ κατασκευάζουσα σύμβολά τε ἄλλα ἄλλοις προσάγουσα κατὰ τὴν πρὸς τοὺς θεοὺς ἀνήκουσαν συγγένειαν. ἄνωθεν ἄρα τό σχῆμα ἀρχόμενον ἀπ' αὐτῶν τῶν θεῶν διατείνει μέχρι τῶν ἐσχάτων καὶ τούτοις ἐμφανταζόμενον ἀπὸ τῶν πρωτίστων αἰτίων. δεῖ γὰρ πρὸ τῶν ἀτελῶν ὑφεστάναι τὰ τέλεια καὶ τῶν ἐν ἄλλοις ὄντων τὰ ἐφ' ἑαυτῶν

[FR137]

[FR138]

ἰδρυμένα καὶ τῶν ἀναπεπλησμένων τῆς ἑαυτῶν στερήσεως τὰ τὴν οἰκεῖαν φύσιν εἰλικρινῇ διασώζοντα.

[FR139]

Τὰ μὲν οὖν ἔνυλα σχήματα με τέχει τῆς ὑλικῆς ἀσχημοσύνης καὶ οὐκ ἔχει τὴν προσήκουσαν αὐτοῖς καθαρότητα, τὰ δὲ οὐράνια μεριστά ἐστι καὶ ἐν ἄλλοις ὑφέστηκε, τὰ δὲ ψυχικὰ διαιρέσεως καὶ ποικιλίας μετείληφεν καὶ ἀνελίξεως παντοίας, τὰ δὲ νοερὰ μετὰ τῆς ἐνώσεως ἔχει τὴν εἰς πλῆθος πρόοδον, αὐτὰ δὲ τὰ τῶν θεῶν καὶ ἀπόλυτα καὶ ἐνοειδῆ καὶ ἀπλᾶ καὶ γεννητικὰ πρὸ τῶν ὅλων ὑφέστηκεν, ἐν ἑαυτοῖς πᾶσαν ἔχοντα τὴν τελειότητα καὶ ἀφ' ἑαυτῶν τοῖς πᾶσι προτείνοντα τὴν τελεσιουργίαν τῶν εἰδῶν. οὐκ ἄρα ἡμεῖς ἀνεξόμεθα τῶν πολλῶν λεγόντων, ὅτι τὰ αἰσθητὰ σχήματα προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις καὶ ἀλλοιώσεις τινὲς ἀπογεννῶσιν. οὐ γὰρ ἂν αἱ κινήσεις ἀτελεῖς οὔσαι τὴν ἀρχικὴν αἰτίαν καὶ πρωτουργὸν ἔχοιεν τῶν ἀποτελεσμάτων, οὐδ' ἂν ἐκ τῶν ἐναντίων τὰ αὐτὰ πολλάκις ἀποτελοῖτο σχήματα — καὶ γὰρ ἐκ προσθέσεως γένοιτο ἂν καὶ ἀφαιρέσεως ἢ αὐτὴ μορφή — ἀλλὰ ταῦτα θησόμεθα δουλεύειν ἄλλοις εἰς τὴν γένεσιν, καὶ τὸ τέλος αὐτοῖς ἀπ' ἄλλων τῶν προηγουμένων αἰτιῶν ἀφορίζεσθαι φήσομεν. οὐδ' ἄρα τὰ μὲν αἶνλα σχήματα ἀνυπόστατά ἐστι, τὰ δὲ ἐν τῇ ὕλῃ μόνον ὑφέστηκεν, ὥς πού φασί τινες, ἀλλ' οὐδ' ὥς ἕτεροι λέγουσιν, ἔστι μὲν ἔξω τῆς ὕλης κατ' ἐπίνοιαν δὲ μόνην καὶ κατὰ ἀφαίρεσιν ἔχει τὴν ὑπόστασιν. ποῦ γὰρ ἡ ἀκρίβεια καὶ τὸ κάλλος καὶ ἡ τάξις ἢ τῶν σχημάτων ἐν τοῖς ἔξ ἀφαιρέσεως σώζεσθαι δύναται; τοιαῦτα μὲν γὰρ ὄντα, οἷα τὰ αἰσθητὰ, πάμπλου τῆς ἀνελέγχτου καὶ εἰλικρινοῦς ἀκριβείας ἀπολείπεται, προσλαμβάνοντα δὲ τὸ ἀκριβὲς καὶ τὸ τεταγμένον καὶ τὸ τέλειον πόθεν ταῦτα προσλήπεται; ἢ γὰρ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν — ἀλλ' οὐκ ἦν ἐν ἐκείνοις — ἢ ἀπὸ τῶν νοητῶν (ἐστίν;) — ἀλλὰ τελειότερον ἐν ἐκείνοις — τὸ γὰρ ἀπὸ τοῦ μὴ ὄντος λέγειν πάντων ἀδυνάτωτάτον ἐστίν. οὐ γὰρ που τὰ μὲν ἀτελεῖ παρήγαγεν ἡ φύσις, τὰ δὲ τέλεια ἀνυπόστατα ἀφῆκεν, οὐδὲ θέμις τὴν ἡμετέραν ψυχὴν ἀκριβέστερα καὶ τελειότερα καὶ μᾶλλον τεταγμένα τοῦ νοῦ καὶ τῶν θεῶν ἀπογεννᾶν. εἰσὶν ἄρα πρὸ τῶν αἰσθητῶν οἱ αὐτοκίνητοι λόγοι τῶν σχημάτων καὶ οἱ νοεροὶ καὶ θεῖοι καὶ ἡμεῖς ἀνακινούμεθα μὲν ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν, προβάλλομεν δὲ τοὺς ἔνδον λόγους, εἰκόνας ἄλλων ὄντας, καὶ διὰ τούτων τὰ μὲν αἰσθητὰ παραδειγματικῶς, τὰ δὲ νοερὰ καὶ θεῖα γινώσκουμεν εἰκονικῶς. ἀναπλούμενοι γὰρ οἱ ἐν ἡμῖν λόγοι τὰς μορφὰς τῶν θεῶν ἐπιδεικνύουσι καὶ τὰ ἐνοειδῆ τῶν ὅλων πέρατα, δι' ὧν ἀρρήτως εἰς ἑαυτοὺς ἐπιστρέφουσι πάντα καὶ συνέχουσιν ἐν ἑαυτοῖς. ἐν μὲν οὖν *[sic.]* τοῖς θεοῖς καὶ γινώσις ἐστίν ὑπερφυῆς τῶν ὅλων σχημάτων καὶ δύναμις γεννητικὴ καὶ ὑποστατικὴ τῶν δευτέρων ἀπάντων, ἐν δὲ ταῖς φύσεσι ποιητικὴν μὲν ἔχει τῶν φαινομένων τὰ σχήματα δύναμιν, γνώσεως δὲ καὶ τῆς νοερᾶς εἰδήσεως παρήρηται, ἐν δὲ ταῖς μερικαῖς ψυχαῖς ἢ μὲν αἶνλος νόησις ἐστὶ καὶ ἢ αἰτενέργητος γινώσις, ἢ δὲ γόνιμος αἰτία καὶ δραστήριος οὐκ ἔστιν. ὥσπερ οὖν ἢ φύσις ποιητικῶς τῶν αἰσθητῶν σχημάτων προέστηκεν, οὕτως ἢ ψυχὴ κατὰ τὸ γνωστικὸν ἐνεργοῦσα προβάλλει περὶ τὴν φαντασίαν ὥσπερ εἰς κάτοπτρον τοὺς τῶν σχημάτων λόγους, ἢ δ' ἐν εἰδώλοις αὐτὰ δεχομένη καὶ ἐμφάσεις ἔχουσα τῶν

[FR140]

[FR141]

ἐνδον ὄντων διὰ τούτων τῇ ψυχῇ παρέχεται τὴν εἰς τὸ εἶσω στροφὴν καὶ πρὸς ἑαυτὴν τὴν ἀπὸ τῶν εἰδώλων ἐνέργειαν· οἷον εἴ τις ἑαυτὸν ὁρῶν ἐν κατόπτρῳ καὶ θαυμάσας τὴν τῆς φύσεως δύναμιν καὶ τὴν ἑαυτοῦ μορφὴν ἑαυτὸν ἰδεῖν θελήσειεν καὶ λάβοι δύναμιν τοιαύτην, ὥστε ὅλως ὁρῶν καὶ ὁρατὸν ἀποτελεσθῆναι. καὶ γὰρ ψυχὴ τοῦτον τὸν τρόπον ἔξω ἑαυτῆς εἰς φαντασίαν βλέπουσα καὶ ἐσκιαγραφημένα σχήματα θεωμένη καὶ τὸ κάλλος αὐτῶν ἐκπλαγεῖσα καὶ τὴν τάξιν ἄγαται τοὺς ἑαυτῆς λόγους, ἀφ' ὧν καὶ ταῦτα, καὶ ἀγασθεῖσα τὸ μὲν τούτων κάλλος ὡς ἐν εἰδώλοις φερόμενον ἀφίησι, ζητεῖ δὲ τὸ ἑαυτῆς, καὶ εἰς τὸ εἶσω παρελθεῖν ἐθέλει, καὶ τὸν κύκλον ἐκεῖ καὶ τὸ τρίγωνον ἰδεῖν, καὶ πάντα ἀμερῶς καὶ ἐν ἀλλήλοις πάντα, καὶ ἐν (?) γενέσθαι πρὸς τὰ ὁρώμενα, καὶ συμπτύξαι τὸ πλῆθος, καὶ τὰ ἐν τοῖς ἀγγείοις τῶν θεῶν καὶ ἀδύτοις κρύφια καὶ ἄρρητα σχήματα θεάσασθαι καὶ ἐκφῆναι τὴν ἀκαλλώπιστον τῶν θεῶν εὐμορφίαν καὶ κύκλον ἰδεῖν κέντρου παντὸς ἀμερέστερον καὶ τρίγωνον ἀδιάστατον καὶ τῶν ἄλλων ἕκαστον εἰς ἑνωσιν γνωστὸν ἀνῆκον. ἐστὶν δὲ οὖν τὸ μὲν αὐτοκίνητον σχῆμα πρὸ τοῦ ἑτεροκινήτου, τὸ δὲ ἀμέριστον πρὸ τοῦ αὐτοκινήτου, τὸ δὲ ἐνὶ ταῦτον πρὸ τοῦ ἀμερίστου. πάντα γὰρ εἰς τὰς ἐνάδας ἀνίοντα τελευτᾷ, καὶ γὰρ πᾶσιν ἐκεῖθεν ἢ εἰς τὸ εἶναι πάροδος.

[FR142]

Ἀλλὰ ταῦτα μὲν κατὰ τὸ **Πυθαγόρειον** ἀρέσκον ἐμηκύναμεν, ὁ δὲ γεωμέτρης τὸ ἐν τῇ φαντασίᾳ σχῆμα θεωρῶν καὶ τοῦτο πρῶτως ὀριζόμενος, εἰ καὶ τοῖς αἰσθητοῖς ὁ λόγος ἐφαρμόττει δευτέρως, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον φησιν εἶναι τὸ σχῆμα. σὺν ὕλῃ γὰρ ἤδη λαβὼν αὐτὸ καὶ ὡς διαστατὸν φανταζόμενον εἰκότως πεπερασμένον καὶ ὠρισμένον ἀποκαλεῖ. πᾶν γὰρ τὸ ὕλην ἔχον ἢ νοητὴν ἢ αἰσθητὴν ἀλλαχόθεν ἔχει τὸν ὅρον καὶ οὐκ αὐτὸ πέρας ἐστίν, ἀλλὰ πεπερασμένον, οὐδὲ ἑαυτοῦ ὅρος, ἀλλ' ἄλλο μὲν ἐν αὐτῷ τὸ ὀρίζον, ἄλλο δὲ τὸ ὀριζόμενον, οὐδὲ ἐν αὐτῷ ἐστίν, ἀλλὰ ὑπ' αὐτοῦ περιέχεται. τῷ γὰρ ποσῷ συμφύεται καὶ μετ' ἐκείνου συνυφίσταται καὶ γίνεται αὐτῷ ὑποκείμενον τὸ ποσόν. λόγος δὲ ἐκείνου καὶ μορφή τὸ σχῆμα καὶ εἶδος. περατοῖ γὰρ αὐτὸ καὶ χαρακτῆρα καὶ ὅρον αὐτῷ τοιόνδε προστίθῃσιν, ἢ ἀπλοῦν ἢ σύνθετον. ἐπεὶ γὰρ καὶ αὐτὸ τὴν τοῦ πέρατος καὶ ἀπείρου δυοειδῆ πρόοδον ἐν τοῖς οἰκείοις εἶδεσι προτείνει, καθάπερ δὴ καὶ ὁ τῆς γωνίας λόγος, τὸν μὲν ἑνα ὅρον καὶ τὸ ἀπλοῦν εἶδος ἐπάγει τοῖς ὑφ' ἑαυτοῦ περιεχομένοις κατὰ τὸ πέρας, τοὺς δὲ πολλοὺς κατὰ τὴν ἀπειρίαν. καὶ διὰ τοῦτο πᾶν τὸ ἐσχηματισμένον ἢ ἐνὸς ὅρου μετέληφεν ἢ πλειόνων. ὁ μὲν οὖν **Εὐκλείδης** τὸ ἐσχηματισμένον σχῆμα καλῶν καὶ τὸ ἔνυλον καὶ τῷ ποσῷ συνυπάρχον περιεχόμενον εἰκότως αὐτὸ προσειρήκεν, ὁ δὲ **Ποσειδώνιος** πέρας συγκλεῖον ἀφορίζει τὸ σχῆμα τὸν λόγον τοῦ σχήματος χωρίζων τῆς ποσότητος καὶ αἴτιον αὐτὸν εἶναι τιθέμενος τοῦ ὠρίσθαι καὶ πεπεράσθαι καὶ τῆς περιοχῆς. τὸ γὰρ κλεῖον ἕτερόν ἐστι τοῦ συγκλειομένου καὶ τὸ πέρας τοῦ πεπερασμένου, καὶ δοκεῖ πως ὁ μὲν εἰς τὸν ἔξωθεν περιεχόμενον ὅρον ἀποβλέπειν, ὁ δὲ εἰς ὅλον τὸ ὑποκείμενον, ὥστε τὸν κύκλον ὁ μὲν ἑρεῖ καθ' ὅλον τὸ ἐπίπεδον εἶναι σχῆμα καὶ τὴν ἔξω περιοχὴν, ὁ δὲ κατὰ τὴν περιφέρειαν. ἐνδείκνυται δὲ ὁ μὲν ὅτι τὸ ἐσχηματισμένον ἀφορίζεται καὶ σὺν

[FR143]

τῷ ὑποκειμένῳ θεωρούμενον, ὃ δὲ ὅτι τὸν λόγον τοῦ σχήματος αὐτὸν τὸν περατοῦντα καὶ συγκλείοντα τὸ ποσὸν ἐμφανίζειν ἐθέλει. εἰ δέ τις λογικὸς ἀνὴρ καὶ κομψὸς αἰτιῶτο τὸν **Εὐκλείδιον** λόγον ὥς ἀπὸ τῶν εἰδῶν τὸ γένος ἀφορίζομενον — τὸ γὰρ ὑφ' ἑνὸς ὅρου περιεχόμενον καὶ τὸ ὑπὸ πλειόνων εἶδη τοῦ σχήματος — λεκτέον ἂν εἶναι πρὸς αὐτόν, ὅτι κατὰ γένη τὰς δυνάμεις προεῖληφεν τῶν εἰδῶν ἐν ἑαυτοῖς. καὶ ὅταν ἀπὸ τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τοῖς γένεσιν ἐθέλωσιν αὐτὰ σαφῆ ποιεῖν, οἱ παλαιοὶ δοκοῦσι μὲν ἀπὸ τῶν εἰδῶν ἐπιχειρεῖν, κατὰ δὲ τὸ ἀληθὲς αὐτὰ ἀφ' ἑαυτῶν ἀναδιδάσκουσι καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς δυνάμεων.

[FR144]

Ὁ τοίνυν λόγος τοῦ σχήματος εἷς ὢν περιέχει τὰς τῶν πολλῶν σχημάτων διαφορότητας κατὰ τὸ μέρας τὸ ἐν αὐτῷ καὶ τὸ ἄπειρον, καὶ ὁ τοῦτον ὀρίζομενος οὐκ ἂν ἄτοπος εἴη διὰ τοῦ ὀρισμοῦ τὰς διαφορὰς τῶν ἐν αὐτῷ δυνάμεων περιλαμβάνων. ἀλλὰ πόθεν πρόεισιν ὁ τοῦ σχήματος λόγος καὶ ἀπὸ ποίων αἰτίων τελειοῦται; λέγω δὴ, ὅτι πρῶτον μὲν ἐκ τοῦ πέρατος ὑφίσταται καὶ τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ ἐκ τούτων μεμιγμένου, διὸ καὶ αὐτὸς τὰ μὲν ἀπογεννᾷ κατὰ τὸ πέρας τῶν εἰδῶν, τὰ δὲ κατὰ τὸ ἄπειρον, τὰ δὲ κατὰ τὸ μικτόν, τοῖς μὲν περιφερέσι τὴν τοῦ πέρατος ἰδέαν ἐπάγων, τοῖς δὲ εὐθυγράμμοις τὴν τοῦ ἀπείρου, τοῖς δὲ ἐκ τούτων τὴν τοῦ μικτοῦ. δεύτερον δὲ ἀπὸ τῆς ὁλότητος τελειοῦται τῆς εἰς τὰ ἀνόμοια μέρη διακρινομένης, ὅθεν δὴ καὶ αὐτὸς ἐκάστω τῶν εἰδῶν ἐπιφέρει τὸ ὅλον, καὶ τῶν σχημάτων ἕκαστον εἰς διάφορα αὐτῶν εἶδη τέμενται. καὶ γὰρ ὁ κύκλος εἰς ἀνόμοια τῷ λόγῳ καὶ ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων διαιρετόν ἐστιν, ὃ καὶ αὐτὸς ὁ στοιχειωτὴς ἐν ταῖς διαιρέσεσι πραγματεύεται τὸ μὲν εἰς ὅμοια τὰ δοθέντα σχήματα διαιρῶν, τὸ δὲ εἰς ἀνόμοια. τρίτον ἀπὸ τοῦ παντελοῦς πλήθους δυναμοῦται καὶ διὰ τοῦτο παντοίας μορφὰς προτείνει καὶ γεννᾷ πολυειδεῖς λόγους τῶν σχημάτων καὶ ἑαυτὸν ἐξελίπτων οὐ παύεται, μέχρις ἂν εἰς ἕσχατον προέλθῃ καὶ πᾶσαν ἐκφήνῃ τὴν ποικιλίαν τῶν εἰδῶν. καὶ ὥσπερ ἔχει τὸ ἐν τῷ ὄντι καὶ τὸ ὄν ἐν τῷ ἐνὶ δείκνυται συνυπάρχον, οὕτω δὴ καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις τὰ περιφερῆ καὶ ἀνάπαλιν τὰ εὐθύγραμμα ἐν τοῖς περιφερέσι συνειλιγμένα δείκνυσι, καὶ τὴν ὅλην ἑαυτοῦ φύσιν καθ' ἕκαστον οἰκείως προτείνει πάντα τε ταῦτα ἐν πᾶσιν, ὅταν καὶ τὸ ὅλον ἐν τε πᾶσιν ὁμοῦ καὶ ἐκάστω χωρὶς. ταύτην δ' οὖν τὴν δύναμιν ἀπ' ἐκείνης ἔχει τῆς τάξεως. τέταρτον ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀριθμῶν ὑποδέχεται τὰ μέτρα τῆς προόδου τῶν εἰδῶν, ὅθεν καὶ ὑφίστησι πάντα κατ' ἀριθμούς, τὰ μὲν ἀπλουστέρους, τὰ δὲ συνθετωτέρους. τρίγωνον γὰρ καὶ τετράγωνον καὶ πεντάγωνον καὶ πάντα τὰ πολύγωνα συμπρόεισι ταῖς ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν ἐξαλλαγαῖς. διὰ ποίαν δ' αἰτίαν τοῦτο γίνεται, τοῖς μὲν πολλοῖς ἄγνωστον, τοῖς δὲ εἰδόσι, ποῦ μὲν ἀριθμὸς, ποῦ δὲ τὸ σχῆμα, καταφανὲς ὁ τῆς αἰτίας ἀπολογισμός. πέμπτον ἀπ' ἄλλης ὁλότητος δευτέρας καὶ εἰς ὁμόχροα διαιρουμένης πληροῦται τῆς εἰς ὅμοια διαιρέσεως τῶν εἰδῶν, καθ' ἣν καὶ ὁ τριγωνικὸς λόγος εἰς τρίγωνον καὶ ὁ τετραγωνικὸς εἰς τὰ τετράγωνα διαιρεῖται. καὶ τοῦτο τὸ ὅπερ ἔφην καὶ ἐν ταῖς εἰκόσι γυμναζόμενοι ποιοῦμεν, πολὺ πρότερον ἐν ταῖς ἀρχαῖς προουφιστηκός. Εἰς δὴ ταύτας ἀποβλέποντες τὰς ἀποδόσεις πολλὰ δυνάμεθα περὶ τῶν σχημάτων αἰτιολογεῖν εἰς τὰς ἀρχάς

[FR145]

[FR146]

ἀναγόμενοι τὰς πρὸ αὐτῶν, καὶ τὸ μὲν ἐν κοινότερον σχῆμα τοιαύτην ἔλαχε τάξιν καὶ ἀπὸ τοσούτων αἰτιῶν παραδέχεται τὴν τελεσιουργίαν, ἐντεῦθεν δὲ πρόεισι ἐπὶ τὰ γένη τῶν θεῶν καὶ κατ' ἄλλας ἰδέας ἄλλοις ἀπονέμεται καὶ πρὸς ἄλλους ἐνεργεῖ τοῖς μὲν τὰ ἀπλούστερα, τοῖς δὲ τὰ ἐκ τούτων ἀποδιδόναι σχήματα, καὶ τοῖς μὲν τὰ πρωτουργὰ καὶ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἀπογεννώμενα, τοῖς δὲ τῶν στερεῶν ἐπιβαίνουσιν ὄγκων τὰ προσήκοντα τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς σχημάτων ἀφορίζον, πάντων μὲν ἐν πᾶσιν ὄντων — αἱ γὰρ τῶν θεῶν μορφαὶ παντελεῖς εἰσι καὶ πλήρεις τῶν ὅλων δυνάμεων — ἀλλὰ τῆς ιδιότητος ἄλλῳ κατ' ἄλλο προβεβλημένης. ὁ μὲν γὰρ κυκλικῶς ἔχει πάντα, ὁ δὲ τριγωνικῶς, ὁ δὲ τετραγωνικῶς, καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν ὡσαύτως.

Def. XV. XVI. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾷ γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

Τὸ πρῶτιστον καὶ ἀπλούστατον τῶν σχημάτων καὶ τελειότατον ὁ κύκλος ἐστὶ. τῶν μὲν γὰρ στερεῶν πάντων ὑπερφέρει τῷ ἐν ἀπλουστέρᾳ τάξει τὴν ὑπαρξιν ἔχειν, τῶν δὲ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ὑφισταμένων τῇ ὁμοιότητι καὶ ταυτότητι τὴν ὑπεροχὴν ἔλαχεν. καὶ ἐστὶν ἀνάλογον τῷ πέρατι καὶ τῇ μονάδι καὶ ὅλως τῇ ἀμείνονι συστοιχία. διὸ καὶ τῶν ἐγκοσμίων καὶ τῶν ὑπερκοσμίων τὰς διαιρέσεις ποιούμενος αἰετῆς θειοτέρας φύσεως εὐρήσεις ὄντα τὸν κύκλον. εἰ μὲν γὰρ εἴς οὐρανὸν καὶ γένεσιν διαιροῖς τὸ πᾶν, τῷ μὲν οὐρανῷ τὸ κυκλικὸν εἶδος ἀποδώσεις, τῇ δὲ γενέσει τὸ εὐθύ. καὶ γὰρ ὁδὸν ἐστὶν ἐν τοῖς γενητοῖς κυκλικὸν ἐν τε ταῖς μεταβολαῖς καὶ τοῖς σχήμασιν, ἄνωθεν ἀπὸ τοῦ οὐρανοῦ καθήκει. διὰ γὰρ τὴν ἐκείνου κυκλοφορίαν ἡ γένεσις ἀνακυκλεῖται πρὸς ἑαυτὴν καὶ τὴν ἀνίδρυτον παράλλαξιν εἰς τεταγμένην ἀνάγει περίοδον, — εἰ δὲ εἰς ψυχὴν καὶ νοῦν τὰ ἀσώματα διακρίνοις, νοερὸν μὲν ἂν εἴτοις εἶναι τὸν κύκλον, ψυχικὸν δὲ τὸ εὐθύ. διὸ καὶ ἡ ψυχὴ κατὰ τὴν πρὸς νοῦν ἐπιστροφὴν κατὰ κύκλον περιάγεσθαι λέγεται. καὶ ὅπερ ἡ γένεσις πρὸς τὸν οὐρανόν, τοῦτο ἡ ψυχὴ πρὸς τὸν νοῦν. κύκλῳ γὰρ κινεῖται (φησὶν ὅτε νοῦν μιμεῖται?). ἡ δὲ γένεσις τῆς ψυχῆς· τὸ γὰρ ἄλλοτε ἐν ἄλλοις εἶδεσι γίνεσθαι ψυχῆς ἴδιον, — εἰ δὲ εἰς σῶμα καὶ ψυχὴν ἐθέλοις διαιρεῖν, πᾶν μὲν τὸ σωματικὸν τῆς τοῦ εὐθέως μερίδος θήσεις, πᾶν δὲ τὸ ψυχικὸν τῆς τοῦ κύκλου ταυτότητος καὶ ὁμοιότητος μετέχειν. τὸ μὲν γὰρ σύνθετόν ἐστι καὶ ποικίλον ταῖς δυνάμεσιν, ὥσπερ τὰ εὐθύγραμμα σχήματα, τὸ δὲ ἀπλοῦν καὶ νοερὸν, αὐτοκίνητον καὶ αὐτενέργητον, πρὸς ἑαυτὸ ἐστραμμένον καὶ περὶ αὐτὸ ἐνεργοῦν, ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος διὰ τῶν εὐθυγράμμων ὑποστήσας τὰ στοιχεῖα τοῦ παντός τὴν κατὰ κύκλον αὐτοῖς κίνησιν καὶ διαμόρφωσιν ἐκ τῆς ἐποχουμένης τῷ κόσμῳ δέδωκε ψυχῆς.

[FR147]

[FR148]

Ἄλλ' ὅτι μὲν πανταχοῦ τὸ πρωτεῖον ὁ κύκλος ἔλαχεν ὡς πρὸς τὰ ἄλλα σχήματα, δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων, δεῖ δὲ καὶ τὴν πᾶσαν αὐτοῦ σειρὰν θεωρεῖν ἄνωθεν ἀρχομένην καὶ τελευτῶσαν ἄχρι τῶν ἐσχάτων καὶ πάντα τελειοῦσαν κατὰ τὴν ἐπιτηδειότητα τῶν δεχομένων αὐτοῦ τὴν μετουσίαν. τοῖς μὲν οὖν θεοῖς ἐπιστροφὴν καὶ ἔνωσιν παρέχεται πρὸς τὰς ἑαυτῶν αἰτίας καὶ τὸ μένειν ἐν ἑαυτοῖς καὶ μὴ ἐξίστασθαι τῆς οἰκείας μακαριότητος, τὰς μὲν ἄκρας αὐτῶν ἐνώσεις ὡς κέντρα προστησάμενος ἐφετὰ τοῖς δευτέροις, τὰ δὲ πλήθη τῶν ἐν αὐτοῖς δυνάμεων περὶ ἐκεῖνα σταθερῶς ἰδρύων καὶ διὰ τὴν ἐκεῖνων ἀπλότητα συνεχῶν, ταῖς δὲ νοεραῖς οὐσίαις τὸ πρὸς ἑαυτὰς ἐνεργεῖν διαιωνίως, παρέχων καὶ παρ' αὐτῶν πληροῦσθαι τῆς γνώσεως ἐν ἑαυταῖς τε συνηρημέναι τὰ νοητὰ καὶ ἀφ' ἑαυτῶν τὰς νοήσεις τελειοῦν. πᾶς γὰρ νοῦς καὶ τὸ νοητὸν ἑαυτῷ προτείνει, καὶ τοῦτο μὲν ὡς κέντρον ἐστὶν τῷ νῷ, ὁ δὲ νοῦς συνέχει περὶ αὐτὸ καὶ ἐρᾷ καὶ ἐνίζεται πρὸς αὐτὸ ταῖς νοεραῖς ὅλαις πανταχόθεν ἐνεργείαις. ταῖς δὲ ψυχαῖς ἐπιλαμβάνει τὸ αὐτόζωον, τὸ αὐτοκίνητον, τὸ πρὸς νοῦν ἐστράφηται καὶ περιχορεύει τὸν νοῦν, τὸ ἀποκαθίστασθαι κατὰ τὰς οἰκείας περιόδους ἀνελιττούσας τοῦ νοῦ τὴν ἀμέρειαν. πάλιν γὰρ αἱ μὲν νοεραὶ τάξεις ὥσπερ τὰ κέντρα τὴν ὑπεροχὴν ἔξουσι πρὸς τὰς ψυχάς, αἱ δὲ ψυχαὶ περὶ αὐτὰς κατὰ κύκλον ἐνεργήσουσι. καὶ γὰρ πᾶσα ψυχὴ κατὰ μὲν τὸ νοερὸν ἑαυτῆς καὶ αὐτὸ τὸ ἐν τὸ ἀκρότατον κεκέντρωται, κατὰ δὲ τὸ πλῆθος κυκλικῶς περιπορεύεται, περιπτύσσασθαι ποθοῦσα τὸν ἑαυτῆς νοῦν, — τοῖς δὲ οὐρανίοις σώμασιν τὴν πρὸς τὸν νοῦν ἀφομοίωσιν, τὴν ὁμοιότητα, τὴν ὁμαλότητα, τὴν ἐν πέραςι τῶν ὅλων περιοχὴν, τὰς ἐν μέτροις ὠρισμένοις ἀνακυκλήσεις, τὴν αἰδίων ὑπόστασιν, τὸ ἀναρχον καὶ ἀτελεύτητον, ἅπαντα τὰ τοιαῦτα, — τοῖς δὲ ὑπὸ σελήνην στοιχείοις τὴν περίοδον τὴν ἐν ταῖς μεταβολαῖς, τὴν πρὸς τὸν οὐρανὸν ἀπεικασίαν, τὸ ἐν τοῖς γενητοῖς ἀγέννητον καὶ ἐν τοῖς κινουμένοις ἐστὼς καὶ ἐν τοῖς μεριστοῖς ὠρισμένον· πάντα γὰρ αἰεὶ ἔστι διὰ τὸν κύκλον τῆς γενέσεως· καὶ τὸ ἰσοκρατὲς ἐν πᾶσι διὰ τὴν ἀνταπόδοσιν τῆς φθορᾶς. εἰ γὰρ μὴ ἀνέκαμψεν ἡ γένεσις, ταχὺ ἂν ἡ αὐτῶν διελύθη καὶ ἡ σύμπασα διακόσμησις, — τοῖς δ' αὖ ζώοις καὶ φυτοῖς τὴν ἐν ταῖς ἀπογεννήσεσιν ὁμοιότητα ἐνδίδωσιν. ἔκ τε γὰρ τῶν στερμάτων ταῦτα γίνεται καὶ στέρματα ἐκ τούτων, γένεσις τε ἐξ ἀλλήλων ἀποτελεῖται καὶ ἀνακύκλησις ἀπὸ τε τοῦ ἀτελοῦς ἐπὶ τὸ τέλειον καὶ ἔμπαλιν, ἵνα καὶ φθίσις ἢ μετὰ τῆς γενέσεως, — τοῖς δὲ γε παρὰ φύσιν λεγομένοις τάξιν ἐπιτίθησιν καὶ κῆν ὁριστίαν αὐτῶν εἰς ὅρον περιάγει καὶ διακοσμεῖ, καὶ ταῦτα δεόντως τοῖς τελευταίοις ἴχνεσι τῶν ἑαυτοῦ δυνάμεων· διὸ καὶ κατὰ ἀριθμοὺς ὠρισμένους ἀνακυκλεῖται καὶ οὐ φοραὶ μόνον ἀλλὰ καὶ ἀφορίαι κατὰ τὰς περιτροπὰς ὑφίστανται τῶν κύκλων, ὡς ὁ τῶν μουσῶν λόγος, καὶ πάντα τὰ κακὰ εἰ καὶ ἀπέρριπται τῶν θεῶν εἰς τὸν θνητῶν τόπον, ἀλλὰ περιπολεῖ καὶ ταῦτα, φησὶν ὁ Σωκράτης, καὶ μέτεστι καὶ τούτοις τῆς κυκλικῆς περιόδου καὶ τάξεως, ἵνα μηδὲν ἄκρατον ἢ κακόν, μηδὲ ἔρημον τῶν θεῶν, ἀλλ' ἡ τελεσιουργὸς πρόνοια τῶν ὅλων καὶ τὴν ἀπέραντον τῶν κακῶν ποικιλίαν εἰς ὅρον περιάγῃ καὶ τάξιν τὴν αὐτοῖς πρέπουσαν.

[FR149]

[FR150]

Πάντα ἄρα διακεκόσμηκεν ἡμῖν ὁ κύκλος ἄχρι τῶν μεταδόσεων τῶν τελευταίων καὶ οὐδὲν ἄμοιρον ἀφῆκεν τῆς ἑαυτοῦ μεταδόσεως, κάλλος καὶ ὁμοιότητα καὶ εἰδοποιΐαν καὶ τελειότητα χορηγῶν. διὸ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τὰ μέσα κέντρα συνέχει τῆς προόδου συμπάσης τῶν ἀριθμῶν, τῆς ἀπὸ μονάδος ἄχρι δεκάδος ἀναλιττομένης. ἡ γὰρ πεμπτὰς καὶ ἡ ἐξὰς ἐκ πάντων τὴν κυκλικὴν ἐπιδείκνυνται δύναιμι ἐν τοῖς ἀφ' ἑαυτῶν προόδοις εἰς αὐτὰς πάλιν ἐπιστρεφόμεναι. πολλαπλασιαζόμεναι γὰρ εἰς αὐτὰς καταλήγουσι. προόδον μὲν οὖν ὁ πολλαπλασιασμός εἰκὼν, εἰς πλῆθος ἐκτεινόμενος, ἐπιστροφῆς δὲ ἡ εἰς τὸ αὐτὸ κατάληξις εἶδος. τὸ δὲ συναμφοτέρων ἡ κυκλικὴ παρέχεται δύναιμι ἀναγείρουσα μὲν ἀπὸ τοῦ μένοντος οἷον κέντρου τὰς γεννητικὰς αἰτίας τοῦ πλήθους, συνελίσσουσα δὲ μετὰ τὰς ἀπογεννήσεις ἐπὶ τὰ αἷτια τὸ πλῆθος. δύο τοίνυν ἀριθμοὶ τὸ μέσον πάντων κατέχουσι τὴν ιδιότητα, καὶ ὁ μὲν παντὸς ἡγεῖται τοῦ ἐπιστρεπτικοῦ γένους τῶν ἀρρένων καὶ τῆς περιττοῦ φύσεως, ὁ δὲ πᾶν τὸ θῆλυ καὶ ἄρτιον καὶ τῆς γονίμου σειρᾶς ἀνακαλεῖται πρὸς τὰς οἰκείας ἀρχὰς κατὰ τὴν κυκλικὴν δύναιμι.

[FR151]

Ἄλλὰ ταῦτα μὲν μέχρι τούτων διαπεπεράνθω, τὴν δὲ μαθηματικὴν ἀπόδοσιν τοῦ κύκλου θεωρήσομεν εἰς πέρας ἀκριβείας ἤκουσαν. σχῆμα μὲν οὖν αὐτὸν ἔθετο διότι δὴ πεπέρασται καὶ περιέχεται πανταχόθεν ὑφ' ἐνὸς ὅρου καὶ οὐκ ἔστι τῆς ἀπείρου φύσεως, ἀλλὰ τῷ πέρατι σύστοιχος, καὶ ἐπίπεδον δὲ αὖ, καθόσον τῶν σχημάτων ἢ ἐν ἐπιφανείαις ὁρωμένων ἢ ἐν στερεοῖς, ὁ κύκλος τῶν ἐπιπέδων ἐστὶ τὸ πρῶτιστον, ἀπλότητι μὲν τῶν στερεῶν ὑπερφέρων, μονάδος δὲ πρὸς τὰ ἐπίπεδα λόγον ἔχων, ὑπὸ μιᾶς δὲ γραμμῆς περιεχόμενον, ὡς τῷ ἐνὶ προσήκοντα καὶ κατὰ τὸ ἐν ἀφοριζόμενον, τὴν δὲ ποικιλίαν τῶν περικειμένων ἔξωθεν ὅρων οὐ παραδεχόμενον, πρὸς δὲ ταύτην τὴν γραμμὴν ἴσας ἔχοντα πάσας τὰς ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς αὐτοῦ κειμένων, διότι καὶ τῶν ὑπὸ μιᾶς ὀριζομένων γραμμῆς τὰ μὲν ἐκ μέσου πάσας ἴσας ἔχει, τὰ δὲ οὐ πάσας. καὶ γὰρ ἡ ἔλλειψις ὑπὸ μιᾶς περιέχεται γραμμῆς, ἀλλ' οὐ πᾶσαι αἱ πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ δύο μόνον, καὶ τὸ ἀπολαμβάνομενον ἐπίπεδον ὑπὸ τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς μίαν ἔχει τὴν περιέχουσαν, ἀλλ' οὐκέτι κέντρον ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι ἴσαι. ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον ἐν τῷ κύκλῳ πάντως ἐν ἐστὶ σημεῖον — πλείω γὰρ ἐνὸς οὐκ ἔστι κέντρα — διὰ τοῦτο προσέθηκε τὸ ἀφ' ἐνὸς σημείου τὰς πρὸς τὸν ὅρον τοῦ κύκλου προσπιπτούσας ἴσας εἶναι γραμμάς. ἄπειρα μὲν γὰρ ἐντὸς αὐτοῦ σημεῖα, τῶν δὲ ἀπείρων ἐν μόνον τὴν τοῦ κέντρου δύναιμι ἔχει. καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐν τοῦτο σημεῖον, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ τῇ τοῦ κύκλου περιφερεία προσπίπτουσαι ἴσαι εἰσίν, ἢ ἐντὸς ἐστὶ τοῦ κύκλου ἢ ἐκτός — καὶ γὰρ ἕκαστος κύκλος ἔχει πόλον, ἀφ' οὗ αἱ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγόμεναι ἴσαι τυγχάνουσιν οὔσαι — διὰ τοῦτο προσέθηκεν τὸ τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων σημείων καὶ οὐδὲ τοῦτο μάτην πεποίηκεν, τὸ κέντρον μόνον λαμβάνων, ἀλλ' οὐ τὸν πόλον. ἐπεὶ περ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ πάντα θεωρεῖν ἐθέλει, ὁ δὲ πόλος τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου μετεωρότερος ἐστίν, ἀναγκαίως ἄρα καὶ ἐπὶ τέλει προσέθηκεν, ὅτι τοῦτο τὸ σημεῖον, ὃ δὴ κεῖται μὲν ἐντὸς τοῦ κύκλου, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπ' αὐτοῦ

[FR152]

προσπίπτουσαι πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι εἰσίν, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. δύο γὰρ μόνα σημεῖα τοιαῦτά ἐστιν, ὁ πόλος καὶ τὸ κέντρον, ἀλλ' ὁ μὲν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ἐντός· οἷον εἰ νοήσεαι γνώμονα κατὰ τὸ κέντρον ἐστῶτα τοῦ κύκλου, τὸ ἄκρον αὐτοῦ τὸ ἄνω πόλος ἐστί. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπ' αὐτοῦ φερόμεναι ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις ἀποδείκνυνται. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐν τῷ κώνῳ ἢ τοῦ παντὸς κορυφῇ πόλος ἐστὶ τοῦ κατὰ τὴν βάσιν κύκλου.

[FR153]

Διόρισται οὖν ἐνταῦθα, τί μὲν ὁ κύκλος ἐστί, τί δὲ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἐν τῷ κύκλῳ τιθεμένη περιφέρεια, τί δὲ τὸ ὅλον σχῆμα· πάλιν οὖν ἐκ τούτων εἰς τὴν τῶν παραδειγμάτων ἀναδράμωμεν θεωρίαν καὶ νοήσωμεν ἐν ἐκείνοις τὸ μὲν κέντρον ἐκασταχοῦ κατὰ τὴν ἐνιαίαν καὶ ἀμέριστον καὶ μόνιμον ὑπεροχὴν, τὰς δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου διαστάσεις τὰς ἀπὸ τοῦ ἐνὸς προόδους εἰς πλῆθος ἄπειρον κατὰ τὴν δύναμιν, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν τῶν προελθόντων τὴν ἐπὶ τὸ κέντρον, καθ' ἣν ἐλίσσεται τὰ πλῆθη τῶν δυνάμεων εἰς τὴν ἑαυτῶν ἔνωσιν καὶ πάντα εἰς ἐκείνην σπεύδει καὶ περὶ ἐκείνην ἐνεργεῖν ἐφίεται, καὶ ὥσπερ ἐν τῷ κύκλῳ πάντα ἅμα ἐστὶ τὸ κέντρον, αἱ διαστάσεις, ἡ ἐκτὸς περιφέρεια, οὕτω δὴ καὶ ἐν ἐκείνοις οὐ τὰ μὲν προυπάρχει κατὰ χρόνον τὰ δὲ ἐπιγίνεται, ἀλλὰ ὁμοῦ μὲν πάντα, καὶ ἡ μονὴ καὶ ἡ πρόοδος καὶ ἡ ἐπιστροφή. διαφέρει δὲ ταῦτα ἐκείνων τῷ τὰ μὲν ἀδιαιρέτως εἶναι καὶ ἀδιαστάτως, τὰ δὲ διηρημένως, ἀλλαχοῦ μὲν τὸ κέντρον, ἀλλαχοῦ δὲ τὰς ἐκ τοῦ κέντρου γραμμάς, ἀλλαχοῦ δὲ τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν τὸν κύκλον ὀρίζουσιν, ἐκεῖ δὲ ἐν ἐνὶ πάντα, καὶ τὸ (?) οἷον κέντρον λάβης, ἐν τούτῳ πάντα εὐρήσεις, καὶ τὴν διισταμένην ἀπὸ τούτου πρόοδον, καὶ ταύτην ἔχουσιν τὰ πάντα, καὶ τὴν ἐπιστροφὴν, ὡσαύτως. πάντ' οὖν ἐν ἀλλήλοις ἰδὼν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς διαστάσεως ἐλάττωσιν ἀφελὼν καὶ τὴν θέσιν ταύτην, περὶ ἣν ὁ μερισμός, ἀφανίσας εὐρήσεις τὸν ὄντως ὄντα κύκλον αὐτὸν ἐν ἑαυτῷ προιόντα καὶ ὀρίζοντα ἑαυτὸν καὶ ἐνεργοῦντα πρὸς ἑαυτόν, ἔν τε ὄντα καὶ πολλὰ, μένοντα καὶ προιόντα καὶ ἐπιστρέφοντα, καὶ τὸ μὲν ἀμερέστατον ἑαυτοῦ καὶ ἐνικώτατον ἰδρύοντα σταθερῶς, πάντη δὲ ἀπὸ τούτου κινούμενον κατὰ τὸ εὐθὺ καὶ τὴν ἀπειρίαν τὴν ἐν αὐτῷ, συνελισσόμενον δὲ εἰς τὸ ἐν ἀφ' ἑαυτοῦ καὶ διὰ τῆς ὁμοιότητος καὶ ταυτότητος ἀνεγειρόμενον εἰς τὸ ἀμερὲς τῆς ἑαυτοῦ φύσεως καὶ τὸ κεκρυμμένον ἐν αὐτῷ τοῦ ἐνός, ὃ δὴ καὶ ἐγκολπισάμενος καὶ περισθέων ὁμοιοῦται πρὸς αὐτὸ καὶ τῷ ἑαυτοῦ πλήθει. καὶ γὰρ τὸ ἐπιστρέφον μιμεῖται τὸ μέιναν, καὶ τὸ περιφερὲς οἷον κέντρον ἐστὶ διαστὰν καὶ συνεύει πρὸς αὐτὸ κεντρωθῆναι σπεῦδον καὶ ἐν πρὸς ἐκεῖνο γενέσθαι, καὶ ἀφ' οὗ τὴν ἀρχὴν ἔσχεν ἡ πρόοδος, εἰς τοῦτο περατῶσαι τὴν ἐπιστροφὴν. τοιοῦτον γὰρ πανταχοῦ τὸ κέντρον ἐν ἐφετοῦ τάξει προτεταγμένον τοῖς περὶ αὐτὸ τὴν ὑπόστασιν λαχοῦσιν καὶ πασῶν ἀρχηγόν τῶν πεπληθυσμένων προόδων, ὃ καὶ τὸ μαθηματικὸν κέντρον ἀποτυποῦται, πάσας τὰς ἀφ' ἑαυτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν γραμμάς περατοῦν καὶ τὴν ἰσότητα αὐταῖς εἰκόνα τῆς οἰκείας ἐνώσεως παρέχον. οὕτω δὲ καὶ τὰ λόγια τὸ κέντρον ἀφορίζεται

[FR154]

[FR155]

κέντρον, ἀφ' οὗ πᾶσαι μέχρις ἀντυγος ἴσαι ἔασιν.

Ἄλλ' ὥς μὲν τῆς διαστάσεως ἀρχὴ τῶν γραμμῶν τῷ „ἀφ' οὗ“ σημαίνεται, ὥς δὲ μέσον τῆς περιφερείας τῷ „πρὸς ὃ“. πρὸς γὰρ τὸ κέντρον αὕτη συνάγεται κατὰ πᾶσαν ἑαυτήν. εἰ δὲ δεῖ καὶ τὴν αἰτίαν εἰπεῖν τὴν πρώτην, καθ' ἣν ἀναφάνη τὸ κυκλικὸν σχῆμα καὶ ἐτελειώθη, τὴν ἀκροτάτην ἂν εἴποιμι τάξιν τῶν νοητῶν. τὸ μὲν γὰρ κέντρον τῇ τοῦ πέρατος αἰτίᾳ προσέεικεν, αἱ δὲ ἀπὸ τούτου γραμμαὶ καὶ τῷ πλήθει ἄπειροι καὶ τῷ μεγέθει, ὅδον ἐφ' ἑαυταῖς, τὴν ἀπειρίαν ἀποτυποῦνται, ἡ δὲ περατοῦσα τὴν τούτων ἀόριστον ἔκτασιν γραμμὴ καὶ πάλιν εἰς τὸ κέντρον συνάγουσα αὐτὴν τῷ ἐκ τούτων ὑποστάντι κρυφίῳ διακόσμῳ [ὡμοίωται?], ὃν καὶ Ὀρφεὺς κατὰ κύκλον φησὶ φέρεσθαι

τὸ δ' ἀπειρέσιον κατὰ κύκλον
ἀτρύτως ἐφορεῖτο

περὶ γὰρ τὸ νοητὸν κινούμενον νοητῶς καὶ οἷον κέντρον ἐκεῖνο τῆς ἑαυτοῦ φορᾶς ἔχον εἰκότως λέγεται κυκλικῶς ἐνεργεῖν. διὸ καὶ ἀπὸ τούτου πρόεισιν ὁ τρι-
αδικὸς θεός, καὶ τῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων προόδου τὴν πρωτίστην αἰτίαν ἐν ἑαυτῷ περιλαβὼν. ἐντεῦθεν γὰρ αὐτῷ καὶ τὴν προσηγορίαν ἔθεντο οἱ σοφοὶ καὶ τῶν θεολογικῶν οἱ μυστικώτατοι. πρωτίστον δὲ καὶ τῶν εὐθυγράμμων τὸ τρίγωνον. ἀναφαίνεται μὲν οὖν τὰ σχήματα πρώτως ἐν ταῖς ἐφεξῆς δι-
ακοσμήσεσιν τῶν θεῶν, ὑφίσταται δὲ κατὰ τὰς ἐν τοῖς νοητοῖς προυπαρχούσας κρυφίους αἰτίας.

[FR156]

Def. XVII. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Σαφῶς ἐδήλωσεν αὐτὸς ὁ στοιχειωτής, ὅτι οὐ πᾶσαν ὀρίζεται διάμετρον, ἀλλὰ τὴν κυκλικήν, ἐπεὶ καὶ τετραγώνων ἔστι διάμετρος καὶ ὅλως παραλληλο-
γράμμων, ἔστι δὲ καὶ σφαίρας ἐν τοῖς στερεοῖς σχήμασιν. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τούτων καὶ διαγώνιος προσαγορεύεται, ἐπὶ δὲ τῆς σφαίρας καὶ ἄξων καλεῖται, διάμετρος δὲ μόνως ἐπὶ τῶν κύκλων, ἐπεὶ καὶ τῆς ἐλλείψεως ἄξωνα λέγειν εἰώθασι καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, τοῦ δὲ κύκλου διάμετρον ἰδίως. αὕτη τοίνυν εὐθεῖα μὲν ἐστὶ τῷ γένει, πολλῶν δὲ οὐσῶν εὐθειῶν ἐν τῷ κύκλῳ καθάπερ καὶ σημείων (?). ἀπείρων μὲν οὖν ὥσπερ ἐν τι τῶν σημείων τὸ κέντρον ἐστίν, οὕτω δὴ καὶ ἡ διάμετρος αὕτη καλεῖται μόνον ἢ διὰ τοῦ κέντρου χωροῦσα καὶ μήτε ἐντὸς ἀπολήγουσα τῆς περιφερείας μήτε ὑπερβαίνουσα τὸν ταύτης ὅρον ἀλλὰ περατουμένη ὑπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα. καὶ ταῦτα μὲν τὴν γένεσιν ἐπιδείκνυσιν αὐτῆς, τὸ δὲ ἐπὶ τέλει προστεθέν, ὅτι καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον, τὴν ἰδίαν αὐτῆς εἰς τὸν κύκλον ἐνέργειαν δηλοῖ παρὰ πάσας τὰς ἄλλας εὐθείας τὰς διὰ

[FR157]

τοῦ κέντρου ἡγμένας μὴ δὲ περατουμένας ὑπὸ τῆς περιφερείας ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη.

Τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον **Θαλῆν** ἐκεῖνον ἀποδείξαι φασιν, αἰτία δὲ τῆς διχοτομίας ἢ τῆς εὐθείας ἀπαρέγκλιτος διὰ τοῦ κέντρου χώρησις. φερομένη γὰρ διὰ τοῦ μέσου καὶ αἰ φυλάττουσα τὴν αὐτὴν κίνησιν ἀρρεπῇ πρὸς τὰ ἀμφοτέρα κατὰ πάντα ἑαυτῆς τὰ μέρη τὸ ἴσον ἐπ' ἀμφοτέρα ἀφαιρεῖ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. εἰ δὲ καὶ διὰ μαθηματικῆς ἐφόδου δεικνύειν αὐτὸ ἐθέλοις, νόησον ἡγμένην τὴν διάμετρον καὶ θάτερον τοῦ κύκλου μέρος ἐπὶ τὸ λοιπὸν συναρμοζόμενον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἢ ἐντὸς πεσεῖται ἢ ἐκτός· ὁποτέρως δ' ἂν ἔχη, συμβήσεται τὴν ἐλάσσονα εὐθεῖαν ἴσην εἶναι τῇ μεῖζονι· πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι. ἔσται οὖν καὶ ἡ πρὸς τὴν ἐκτὸς τῇ πρὸς τὴν ἐντὸς ἴση. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἐφαρμόζει [FR158] ἄρα, ὥστε ἴσα ἐστίν. δίχα ἄρα ἡ διάμετρος τέμνει τὸν κύκλον. ἀλλ' εἰ μιᾶς οὔσης διαμέτρου δύο ἡμικύκλια γίνεται, ἅπειροι δὲ διάμετροι διὰ τοῦ κέντρου ἄγονται, συμβήσεται διπλάσια τῶν ἀπείρων εἶναι κατ' ἀριθμόν. ταῦτα γὰρ ἀποροῦσί τινες πρὸς τὴν ἐπ' ἅπειρον τομὴν τῶν μεγεθῶν, ἡμεῖς δὲ λέγομεν, ὅτι τέμνεται μὲν ἐπ' ἅπειρον τὸ μέγεθος οὐκ εἰς ἅπειρα δέ. τοῦτο μὲν γὰρ ἐνεργεῖα ποιεῖ τὰ ἅπειρα, τὸ δὲ δυνάμει μόνον, καὶ τὸ μὲν οὐσίαν τῷ ἀπείρῳ δίδωσι, τὸ δὲ γένεσιν μόνην. ἅμα οὖν μιᾶ διαμέτρῳ δύο ἡμικύκλια καὶ αἱ διάμετροι οὐδέποτε ἅπειροι ἔσσονται, εἰ καὶ ἐπ' ἅπειρον ληφθῇσονται, ὥστε οὐδέποτε ἔσται διπλάσια τῶν ἀπείρων, ἀλλὰ τὰ γινόμενα αἰ διπλάσια τῶν πεπερασμένων ἐστὶ διπλάσια. αἰ γὰρ αἱ ληφθεῖσαι διάμετροι πεπερασμέναι κατ' ἀριθμόν εἰσι. καὶ πῶς γὰρ οὐ μέλει πᾶν μέγεθος πεπερασμένως ἔχειν διαιρέσεις τοῦ ἀριθμοῦ πρὸ τῶν μεγεθῶν ὄντος καὶ πάσας αὐτῶν τὰς τομὰς ἀφορίζοντος καὶ προκαταλαμβάνοντος τὴν ἀπειρίαν καὶ αἰ τὰ ὑπιστάμενα περατοῦντος;

Def. XVIII. XIX. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

Απὸ μὲν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου τὴν τοῦ κέντρου φύσιν ἀνεῦρεν πάντων τῶν ἄλλων ἐν τῷ κύκλῳ σημείων διαφέρουσιν, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τὴν διάμετρον ἀφωρίσατο καὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου γραφομένων διέκρινεν, ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τὸ ἡμικύκλιον ὅτι ποτέ ἐστιν ἀναδιδάσκει καὶ ὅτι ὑπὸ δύο ὅρων περιέχεται καὶ τούτων αἰ διαφερόντων, εὐθείας καὶ περιφερείας, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα οὐχ ἢ τυχοῦσά ἐστιν, ἀλλ' ἢ τοῦ κύκλου διάμετρος, ἐπεὶ καὶ τὸ ἔλασσον τμήμα τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τὸ μεῖζον ὑπ' εὐθείας περιέχεται καὶ περιφερείας. ἀλλ' οὐκ ἔστιν ἡμικύκλια ταῦτα τῷ μὴ διὰ τοῦ κέντρου γεγενῆσθαι τὴν τοῦ κύκλου διαίρεσιν.

[FR159]

Πάντα μὴν τὰ τοιάδε σχήματα δυοειδῆ ἐστίν, ὥσπερ ὁ κύκλος μοναδικός, καὶ ἐξ ἀνομοίων ὑφέστηκε. πᾶν γὰρ τὸ ὑπὸ δύο ὅρων περιεχόμενον ἢ ὑπὸ δύο περιφερειῶν περιέχεται, ὥσπερ τὸ μηνοειδές, ἢ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφερείας, ὡς τὰ εἰρημένα σχήματα, ἢ ὑπὸ δύο μικτῶν γραμμῶν, ὡς εἰ δύο ἐλλείψεις τέμνοιν ἀλλήλας — τὰ γὰρ μεταξὺ αὐτῶν ἀπολαμβανομενον περιέξουσιν σημεῖον — ἢ ὑπὸ μικτῆς καὶ περιφερείας, ὡς ὅταν τέμνη κύκλος ἔλλειψιν, ἢ ὑπὸ μικτῆς καὶ εὐθείας, ὡς τὸ ἥμισυ τῆς ἐλλείψεως. τὸ τοίνυν ἡμικύκλιον ἐξ ἀνομοίων ἐστίν, ἀλλὰ τῶν ἀπλῶν καὶ τούτων κατὰ παρὰθεσιν ὁμιλούντων ἀλλήλοις. πρὶν οὖν ὁ λόγος ἀφορίσῃται τὰ τριαδικὰ τῶν σχημάτων, εἰκότως ἐπὶ τὸ δυοειδὲς ἦλθεν μετὰ τὸν κύκλον. δύο μὲν γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐκ ἂν ποτε περιλάβοιεν, εὐθεῖα δὲ καὶ περιφέρεια δύνανται, καὶ δύο περιφέρειαι ὡσαύτως, ἢ γωνίας ποιοῦσαι, ὡς ἐπὶ τοῦ μηνοειδοῦς σχήματος, ἢ καὶ ἀγώνιον ἀποτελοῦσαι σχῆμα, ὡς εἰ νοήσεας κύκλους ὁμοκέντρους. τὸ γὰρ μέσον ἀμφοτέρων ἀπολαμβανόμενον χωρίον ὑπὸ δύο περιφερειῶν περιέχεται, τῆς μὲν ἐντὸς οὕσης, τῆς δὲ ἐκτὸς, καὶ γωνία οὐ γίνεται, οὐ γὰρ τέμνουσιν ἀλλήλας ὡς ἐν τῷ μηνοειδεῖ καὶ τῷ ἀμφικύρτῳ σχήματι.

[FR160]

Καὶ μὲν δὴ καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον ἐστὶν ὅπερ καὶ τοῦ κύκλου φανερόν. ἢ γὰρ διάμετρος ἐφ' ἑαυτῆς ἔχουσα τὸ κέντρον συμπληροῖ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι αἱ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι. μέρος γὰρ καὶ αὕτη τοῦ κύκλου. πρὸς πάντα δὲ τὰ μέρη τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἴσαι προσπίπτουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἔν ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τοῦ κύκλου. καὶ ἐπιστημαντέον, ὅτι μόνον τοῦτο τῶν σχημάτων ἐπὶ τῆς περιμέτρου τὸ κέντρον ἔχει, λέγω δὲ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, ὥστε συναγάγοις ἂν ὅτι τὸ κέντρον τρεῖς ἔχει τόπους, ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ σχήματος ὥσπερ ἐπὶ τοῦ κύκλου, ἢ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ὡς ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου, ἢ ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τινων κωνικῶν γραμμῶν.

Τὸ δ' οὖν ἡμικύκλιον ταῦτόν ἔχει τῷ κύκλῳ κέντρον. τί οὖν ἐνδείκνυται τοῦτο καὶ ποίων εἰκόνα φέρει πραγμάτων; ἢ ὅτι τὰ μὴ τελείως ἀποφοιτήσαντα τῶν πρώτων, ἀλλὰ μετέχοντά πως αὐτῶν ὁμόκεντρα αὐτοῖς εἶναι δύναται καὶ τῶν αὐτῶν αἰτίων μετεληφέναι; διχῇ γὰρ καὶ τὸ ἡμικύκλιον κοινωνεῖ τῷ κύκλῳ, κατὰ τε τὴν διάμετρον καὶ τὴν περιφέρειαν. διό καὶ τὸ κέντρον αὐτοῖς κοινόν. καὶ ἰσως εἰκοίνοι ἂν τὸ ἡμικύκλιον ταῖς δευτέραις τάξεσι μετὰ τὰς ἀπλουστάτας ἀρχὰς καὶ μετεχούσαις ἐκείνων καὶ διὰ τὴν συγγένειαν τὴν πρὸς ἐκείνας, εἰ καὶ ἀτελῶς καὶ ἐξ ἡμισείας, ἀλλ' ἐπὶ τὸ ὃν καὶ πρῶτον αὐτῶν αἷτιον ἀναγομέναις.

[FR161]

Def. XX. XXIII. Σχήματα εὐθυγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐ-
θειῶν γραμμῶν περιεχόμενα· τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν,
τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ
πλειόνων ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.

Μετὰ τὸ μοναδικὸν σχῆμα καὶ ἀρχῆς λόγον ἐπέχον πρὸς πάντα τὰ σχήματα

καὶ τὸ δυοειδὲς ἡμικύκλιον ἢ κατὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἐπ' ἄπειρον πρόοδος παραδί-
δοται τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ τοῦ ἡμικυκλίου μνήμη
γέγονεν ὡς κατὰ τοὺς ὅρους πῇ μὲν τῇψ κύκλῳ κοινωνοῦντος πῇ δὲ τοῖς
εὐθυγράμμοις ὥσπερ καὶ ἡ δυὰς μέση μονάδος ἐστὶ καὶ ἀριθμοῦ. ἡ μὲν γὰρ
μονὰς συντιθεμένη πλεον μοιεῖ πολλαπλασιαζομένη, ὁ δὲ ἀριθμὸς ἀνάπαλιν πολ-
λαπλασιαζόμενος μᾶλλον ἢ συντιθέμενος, ἡ δὲ δυὰς ἴσον ἐκ τε τοῦ πολλαπλασι-
ασμοῦ τοῦ ἐφ' ἑαυτὴν ἀποτελεῖ καὶ τῆς συνθέσεως. ὡς οὖν αὕτη μεσότης ἐστὶ
μονάδος καὶ πλήθους, οὕτω καὶ τὸ ἡμικύκλιον κατὰ μὲν τὴν βᾶσιν κοινωνεῖ
τοῖς εὐθυγράμμοις, κατὰ δὲ τὴν περιφέρειαν τῷ κύκλῳ. πρόεισι δὲ εὐτάκτως τὰ
εὐθύγραμμα κατὰ τὸν ἀπὸ τριάδος ἀριθμὸν ἐπ' ἄπειρον. διὸ καὶ ὁ στοιχειωτῆς
ἐντεῦθεν ἤρξατο. τρίπλευρα τὰρ φησιν καὶ τετράπλευρα καὶ ἐφεξῆς τῷ κοινῷ
ὀνόματι καλούμενα πολύπλευρα. ἐστὶ μὲν γὰρ καὶ τὰ τρίπλευρα πολύπλευρα,
ἀλλὰ καὶ ἰδίαν ἔχει προσηγορίαν μετὰ τῆς κοινῆς, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων παρακολου-
θεῖν τῇ εἰς ἄπειρον προόδῳ τῶν ἀριθμῶν ἀσθενήσαντες τὴν κοινὴν προσηγορίαν
ἡγαπήσαμεν. τριπλεύρων δὲ καὶ τετραπλεύρων μόνον πεποιήται μνήμην, ἐπειδὴ
καὶ τῶν ἀριθμῶν οἱ πρώτιστοι τριάς καὶ τετράς, ὁ μὲν ἐν τοῖς περιττοῖς ἀκράτως
ὢν περισσός, ὁ δὲ ἐν τοῖς ἀρτίοις ἀρτιώτατος. ἐκάτερος οὖν αὐτῷ παρλείηται
πρὸς τὴν τῶν εὐθυγράμμων γένεσιν εἰς ἐνδειξιν τῆς κατὰ πάντας αὐτῶν τοὺς
ἀριθμοὺς ὑποστάσεως, ἀρτίους τε καὶ περισσούς. καὶ μέντοι καὶ διότι περὶ
τούτων ὡς στοιχειωδεστάτων ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ διδάξει, τριγώνων καὶ παρ-
αλληλογράμμων, εἰκότως μέχρι τούτων ἔστησε τὴν ἰδίαν ἀπαρίθησιν, τὰ δὲ
ἄλλα πάντα κοινῷ περιέλαβεν ὀνόματι πολύπλευρα καλέσας.

[FR162]

Ταῦτα περὶ τούτων, πάλιν δὲ ἄνωθεν ῥητέον, ὅτι τῶν ἐπιπέδων σχημάτων
τὰ μὲν ὑπὸ ἀπλῶν περιέχεται γραμμῶν, τὰ δὲ ὑπὸ μικτῶν, τὰ δὲ ὑπ' ἀμφοτέρων,
καὶ τῶν ὑπὸ ἀπλῶν περιεχομένων τὰ μὲν ὑπὸ τῶν ὁμοειδῶν ὡς τὰ εὐθύγραμμα,
τὰ δὲ ὑπὸ τῶν ἀνομοειδῶν ὡς τὰ ἡμικύκλια καὶ τὰ τμήματα καὶ αἱ ἀψίδες, αἱ
εἰσιν ἡμικυκλίων ἐλάσσονες, καὶ τῶν ὑπὸ ὁμοιοειδῶν περιεχομένων τὰ μὲν ὑπὸ
κυκλικῆς περιέχεται γραμμῆς, τὰ δὲ ὑπὸ εὐθείας, τῶν δὲ ὑπὸ κυκλικῆς γραμ-
μῆς περιεχομένων τὰ μὲν ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιέχεται, τὰ δὲ ὑπὸ δύο, τὰ δὲ
ὑπὸ πλήθους. ὑπὸ μιᾶς μὲν ὁ κύκλος αὐτός, ὑπὸ δυεῖν δὲ τὰ ἀγώνια, ὡς ἡ
στεφάνη ἢ ὑπὸ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ὀριζομένη, τὰ δὲ γεγωνιωμένα, ὡς
ὁ μηνίσκος, ὑπὸ πλειόνων δὲ ἢ δυεῖν ἐπ' ἄπειρον. καὶ γὰρ ὑπὸ τριῶν καὶ
τεσσάρων περιφερειῶν καὶ ἐξῆς περιέχεται τινα σχήματα. ἐὰν γ' οὖν τρεῖς κύκλοι
ἐφάπτονται ἀλλήλων, ἀπολαμβάνουσιν τι χωρίον τρίπλευρον ὑπὸ τριῶν περιφερ-
ειῶν ὀριζόμενον ἐὰν δὲ τέτταρες, ὑπὸ τεττάρων, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. τῶν δὲ
ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένων τὰ μὲν ὑπὸ τριῶν περιέχεται, τὰ δὲ ὑπὸ πλειόνων.
οὔτε γὰρ ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται χωρίον, οὔτε πολλῶ πλεον ὑπὸ μιᾶς, ὥστε
πᾶν μὲν χωρίον ὑπὸ ἐνὸς ὅρου μεριζόμενον ἢ δυεῖν τῶν μικτῶν ἐστὶν ἢ τῶν
περιφερογράμμων· καὶ μικτῶν διχῶς, ἢ ὅτι μικταὶ γραμμαὶ περιέχουσιν αὐτό, ὡς
τὸ ὑπὸ τῆς κιττοειδοῦς ἀπολαμβανόμενον, ἢ ὅτι ἀνομοιοειδεῖς, ὡς καὶ τὴν ἀψίδα.
διχῶς γὰρ ἢ μίξις ἢ κατὰ παράθεσιν ἢ κατὰ σύγχυσιν. οὐ πᾶν δὲ τρίπλευρον ἢ

[FR163]

[FR164]

τετράπλευρον εὐθύγραμμόν ἐστι, καὶ γὰρ ἐκ περιφερειῶν γένοιτο ἂν τοσοῦτος πλευρῶν ἀριθμός.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς τῶν ἐπιπέδων σχημάτων διαιρέσεως. ὅτι δὲ τὸ εὐθύ προόδου σήμβολόν ἐστι καὶ κινήσεως καὶ ἀπειρίας καὶ ὅτι ταῖς γεννητικαῖς τάξεσιν ὠκείωται τῶν θεῶν καὶ ἑτεροποιοῖς καὶ τῆς μεταβολῆς καὶ κινήσεως αἰτίαις, εἴρηται καὶ πρότερον. καὶ τοίνυν καὶ τὰ εὐθύγραμμα σχήματα τούτοις ὠκείωται τοῖς θεοῖς τοῖς τῆς γονίμου ποιήσεως πρωταρχοῦσι τῆς ἐπίπαν προόδου τῶν εἰδῶν. διὸ καὶ ἡ γένεσις κατὰ ταῦτα κεκόσμηται διαφερόντως καὶ τὴν οὐσίαν ἐκ τούτων ἔλαχεν ὡς ἐν κινήσει καὶ μεταβολῇ τὴν ὑπόστασιν ἔχουσα.

Def. XXIII. XXIX. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσό-
πλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἰσας ἔχον πλευ-
ράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ δύο μόνον ἰσας ἔχον πλευράς, σκα-
ληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον. ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων
σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ μίαν ἔχον
ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γω-
νίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Ἡ τῶν τριγώνων διαίρεσις ποτὲ μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἔχει τὴν ἀρχήν, ποτὲ δὲ ἀπὸ τῶν πλευρῶν. ἡγεῖται μὲν ἡ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ὡς γνώριμος ἔπεται δὲ ἡ ἀπὸ τῶν γωνιῶν ὡς ἰδιάζουσα, ἐπειδὴ καὶ αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι τοῖς εὐθυγράμμοις μόνοις προσήκουσι σχήμασιν, ὀρθὴ καὶ ἀμβλεῖα καὶ ὀξεῖα, ἰσότης δὲ καὶ ἀνισότης τῶν πλευρῶν ἐστι δήπου καὶ ἐν τοῖς μὴ εὐθυγράμμοις σχήμασι. λέγει τοίνυν, ὅτι τῶν τριγώνων τὰ μὲν ἰσόπλευρά ἐστι, τὰ δὲ ἰσοσκελῆ, τὰ δὲ σκαληνά — ἡ γὰρ πάσας ἰσας ἔχει τὰς πλευράς, ἡ πάσας ἀνίσους, ἡ δύο μόνας ἰσας — καὶ πάλιν ὅτι τῶν τριγώνων τὰ μὲν ἐστὶν ὀρθογώνια, τὰ δὲ ἀμβλυγώνια, τὰ δὲ ὀξυγώνια. καὶ τὸ μὲν ὀρθογώνιον ὀρίζεται τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ὥσπερ καὶ τὸ ἀμβλυγώνιον, — πλείους γὰρ μιᾶς ἢ ὀρθᾶς ἔχειν ἢ ἀμβλείας τὸ τρίγωνον ἀδύνατον — τὸ δὲ ὀξυγώνιον, ὃ ἂν πάσας ὀξείας ἔχη. οὐ γὰρ ἀρκεῖ κἀναυῖθα τὸ μίαν ἔχειν ὀξεῖαν, οὕτω γὰρ ἂν ὀξυγώνια ἅπαντα ἦν τὰ τρίγωνα. πᾶν γὰρ τρίγωνον τὰς δύο γωνίας ἔχει πάντως ὀξείας, τὰς δὲ τρεῖς ὀξείας τὸ ὀξυγώνιον μόνον. δοκεῖ δὲ μοι καὶ πρὸς ἐκεῖνο μόνον ἀπιδῶν ὁ στοιχειωτὴς χωρὶς μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ποιήσασθαι τὴν διαίρεσιν, χωρὶς δὲ ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ὅτι μὴ πᾶν τρίγωνον καὶ τρίπλευρον. ἔστι γὰρ τρίγωνα τετράπλευρα, καλούμενα παρ' αὐτοῖς [?] ἀκιδοειδῆ, παρὰ δὲ τῷ **Ζηνοδώρῳ** κοιλογώνια. νόησον γὰρ ἐν τι τῶν τριπλεύρων καὶ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δύο συστάσας ἐντὸς εὐθείας· περιέχεται ἄρα τι χωρίον ὑπὸ τε τῶν ἐκτὸς [δύο πλευρῶν καὶ τῶν ἐντος δύο, ἔχει δὲ μίαν τε γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ἐκτὸς] περιεχομένην καὶ δύο τὰς ὑπὸ τούτων καὶ τῶν ἐντὸς πρὸς τοῖς πέρασι, καθ' ἃ συνάπτονται, περιεχομένας. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ τοιόνδε σχῆμα τετράπλευρον. οὐκ ἄρα ὃ ἂν τρεῖς εὐρωμεν ἔχον γωνίας ἢ ὀξείας, ἢ μίαν

[FR165]

[FR166]

ὀρθήν, ἢ ἀμβλεῖαν μίαν, εὐθύς καὶ τρίπλευρον εὐρήκαμεν καὶ ἡ ἰσόπλευρον ἡ τῶν ἄλλων τριπλεύρων. εἴη γὰρ ἄν που καὶ τετράπλευρον. οὕτω δ' ἂν εὖροις τετράγωνα πλείους ἔχοντα τῶν τεττάρων πλευρῶν, καὶ δεῖ μὴ προχείρως ἀπὸ τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν ἀποφαίνεσθαι περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν.

Ἀλλὰ ταῦτα μὲν περὶ τούτων· οἱ δὲ **Πυθαγόρειοι** τὸ μὲν τρίγωνον ἀπλῶς ἀρχὴν γενέσεως εἶναί φασι καὶ τῆς τῶν γενητῶν εἰδοποιίας. διὸ καὶ τοὺς λόγους τοὺς φυσικοὺς καὶ τῆς τῶν στοιχείων δημιουργίας τριγωνικοὺς εἶναί φησιν ὁ Τίμαιος. καὶ γὰρ τριχῇ διίστανται καὶ συναγωγοὶ τῶν πάντη μεριστῶν εἴσι καὶ πολυμεταβόλων, τῆς τε ἀπειρίας ἀναπίμπλονται τῆς ὑλικῆς καὶ τοὺς συνδέσμους λυτοὺς προϊστανται τῶν ἐνύλων σωμάτων. ὥσπερ δὴ καὶ τὰ τρίγωνα περιέχονται μὲν ὑπὸ εὐθειῶν, γωνίας δὲ ἔχει τὰς τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν συνάγουσας καὶ κοινωνίαν ἐπίκτητον αὐταῖς καὶ συναφὴν παρεχόμενας. εἰκότως ἄρα καὶ ὁ **Φιλόλαος** τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν τέτταρσιν ἀνέθηκεν θεοῖς, Κρόνῳ καὶ Ἄϊδι καὶ Ἄρει καὶ Διονύσῳ, πᾶσαν τὴν τετραμερῆ τῶν στοιχείων διακόσμησιν τὴν ἄνωθεν ἀπὸ τοῦ οὐρανοῦ καθήκουσαν εἴτε ἀπὸ τῶν τεττάρων τοῦ ζωδιακοῦ τμημάτων ἐν τούτοις περιλαβόν. ὁ μὲν γὰρ Κρόνος πᾶσαν ὑφίστησι τὴν ὑγρὰν καὶ ψυχρὰν οὐσίαν, ὁ δὲ Ἄρης πᾶσαν τὴν ἔμπυρον φύσιν, καὶ ὁ μὲν Ἄϊδης τὴν χθονίαν ὅλην συνέχει ζωὴν, ὁ δὲ Διόνυσος τὴν ὑγρὰν καὶ θερμὴν ἐπιτροπεύει γένεσιν, ἥς καὶ ὁ οἶνος σύμβολον ὑγρὸς ὢν καὶ θερμός. πάντες δὲ οὗτοι κατὰ μὲν τὰς εἰς τὰ δεύτερα ποιήσεις διεστήκασι, ἥνωνται δὲ ἀλλήλοις. διὸ καὶ κατὰ μίαν αὐτῶν γωνίαν συνάγει τὴν ἔνωσιν ὁ **Φιλόλαος**. εἰ δὲ καὶ αἱ τῶν τριγώνων διαφοραὶ συνεργοῦσι πρὸς τὴν γένεσιν, εἰκότως ἂν ὁμολογοῖτο τὸ τρίγωνον ἀρχηγὸν εἶναι τῆς τῶν ὑπὸ σελήνην συστάσεως. ἡ μὲν γὰρ ὀρθὴ γωνία τὴν οὐσίαν αὐτοῖς παρέχεται καὶ τὸ μέτρον ἀφορίζει τοῦ εἶναι, καὶ ὁ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λόγος οὐσιοποιός ἐστι τῶν γενητῶν στοιχείων, ἡ δὲ ἀμβλεῖα τὴν ἐπίπαν διάστασιν αὐτοῖς ἐνδίδωσι, καὶ ὁ τοῦ ἀμβλυγωνίου λόγος εἰς μένεθος αὖξει καὶ παντοίαν ἑκτασιν τὰ εἶδη τὰ ἔνυλα, ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία διαιρετὴν αὐτὴν ἀποτελεῖ τὴν φύσιν, καὶ ὁ τοῦ ὀξυγωνίου λόγος ἐπ' ἄπειρον αὐτοῖς τὰς διαίρέσεις παρασκευάζει γενέσθαι ἀπλῶς δὲ ὁ τριγωνικὸς λόγος οὐσίαν διαστατὴν καὶ πάντη μεριστὴν ὑφίστησι τὴν τῶν ἐνύλων σωμάτων.

Τοσαῦτα μὲν περὶ τῶν τριγώνων εἶχομεν θεωρεῖν, ἐκ δὲ τούτων λάβοις ἂν τῶν διαίρέσεων καὶ ὅτι τὰ εἶδη πάντα τῶν τριγώνων ἑπτὰ ἐστι καὶ οὔτε πλείω οὔτε ἐλάττω. τὸ μὲν ἰσόπλευρον ἓν ἐστι μόνον ὀξυγώνιον ὑπάρχον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκάτερον τριπλοῦν. καὶ γὰρ τὸ ἰσοσκελὲς ἢ ὀρθογώνιον ἐστὶν ἢ ἀμβλυγώνιον ἢ ὀξυγώνιον, καὶ τὸ σκαληνὸν ὡσαύτως τὴν τρίτην ἔχει ταύτην διαφοράν. εἰ οὖν ταῦτα μὲν τριχῶς τὰ δὲ ἰσόπλευρα μοναχῶς, ἑπτὰ τὰ πάντα τῶν τριγώνων εἶδη λεγέσθω. λάβοις δ' ἂν καὶ κατὰ τὴν τῶν πλευρῶν διαίρεσιν τὴν τῶν τριγώνων πρὸς τὰ ὄντα ἀναλογίαν. τὸ μὲν γὰρ ἰσόπλευρον κατὰ πάντα ἰσότητι καὶ ἀπλότῃ κρατούμενον συγγενές ἐστι ταῖς θείαις ψυχαῖς — μέτρον γὰρ ἐστὶ καὶ τῶν ἀνίσων ἢ ἰσότης, ὥσπερ καὶ τὸ θεῖον πάντων τῶν δευτέρων — τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τοῖς κρείττοσι γένεσι τοῖς κατευθύνουσι τὴν ἔνυλον φύσιν, ὢν

[FR167]

[FR168]

τὸ μὲν πλεόν κεκράτηται τῷ μέτρῳ, τὰ δὲ τελευταῖα τῆς ἀνισότητος ἐπάπτεται καὶ τῆς ἀμετρίας τῆς ὑλικῆς — καὶ γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ μὲν δύο ἴσαι, ἡ δὲ βάσις ἄνισος — τὸ δὲ σκαληνὸν ταῖς μερισταῖς ζωαῖς, αἱ πανταχόθεν χωλεύουσι καὶ σκάζουσιν εἰς τὴν γένεσιν φερόμεναι καὶ ἀναπιμπλάμεναι τῆς ὕλης.

[FR169]

Def. XXX—XXXIII. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἐστίν ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δὲ τὸ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρον οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.

Τὴν τῶν τετραπλεύρων διαίρεσιν εἰς δύο ποιεῖσθαι χρή τὴν πρώτην καὶ τὰ μὲν αὐτῶν παραλληλόγραμμα λέγειν, τὰ δὲ οὐ παραλληλόγραμμα, τῶν δὲ παραλληλογράμμων τὰ μὲν καὶ ὀρθογώνια καὶ ἰσόπλευρα, ὡς τὰ τετράγωνα, τὰ δὲ οὐδέτερα τούτων, ὡς τὰ ῥομβοειδῆ, τὰ δὲ ὀρθογώνια μὲν, οὐκ ἰσόπλευρα δέ, ὡς τὰ ἑτερομήκη, τὰ δὲ ἑμπαλιν ἰσοπλευρα μὲν, οὐκ ὀρθογώνια δέ, ὡς τοὺς ῥόμβους. ἡ γὰρ ἀμφοτέρα ἔχει ἀναγκαῖον τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν καὶ τὴν ὀρθότητα τῶν γωνιῶν, ἡ οὐδέτερον, ἡ τὸ ἕτερον, καὶ τοῦτο διχῶς, ὥστε τετραχῶς ὑφίστασθαι τὸ παραλληλόγραμμον. τῶν δὲ μὴ παραλληλογράμμων τὰ μὲν δύο μόνον ἔχει παραλλήλους, οὐκ ἔτι δὲ καὶ τὰς λοιπὰς, τὰ δὲ οὐδ' ὅλως ἔχει τῶν πλευρῶν τινὰς παραλλήλους. καὶ τὰ μὲν καλεῖται τραπέζια, τὰ δὲ τραπεζοειδῆ. τῶν δὲ τραπεζίων τὰ μὲν ἴσας ἔχει τὰς συναπτούσας παραλλήλους ταύτας, τὰ δὲ ἀνίσους. καὶ καλεῖται τὰ μὲν ἰσοσκελῆ τραπέζια, τὰ δὲ δκαληνὰ τραπέζια. τὸ ἄρα τετράπλευρον ἐπταχῆς ἡμῖν ὑποστήσεται. τὸ μὲν γὰρ ἐστὶ τετράγωνον, τὸ δὲ ἑτερόμηκες, τὸ δὲ ῥόμβος, τὸ δὲ ῥομβοειδὲς, τὸ δὲ τραπέζιον ἰσοσκελές, τὸ δὲ σκαληνὸν τραπέζιον, τὸ δὲ τραπεζοειδές.

[FR170]

Ἄλλ' ὃ μὲν **Ποσειδώνιος** τελείαν εἰς ταῦτα πεποίηται τὴν τῶν τετραπλεύρων εὐθυγράμμων τομὴν ἐπτὰ καὶ τούτων τὰ εἶδη θέμενος, ὥσπερ δὴ καὶ τῶν τριγώνων, ὃ δὲ **Εὐκλείδης** εἰς μὲν παραλληλόγραμμα καὶ μὴ παραλληλόγραμμα διαιρεῖν οὐκ ἠδύνατο μήτε περὶ τῶν παραλλήλων εἰπὼν, μήτε περὶ αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου διδάξας ἡμᾶς. τὰ δὲ τραπέζια πάντα καὶ τὰ τραπεζοειδῆ κοινῶς προσείρηκεν ὀνόματι τραπέζια, περιγράφων αὐτὰ τῶν τεττάρων ἐκείνων, οἷς ἐπαληθεύει τὸ τῶν παραλληλογράμμων ἴδιον, τοῦτο δὲ ἐστὶ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχειν. καὶ γὰρ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἑτερόμηκες καὶ ὁ ῥόμβος ἔχει τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας, αὐτὸς δὲ ἐπὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς μόνον τοῦτο προσέθηκεν, ἵνα μὴ διὰ ψιλῶν αὐτὸ παραστήσῃ τῶν ἀποφάσεων, οὔτε ἰσόπλευρον οὔτε ὀρθογώνιον εἰπὼν. ἐφ' ὧν γὰρ ἰδιαζόντων

[FR171]

ἀποροῦμεν λόγων χρήσασθαι τοῖς κοίνοις ἀναγκαῖον. ὅτι δὲ πάντων ἐστὶ τοῦτο κοινὸν τῶν παραλληλογράμμων αὐτοῦ δεικνύντος ἀκουσόμεθα. ἔοικεν δὲ καὶ ὁ ῥόμβος σαλευθὲν εἶναι τετράγωνον καὶ τὸ ῥομβοειδὲς κεκινημένον ἑτερόμηκες. διὸ κατὰ τὰς πλευρὰς οὐ διέστηκε ταῦτα ἐκείνων, κατὰ δὲ τὰς τῶν γωνιῶν ἀμβλύτητας καὶ ὀξύτητας, ἐκείνων ὀρθογωνίων ὄντων. ἐὰν γὰρ νοήσης τὸ τετράγωνον ἢ τὸ ἑτερόμηκες κατὰ τὰς ἀπεναντίας γωνίας διελκόμενον, εὐρήσεις ταύτας μὲν συναγομένας καὶ ὀξείας γινομένας, τὰς δὲ λοιπὰς διισταμένας καὶ ἀμβλείας ἀναφαινομένας, καὶ ἔοικεν καὶ τὸ ὄνομα τῷ ῥόμβῳ κεῖσθαι ἀπὸ τῆς κινήσεως. καὶ γὰρ τὸ τετράγωνον εἰ νοήσεις ῥομβούμενον, φανεῖται σοι κατὰ τὰς γωνίας παρενηνεγμένον, ὥσπερ δὴ καὶ ὁ κύκλος ῥομβούμενος ἔλλειψις φαίνεται.

[FR172]

Περὶ δὲ αὐτοῦ τοῦ **τετραγώνου** ζητήσεως, διὰ τί ταύτην ἔσχε τὴν προσηγορίαν καὶ οὐχ, ὥσπερ τὸ τρίγωνον κοινὸν ἐστὶ πᾶσι καὶ τοῖς μὴ ἰσογωνίους μηδὲ ἰσοπλευροῖς, καὶ τὸ πεντάγωνον ὡσαύτως, οὕτω καὶ τὸ τετράγωνον λέγεσθαι δύναται καὶ κατὰ τῶν ἄλλων τετραπλεύρων. αὐτὸς γοῦν ὁ γεωμέτρης ἐπ' ἐκείνων προστίθησι „τρίγωνον ἰσόπλευρον“ ἢ „πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον“, ὡς δυναμένων τούτων καὶ μὴ τοιούτων εἶναι. τὸ δὲ τετράγωνον ῥηθὲν εὐθύς τὸ ἰσόπλευρον αὐτῷ δηλοῖ καὶ ὀρθογώνιον. λόγος δὲ τούτου ὅδε. μόνον τὸ τετράγωνον εὐθύς χωρίον καὶ κατὰ τὰς πλευρὰς ἔχει τὸ ἄριστον καὶ κατὰ τὰς γωνίας. ἐκάστη γὰρ αὐτῶν ὀρθή ἐστὶ τὸ μέτρον ἀπολαβοῦσα τῶν γωνιῶν τὸ μῆτε ἐπίτασιν μῆτε ἄνεσιν ἐπιδεχόμενον. κατ' ἀμφοτέρα οὖν πλεονεκτοῦν εἰκότως ἔσχε τὴν κοινὴν ἐπωνυμίαν. τὸ δὲ τρίγωνον καὶ ἴσας ἔχει τὰς γωνίας, ἀλλὰ ὀξείας πάσας καὶ τὸ πεντάγωνον ἀμβλείας πάσας. εἰκότως ἄρα τὸ τετράγωνον ἰσότητι πλευρῶν καὶ ὀρθότητι γωνιῶν συμπεπληρωμένον μόνον ἐκ πάντων τετραπλεύρων ταύτης τῆς προσηγορίας ἔτυχεν. τοῖς γὰρ ὑπερέχουσι τῶν εἰδῶν τὸ τοῦ ὅλου πολλάκις ἐπιφημίζομεν ὄνομα. δοκεῖ δὲ καὶ τοῖς **Πυθαγορείοις** τοῦτο διαφερόντως τῶν τετραπλεύρων εἰκόνα φέρειν τῆς θείας οὐσίας. τὴν τε γὰρ ἄχραντον τάξιν διὰ τούτου μάλιστα σημαίνουσιν — ἢ τε γὰρ ὀρθότης τὸ ἀκλίτον καὶ ἡ ἰσότης τὴν μόνιμον δύναμιν ἀπομιμεῖται. κινήσεις γὰρ ἀνισότητος ἔκγονος, στάσις δὲ ἰσότητος· οἱ τοίνυν τῆς σταθερᾶς ἰδρύσεως αἵτιοι τοῖς ὅλοις καὶ τῆς ἀχράντου καὶ ἀκλίτου δυνάμεως εἰκότως διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ σχήματος ὡς ἀπ' εἰκόνης ἐμφαίνονται — καὶ πρὸς τούτοις ὁ **Φιλόλαος** κατ' ἄλλην ἐπιβολὴν τὴν τοῦ τετραγώνου γωνίαν Ῥέας καὶ Δήμητρος καὶ Ἑστίας ἀποκαλεῖ· διότι γὰρ τὴν γῶν τὸ τετράγωνον ὑφίστησι καὶ στοιχεῖόν ἐστὶν αὐτῆς προσεχές, ὡς παρὰ τοῦ Τιμαίου μεμαθήκαμεν, ἀπὸ δὲ πασῶν τούτων τῶν θεαινῶν ἀπορροίας ἡ γῆ δέχεται καὶ γονίμους δυνάμεις, εἰκότως τὴν τοῦ τετραγώνου γωνίαν ἀνῆκεν ταύταις ταῖς ζωογόνοις θεαῖς. καὶ γὰρ Ἑστία καλοῦσι τὴν γῶν καὶ Δήμητρά τινες, καὶ τῆς ὅλης Ῥέας αὐτὴν μετέχειν φασί, καὶ πάντα ἐστὶν ἐν αὐτῇ τὰ γεννητικὰ αἵτια χθονίως. τὴν τοίνυν μίαν ἔνωσιν τῶν θείων τούτων γενῶν τὴν τετραγωνικὴν φησι γωνίαν περιέχειν. ἀπεικάζουσι δὲ καὶ πρὸς τὴν σύμπασαν ἀρετὴν τὸ τετράγωνον ὡς ἔχον τέτταρας ὀρθάς,

[FR173]

τελείαν ἐκάστην, ἥπερ δὴ καὶ τὰς ἀρετὰς λέγομεν ἐκάστην τελείαν καὶ αὐτάρκη καὶ μέτρον καὶ ὅρον ζωῆς, καὶ πάσας μεσότηας ἀμβλείας καὶ ὀξείας. δεῖ δὲ μὴ λανθάνειν, ὅπως τὴν μὲν τριγωνικὴν γωνίαν ὁ **Φιλόλαος** τέτταρσιν ἀνῆκεν θεοῖς, τὴν δὲ τετραγωνικὴν τρισίν, ἐνδεικνύμενος αὐτῶν τὴν δι' ἀλλήλων χώρησιν καὶ τὴν ἐν πᾶσι πάντων κοινωνίαν τῶν τε περισσῶν ἐν τοῖς ἀρτίοις καὶ τῶν ἀρτίων ἐν τοῖς περισσοῖς. τριάς οὖν τετραδική [καὶ τετράς τριαδική] τῶν τε γονίμων μετέχουσαι καὶ ποιητικῶν ἀγαθῶν τὴν ὅλην συνέχουσι τῶν γεννητῶν διακόσμησιν. ἀφ' ὧν ἡ δωδεκάς εἰς μίαν μονάδα τὴν τοῦ Διὸς ἀρχὴν ἀνατείνεται. τὴν γὰρ τοῦ δωδεκαγώνου γωνίαν Διὸς εἶναί φησιν ὁ **Φιλόλαος**, ὥς κατὰ μίαν ἐνωσιν τοῦ Διὸς ὅλον συνέχοντος τὸν τῆς δωδεκάδος ἀριθμόν. ἡγεῖται γὰρ καὶ παρὰ τῷ **Πλάτῳ** δωδεκάδος ὁ Ζεὺς καὶ ἀπολύτως ἐπιτροπεύει τὸ πᾶν.

[FR174]

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν τετραπλεύρων εἶχομεν λέγειν τὴν τε τοῦ στοιχειωτοῦ διάνοιαν ἐμφανίζοντες καὶ πρὸς τὰς θεωρικωτέρας ἐπιβολὰς ἀφορμὰς διδόντες τοῖς τῶν νοητῶν καὶ ἀφανῶν οὐσιῶν τῆς γνώσεως ἐπιεμένοις.

[FR175]

Def. XXXV. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Τίνα μὲν στοιχεῖα τῶν παραλλήλων καὶ τίσι γνωρίζονται συμπτώμασιν ἐν τοῖς μετὰ ταῦτα μαθησόμεθα, τίνες δὲ εἰσιν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι διὰ τούτων ἀφορίζεται τῶν ῥημάτων. δεῖ τοίνυν αὐτὰς φησίν, ἐν τε ἐνὶ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ ἐκβαλλομένας ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν ἀλλήλαις ἀλλ' ἐκβάλλεσθαι εἰς ἄπειρον. καὶ γὰρ αἱ μὴ παράλληλοι μέχρι τινὸς ἐκβαλλόμεναι μείναιεν ἂν ἀσύμπτωτοι, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν χαρακτηρίζει τὰς παραλλήλους καὶ οὐδὲ τοῦτο ἀπλῶς ἀλλὰ τὸ ἐφ' ἐκάτερα ἐκβάλλεσθαι ἐπ' ἀπειρον καὶ μὴ συμπίπτειν. καὶ γὰρ τῶν μὴ παραλλήλων δυνατὸν κατὰ θάτερα μὲν τὴν ἐκβολὴν ἐπ' ἄπειρον γενέσθαι, κατὰ τὰ λοιπὰ δὲ οὐ. συννεύουσαι γὰρ ἐπὶ τὰδε τὰ μέρη, πλεον ἀφίστανται ἀλλήλων κατὰ τὰ ἕτερα. τὸ δὲ αἴτιον, ὅτι δύο εὐθεῖαι περιέχειν οὐ δύνανται τι χωρίον. εἰ δὲ κατὰ ἀμφοτέρα συνεύουσαι, τοῦτο συμβήσεται. καὶ μέντοι καὶ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι τὰς εὐθείας ὀρθῶς προσείληπται. εἰ γὰρ ἡ μὲν εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἡ δὲ ἐν μετεώρῳ κατὰ πᾶσαν θέσιν ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἀλλήλαις καὶ οὐ διὰ τοῦτο παράλληλοί εἰσιν. ἐν οὖν ἔστω τὸ ἐπίπεδον καὶ ἐκβαλλέσθωσαν ἐπ' ἄπειρον κατὰ ἀμφοτέρα καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ μηδέτερα. τούτων γὰρ ὑπαρχόντων ἔσονται παράλληλοι εὐθεῖαι.

[FR176]

Καὶ ὁ μὲν **Εὐκλείδης** τοῦτον ὁρίζει τὸν τρόπον τὰς παραλλήλους εὐθείας, ὁ δὲ **Ποσειδώνιος**, παράλληλοι, φησιν, εἰσιν αἱ μήτε συνεύουσαι μήτε ἀπονεύουσαι ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ἴσας ἔχουσαι πάσας τὰς καθέτους τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν τῆς ἐτέρας σημείων ἐπὶ τὴν λοιπὴν. ὅσαι δ' ἂν ἐλάττους αἰ ποιώσι τὰς καθέτους

συνεύουσιν ἀλλήλαις· ἡ γὰρ κάθετος τά τε ὕψη τῶν χωρίων καὶ τὰ διαστήματα τῶν γραμμῶν ὀρίζειν δύναται. διόπερ ἴσων μὲν τῶν καθέτων οὐσῶν ἴσα τὰ διαστήματα τῶν εὐθειῶν, μειζόνων δὲ καὶ ἐλαττόνων γινομένων καὶ ἡ ἀπόστασις ἐλασσοῦται καὶ συνεύουσιν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ κάθετοι ἐλάσσονες.

Δεῖ δὲ εἰδέναι. ὅτι τὸ ἀσύμπτωτον οὐ πάντως παραλλήλους ποιεῖ τὰς γραμμάς — καὶ γὰρ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων αἱ περιφέρειαι οὐ συμπίπτουσιν — ἀλλὰ δεῖ καὶ ἐπ' ἄπειρον αὐτὰς ἐκβάλλεσθαι. τοῦτο δὲ οὐ μόναις ὑπάρχει ταῖς εὐθείαις, ἀλλὰ καὶ ἄλλαις γραμμαῖς. δυνατόν γὰρ νοῆσαι τεταγμένας ἑλικας περὶ εὐθείας γραφομένας αἵτινες συνεκβαλλόμεναι ταῖς εὐθείαις εἰς ἄπειρον οὐδέποτε συμπίπτουσι. ταῦτα μὲν οὖν παρὰ (?) τούτων ὀρθῶς Γεμῖνος διεῖλεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τῶν γραμμῶν αἱ μὲν εἰσιν ὠρισμέναι καὶ σχῆμα περιέχουσιν, ὡς ὁ κύκλος καὶ ἡ τῆς ἐλλείψεως γραμμὴ καὶ ἡ κισσοειδὴς καὶ ἄλλαι παμπληθεῖς, αἱ δὲ ἀόριστοι καὶ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, ὡς ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ καὶ ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου καὶ ἡ κογχοειδὴς. πάλιν δὲ αὐτῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων αἱ μὲν οὐδὲν σχῆμα περιλαμβάνουσιν, ὡς ἡ εὐθεῖα καὶ αἱ κωνικαὶ τομαὶ αἱ εἰρημέναι, αἱ δὲ συνελθοῦσαί τε καὶ ποιήσασαι σχῆμα ἐπ' ἄπειρον τὸ λοιπὸν ἐκφέρονται. τούτων δὲ αἱ μὲν εἰσιν ἀσύμπτωτοι αἱ, ὅπως ποτ' ἂν ἐκβληθῶσιν, μὴ συμπίπτουσαι, συμπτωταὶ δὲ αἱ ποτε συμπεσούμεναι. τῶν δὲ ἀσυμπτῶτων αἱ μὲν ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἀλλήλαις ἐπιπέδῳ, αἱ δὲ οὐ. τῶν δὲ ἀσυμπτῶτων καὶ ἐν ἐνὶ οὐσῶν ἐπιπέδῳ αἱ μὲν ἴσον ἀεὶ διάστημα ἀφεστήκασιν ἀλλήλων, αἱ δὲ μειοῦσιν ἀεὶ τὸ διάστημα, ὡς ὑπερβολὴ πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ ἡ κογχοειδὴς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. αὗται γὰρ ἀεὶ ἐλασσομένου τοῦ διαστήματος ἀεὶ ἀσύμπτωτοί εἰσιν καὶ συνεύουσι μὲν ἀλλήλαις, οὐδέποτε δὲ συνεύουσι παντελῶς, ὃ καὶ παραδοξότατόν ἐστιν ἐν γεωμετρίας θεωρήματι δεικνύον σύννευσιν τινῶν γραμμῶν ἀσύνευστον. τῶν δὲ ἴσον ἀεὶ ἀπεχουσῶν διάστημα αἱ εἰσὶν εὐθεῖαι μὴδέποτε ἐλασσον ποιοῦσαι τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ παράλληλοί εἰσιν.

Τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τῆς Γεμίνου φιλοκαλίας εἰς τὴν τῶν προκειμένων ἐξήγησιν ἀναλεξάμεθα.

[FR177]

[FR178]

PETITA ET AXIOMATA.

Τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν τριχῇ διηρημένων εἷς τε ὑποθέσεις καὶ αἰτήματα καὶ ἀξιώματα τὴν μὲν πρὸς ἀλλήλας τούτων διαφορὰν ἐν τοῖς πρόσθεν γεγραμμένοις παραδεδόκαμεν, περὶ δὲ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος ἰδίᾳ προκείσθω νυνὶ διελθεῖν ἀκριβέστερον, ἅτε δὴ καὶ περὶ αὐτῶν ἡμῖν ὄντος ἐνταῦθα τοῦ λόγου προηγούμενως. τὰς γὰρ ὑποθέσεις καὶ τοὺς καλουμένους ὅρους ἐν τοῖς προειρημένοις ἐσκέμμεθα.

Κοινὸν μὲν οὖν ἐστὶ τοῖς τε ἀξιώμασι καὶ τοῖς αἰτήμασι τὸ μὴ προσδεῖσθαι τινος ἀποδείξεως μηδὲ γεωμετρικῶν πίστεων, ἀλλ' ὡς γνώριμα λαμβάνεσθαι καὶ ἀρχὰς ταῦτα γίνεσθαι τῶν ἐφεξῆς. διέστηκεν δὲ ἀπ' ἀλλήλων, ἥ καὶ τὰ

θεωρήματα τῶν προβλημάτων διώριστα. καθάπερ γὰρ ἐν μὲν τοῖς θεωρήμασι τὸ ἀξόλουθον ἰδεῖν καὶ γινῶναι τοῖς ὑποκειμένοις προτιθέμεθα, ἐν δὲ τοῖς προβλήμασι πορίσασθαι καὶ ποιῆσαι τι προσταττόμεθα, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ ἐν μὲν τοῖς ἀξιώμασι ταῦτα λαμβάνεται, ὅσα αὐτόθεν εἰς γινῶσιν ἐστι καταφανῆ καὶ πρόχειρα ταῖς ἀδιδάκτοις ἡμῶν ἐννοίαις, ἐν δὲ τοῖς αἰτήμασι ταῦτα ζητοῦμεν λαβεῖν, ὅσα ἐστὶν εὐπόριστα καὶ εὐμήχανα, τῆς διανοίας οὐ καμνούσης περὶ τὴν λῆψιν αὐτῶν, οὐδὲ ποικιλίας δεόμενα οὐδὲ κατασκευῆς. γινῶσις ἄρα ἐναργῆς καὶ ἀναπόδεικτος καὶ λῆψις ἀκατάσκευος διορίζουσι τὰ τε αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα, ὥσπερ καὶ γινῶσις ἀποδεικτική καὶ λῆψις τῶν ζητουμένων μετὰ παρασκευῆς τὰ θεωρήματα τῶν προβλημάτων διέκρινεν. δεῖ γὰρ δὴ πανταχοῦ τὰς ἀρχὰς τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς διαφέρειν τῇ ἀπλότητι, τῷ ἀναποδείκτῳ, τῷ αὐτοπίστῳ. καθόλου γάρ, φησὶν ὁ **Σπεύσιππος**, ὦν ἡ διάνοια τὴν θῆραν ποιεῖται τὰ μὲν οὐδεμίαν ποικίλην ποιησαμένη διέξοδον προβάλλει καὶ προευτρεπίζει πρὸς τὴν μέλλουσαν ζήτησιν καὶ ἔχει τούτων ἐναργεστέραν ἐπαφὴν μᾶλλον ἢ τῶν ὁρατῶν ἢ ὄψις, τὰ δὲ ἐκ τοῦ εὐθέως αἴρειν ἀδυνατοῦσα κατὰ μετὰβασιν ἐπ' ἐκεῖνα δι-αβαίνουσα κατὰ τὸ ἀκόλουθον αὐτῶν ἐπιχειρεῖ ποιεῖσθαι τὴν θῆραν. οἷον τὸ μὲν ἀπὸ σημείου γραμμὴν εὐθεῖαν ἐπὶ σημεῖον ἀγαγεῖν ὥς πρόχειρον λαμβάνει καὶ εὐπόριστον. τῇ γὰρ ὁμαλῇ ῥύσει τοῦ σημείου συγκινουμένη καὶ συμπροιοῦσα τῷ μηδαμοῦ μᾶλλον καὶ ἥττον ἀπονεύειν εἰς τὸ ἕτερον καταντᾷ σημεῖον. πάλιν εὐθείας τὸ μὲν τῶν περάτων μένον, τὸ δὲ περὶ αὐτὸ κινούμενον ἀπραγματεύτως γέγραφεν τὸν κύκλον. εἰ δέ τις ἔλικα μονόστροφον γράφειν ἐθέλῃσειεν, ποικιλωτέρας δεῖται μήχανῆς — καὶ γὰρ κινήσεις ποικίλαι γεννῶσιν αὐτὴν — καὶ εἴ τις τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι, κἀνταῦθα δεῖσεται μεθόδου τινὸς εἰς τὴν τοῦ τριγώνου σύστασιν. ἐρεῖ γὰρ ὁ γεωμετρικὸς νοῦς, ὅτι νοήσας εὐθεῖαν κατὰ μὲν θάτερον τῶν περάτων μένουσαν κατὰ δὲ θάτερον κινουμένην περὶ ἐκεῖνο καὶ σημεῖον ἀπὸ τοῦ μένοντος ἐπ' αὐτῆς κινούμενον γέγραφα τὴν μονόστροφον ἔλικα· ἅμα γὰρ καὶ τὸ πέρας τῆς εὐθείας κυκλογραφοῦν καὶ τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον εἰς ταῦτ' ἀποστασάντα καὶ συμπεσόντα ποιεῖ μοι τὴν τοιαύτην ἔλικα. καὶ πάλιν κύκλους ἴσους γράψας καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς εἰς τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἐπιζεύξας καὶ ἀπὸ θατέρου τῶν κέντρων ἐπὶ θάτερον εὐθεῖαν ἀγαγὼν ἔξω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. πολλοῦ ἄρα δεῖ ταῦτα δι' ἀπλῆς ἐπιβολῆς ἀποτελεῖσθαι καὶ τῆς πρώτης ἐπινοίας. ἀγαπώμεν γὰρ ἀκολουθοῦντες αὐτῶν ταῖς γενέσεις.

[FR179]

[FR180]

Τὸ μὲν οὖν ῥᾶον τὰ τοιαῦτα πορίζεσθαι ἢ καὶ χαλεπώτερον, καὶ ἢ διὰ πλειόνων δεῖξνυσθαι μέσων ἢ δι' ἐλαττόνων παρὰ τὰς ἔξεις γίγνεται τῶν μεταχειριζομένων, τὸ δὲ ὅλως ἀποδείξεως δεῖσθαι καὶ κατασκευῆς παρὰ τὴν ιδιότητα τῶν ζητουμένων τῆς τῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων ἐναργείας ἀπολειπομένην. ἄμφω μὲν οὖν τὸ ἀπλοῦν ἔχειν δεῖ καὶ εὐληπτον, τό τε αἶτημα λέγω καὶ τὸ ἀξίωμα, ἀλλὰ τὸ μὲν αἶτημα προστάττει ἡμῖν μηχανήσασθαι καὶ πορίσασθαι τινα ὕλην εἰς συμπτώματος ἀπόδοσιν ἀπλῆν ἔχουσιν καὶ εὐπετὴ τὴν λῆψιν, τὸ δὲ ἀξίωμα συμβεβηκός τι καθ' αὐτὸ λέγειν γνώριμον αὐτόθεν τοῖς ἀκούουσιν,

[FR181]

ὥσπερ καὶ τὸ θερμὸν εἶναι τὸ πῦρ ἢ ἄλλο τι τῶν περιφανεστάτων, ἐφ' ὧν τοὺς ἀποροῦντας ἢ αἰσθήσεως ἢ κολάσεως δεῖσθαι λέγομεν, ὥστε ὁμογενὲς μὲν τὸ αἶτημα τῷ ἀξιώματι, διαφέρον δὲ αὐτοῦ τὸν εἰρημένον τρόπον. ἐκάτερον γὰρ ἐστὶν ἀρχὴ ἀναπόδεικτος, ἀλλὰ τὸ μὲν ὡδί τὸ δὲ ἄλλως, καθάπερ εἶπομεν.

Ἦδη δὲ οἱ μὲν πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα. καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης τῶν ἀνισορροπιῶν ἀρχόμενος: „Αἰτούμεθα φησί, τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν.“ καίτοι τοῦτο μᾶλλον ἀξίωμα ἢ τις προσείποι. οἱ δὲ πάντα ἀξιώματα προσαγορεύουσιν, ὥσπερ δὴ καὶ θεωρήματα πάντα τὰ ἀποδείξεως δεόμενα. κατὰ τὴν αὐτὴν γὰρ ὡς ἔοικεν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν ἰδίων ἐπὶ τὰ κοινὰ μεταβέβηκασιν ὀνόματα. διέστηκεν δὲ ὅμως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος οὕτως καὶ αἶτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφοτέρω ἀναπόδεικτά ἐστι, καὶ τὸ μὲν ὡς εὐπόριστον λαμβάνεται, τὸ δὲ ὡς εὐγνωστον ὁμολογεῖται.

[FR182]

Γεμῖνος μὲν οὖν κατὰ τοῦτον τὸν λόγον τὰ αἰτήματα διαιρεῖ τῶν ἀξιωμάτων, ἄλλοι δ' ἂν φαῖεν, ὅτι τὰ μὲν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ἐστὶν ὕλης, τὰ δὲ κοινὰ πάσης τῆς περὶ τὸ ποσὸν καὶ πηλίκον θεωρίας. τὸ μὲν γὰρ τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι καὶ πᾶσαν εὐθείαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν ὁ γεωμέτρης οἶδεν, τὸ δὲ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι κοινή ἐστὶν ἔννοια καὶ ὁ τε ἀριθμητικὸς αὐτῇ χρῆται καὶ ἕκαστος τῶν ἐπιστημόνων ἐφαρμόζων τῇ ἑαυτοῦ ὕλῃ τὸ κοινόν. ὁ δὲ Ἀριστοτέλης, ὡς πρὶν καὶ πρότερον εἶπομεν, αἶτημά φησιν ἀποδεικτὸν ὃν καὶ μὴ συγχωρούμενον ὑπὸ τοῦ ἀκούοντος ὅμως ἀρχὴν λαμβάνεσθαι, τὸ δὲ ἀξίωμα ἀναπόδεικτον ὑπάρχειν καθ' αὐτὸ καὶ πάντας ἂν ὁμολογῆσαι κατὰ διάθεσιν, εἰ καὶ λόγου ἕνεκα τινὲς διαμφισβητοῖεν πρὸς αὐτό.

Τριῶν δὴ τούτων ὄντων διορισμῶν κατὰ μὲν τὸν πρῶτον, ὃς τῷ πορίσασθαι καὶ τῷ γινῶναι μόνον τὸ αἶτημα διίστησι τοῦ ἀξιώματος, δῆλον ὅτι τὸ πάσας ὀρθὰς ἴσας εἶναι τὰς γωνίας οὐκ ἔστιν αἶτημα, οὐδὲ τὸ πέμπτον τὸ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. ταῦτα γὰρ οὐκ εἰς κατασκευὴν λαμβάνεται οὐδὲ πορίσασθαι τι ἀξιοῖ, ἀλλὰ σύμπτωμά τι δηλοῖ ταῖς ὀρθαῖς γωνίαις συνυπάρχον καὶ ταῖς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομέναις. κατὰ δὲ τὸν δεύτερον οὐκ ἔσται ἀξίωμα τὸ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, ὃ καὶ νῦν τινες ὡς ἀξίωμα προσγράφουσι. καὶ γὰρ τοῦτο τῆς γεωμετρικῆς ὕλης ἐστὶν ὥσπερ τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς ἴσας εἶναι γωνίας, κατὰ δὲ τὸν τρίτον τὸν Ἀριστοτελικὸν πάντα μὲν, ὅσα δι' ἀποδείξεως πιστοῦται τινος, ἔσται αἰτήματα, ὅσα δὲ ἀναπόδεικτά ἐστιν, ἀξιώματα. μάτην οὖν τῶν ἀξιωμάτων Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις παραδιδόναι. ὀρθῶς γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέστησεν, ὅτι οἱ μὲν καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπενόησαν καὶ ἀπὸ ἀγνωστοτέρων μέσων τὰ γινώριμα πᾶσιν κατασκευάζειν ἐπεχείρησαν — ὃ δὴ πέπονθεν ὁ Ἀπολλώνιος δεικνύναι βουλόμενος ὅτι ἀληθὲς τὸ ἀξίωμα τὸ λέγον τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι — οἱ δὲ καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσειλήφασιν, ὡς αὐτὸς

[FR183]

Εὐκλείδης τό τε πέμπτον αἶτημα καὶ τὸ τέταρτον. καὶ γὰρ τοῦτο τινες ὡς ἀμφίβολον ἀποδείξεως δεῖσθαι φασί. καὶ πῶς γὰρ οὐ γελοῖον, ὣν τὰ ἀντίστροφα θεωρήματά ἐστιν ἀποδεικτά, ταῦτα ὡς ἀναπόδεικτα προστάττειν. ὅτι γὰρ τῶν συμπιπτουσῶν εὐθειῶν αἱ ἐντὸς ἐλάσσους εἰσὶ δυεῖν ὀρθαῖν, αὐτὸς ὁ Εὐκλείδης δείκνυσιν ἐν ἐκείνῳ τῷ θεωρήματι „παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.“ ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθὴ ἐστὶ δείκνυται σαφῶς· οὐκ ἄρα ἀναπόδεικτα τὰ τούτοις ἀντιστρέφοντα εἶναι συγχωρητέον, φησὶν ὁ **Γεμῖνος**. ἔοικεν οὖν κατὰ τὴν τούτου διάσταξιν τρία μὲν εἶναι αἰτήματα, τὰ δὲ λοιπὰ δύο δεῖσθαι τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, αὐτὰ τε καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα αὐτοῖς, ἐν δὲ τοῖς ἀξιώμασι τὸ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν προσκεῖσθαι περιττῶς, εἶπερ δι’ ἀποδείξεως ἔχοι τὸ πιστόν.

[FR184]

Περὶ μὲν οὖν τῆς διαφορᾶς τῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων τοσαῦτα, πάλιν δὲ αὐτῶν ἀξιωμάτων τὰ μὲν ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἴδια, τὰ δὲ γεωμετρίας, τὰ δὲ κοινὰ αὐταῖς ἀμφοτέραις. τὸ μὲν γὰρ πάντα ἀριθμὸν ὑπὸ μονάδος μετρεῖσθαι ἀξίωμα ἀριθμητικόν ἐστι, τὸ δὲ „αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσιν ἀλλήλαις“ καὶ τὸ πᾶν μέγεθος ἐπ’ ἄπειρον εἶναι διαιρετὸν ἀξιώματα γεωμετρικά ἐστιν, τὸ δὲ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι, καὶ ὅσα τοιαῦτα, κοινὰ ἐστὶν ἀμφοῖν. χρῆται δὲ ἑκατέρα καὶ τούτοις ἐφ’ ὅσον τὸ ὑποκείμενον ἀπαιτεῖ, οἷον ἡ μὲν γεωμετρία ἐπὶ μεγεθῶν, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ ἐπ’ ἀριθμῶν. ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν αἰτημάτων τὰ μὲν ἴδια τῶν ἐπιστημῶν ἐστὶν, τὰ δὲ κοινὰ. τὸ μὲν γὰρ διελεῖν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ ἐλάχιστα μέρη τῆς ἀριθμητικῆς ἴδιον ἂν φαίης αἶτημα, τὸ δὲ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν τῆς γεωμετρίας, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον αὔξειν τὸ ποσὸν κοινὸν ἀμφοτέρων, καὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος τοῦτο δύναται πάσχειν.

[FR185]

Pet. I–III. Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι.

Ταῦτα τὰ τρία καὶ ἐναργείας ἔνεκα καὶ τοῦ πορσασθαι τι προστάττειν ἡμῖν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἐξ ἀνάγκης ταχθήσεται κατὰ γε τὸν **Γεμῖνον**. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ἐπόμενόν ἐστι τῷ ῥύσιν εἶναι τοῦ σημείου τὴν γραμμὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν ὁμαλὴν καὶ ἀπαρέγκλιτον ῥύσιν. νοήσαντες οὖν τὸ σημεῖον κινούμενον τὴν ὁμαλὴν καὶ ἐλαχίστην κίνησιν ἐπὶ θάτερον σημεῖον καταστήσομεν, καὶ τὸ πρῶτον αἶτημα γέγονεν οὐδὲν ποικίλον ἡμῶν ἐπινενοηκότων. εἰ δὲ δὴ τῆς εὐθείας σημεῖω περατουμένης ὡσαύτως νοήσῃμεν τὸ πέρασ αὐτῆς κινούμενον τὴν ἐλαχίστην καὶ ὁμαλὴν κίνησιν, ἔσται τὸ δεύτερον αἶτημα πορισθὲν ἀπὸ εὐμηχάνου καὶ ἀπλῆς ἐπιβολῆς. εἰ δὲ αὐ

μένουσιν μὲν τὴν πεπερασμένην εὐθεΐαν κατὰ θάτερον, κινουμένην δὲ περὶ τὸ μένον κατὰ τὸ λοιπόν, τὸ τρίτον ἂν εἴη γένος. κέντρον μὲν γὰρ ἔσται τὸ μένον σημείον, διάστημα δὲ ἡ εὐθεΐα. ὅση γὰρ ἂν αὕτη τυγχάνῃ, τοσοῦτο ἔσται τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου πρὸς πάντα τὰ μέρη τῆς περιφερείας. εἰ δέ τις ἀποροίῃ, πῶς κινήσεις ἐπεισάγομεν τοῖς γεωμετρητοῖς ἀκινήτοις οὖσιν, πῶς δὲ τὰ ἀμερῇ κινούμεν — ταῦτα γὰρ ἀδύνατα εἶναι παντελῶς — ἀξιόσομεν αὐτὸν μὴ παντάπασιν δυσχεραίνειν μεμνημένον τῶν ἐν ἐρχῇ προαποδεδειγμένων, ὥς ἄρα περὶ τῶν ἐν φαντασίᾳ κειμένων οἱ λόγοι γράφουσιν ἐκεῖ πάντα τὰ τῆς διανοίας εἰκόνας ὧν ἔχει λόγων. τὸ γὰρ ἄγραφον γραμματεῖον οὗτος ἦν ὁ τελευταῖος νοῦς καὶ παθητικός. ἀλλ' οὐδὲν ἡμῖν ὁ λόγος οὗτος. ὁ γὰρ τοι νοῦς ὁ τὰ εἶδη δεχόμενος ἀλλαχόθεν διὰ κινήσεως αὐτὰ δέχεται. τὴν δὲ κίνησιν μὴ τοι σωματικὴν ἀλλὰ φανταστικὴν νοήσωμεν καὶ τὰ ἀμερῇ τὰς μὲν σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν τὰς δὲ αὐτὰς φανταστικὰς διεξόδους ὑπομένειν. καὶ γὰρ ὁ νοῦς ἀμερῆς ὧν κινεῖται καὶ οὐ τομικῶς καὶ ἡ φαντασία κατὰ τὸ ἑαυτῆς ἀμερὲς ἔχει κίνησιν ἰδίαν· ἡμεῖς δὲ εἰς τὰς σωματικὰς κινήσεις ἀποβλέποντες ἀπογινώσκομεν τῶν ἐν τοῖς ἀδιαστάτοις κινήσεων. τοῦ μὲν οὖν σωματικοῦ τόπου καὶ τῶν ἔξω κινήσεων τὰ ἀμερῇ καθαρεύει· κινήσεως δὲ ἄλλο εἶδος καὶ τόπος ἄλλος ἐπ' αὐτῶν θεωρεῖται ταῖς κινήσεσι σύστοιχος, ἐπεὶ καὶ θέσιν ἔχειν τὸ σημείον ἐν τῇ φαντασίᾳ λέγομεν καὶ οὐ ζητοῦμεν, πῶς ἀμερὲς ἔτι δύναται μένειν τὸ κινούμενόν που καὶ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόπου. τόπος γὰρ τῶν μὲν διαστατῶν διαστατός ἐστι, τῶν δὲ ἀμερῶν ἀδιάστατος. ἄλλα οὖν τὰ ἰδίως τῶν γεωμετρητῶν εἶδη καὶ ἄλλα τὰ ἀπ' ἐκείνων ὑφιστάμενα, καὶ ἄλλη τῶν σωμάτων κινήσεις, ἄλλη τῶν ἐν φαντασίᾳ νοουμένων, καὶ ἄλλος ὁ τῶν διαστατῶν τόπος, ἄλλος ὁ τῶν ἀμερῶν. καὶ χρὴ ταῦτα διελομένους μὴ συγχεῖν μηδὲ ἐπιταράττειν τῶν πραγμάτων τὰς οὐσίας.

[FR186]

[FR187]

Ἔοικεν μὲν τῶν τριῶν τούτων αἰτημάτων τὸ μὲν πρῶτον ἐν εἰκόσιν ἡμῖν ἐμφανίζειν, ὅπως τὰ ὄντα περιέχεται ἐν τοῖς αὐτῶν αἰτίοις ἀμερεστέροις οὖσι καὶ ὁρίζεται ἀπ' αὐτῶν, καὶ ὅτι καὶ πρὶν ὑποστῇ πανταχόθεν ὑπ' ἐκείνων περιείληται — καὶ γὰρ ἡ εὐθεΐα τῶν σημείων ὄντων ἐπὶ θάτερον ἀπὸ θατέρου ἐπιζευγνύται καὶ περατοῦνται ὑπ' αὐτῶν καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἀπείληπται — τὸ δὲ δεύτερον, ὅπως τὰ ὄντα ἐχόμενα τῶν οἰκείων ἀρχῶν πρόεισιν ἐπὶ πάντα τὴν τε πρὸς ἐκεῖνα συνέχειαν φυλάττοντα καὶ μὴ ἀποσπώμενα ἀπ' αὐτῶν, ἀλλὰ διὰ τὴν ἀπειροδύναμον αἰτίαν πάντῃ ἐπειγόμενα χωρεῖν, τὸ δὲ τρίτον, ὅπως τὰ προελθόντα πάλιν ἐπιστρέφεται πρὸς τὰς οἰκείας ἀρχάς. ἡ γὰρ τοῦ κινουμένου περὶ τὸ μένον στροφή τὸν κύκλον ἀπογεννώσα μιμεῖται τὴν κατὰ κύκλον ἐπάνοδον.

Δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι τὸ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι οὐ πάσαις ὑπάρχει γραμμαῖς· οὔτε γὰρ τῇ κυκλικῇ οὔτε τῇ κισσοειδεῖ οὔτε ὅλως ταῖς σχηματογραφούσαις, ἀλλ' οὐδὲ ταῖς μὴ ποιούσαις σχῆμα. οὐδὲ γὰρ ἡ μονόστροφος ἔλιξ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται — μεταξὺ γὰρ δύο σημείων ἔχει τὴν σύστασιν — οὐδὲ τῶν ἄλλων οὐδεμία γραμμῶν τῶν οὕτω γεννωμένων. ἀλλ' οὐδὲ ἀπὸ παντὸς σημείου δυνατὸν ἐπὶ πᾶν πᾶσαν ἐπιζευγνύναι γραμμὴν· οὐ γὰρ πᾶσα μεταξὺ πάντων σημείων

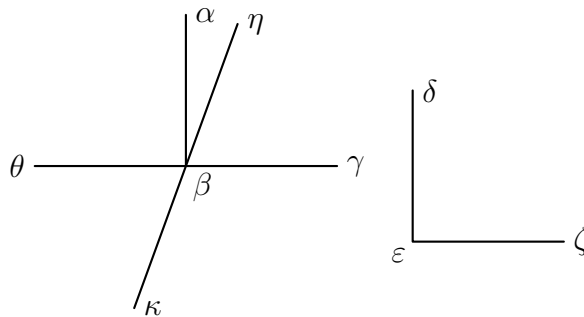
ὕψιστασθαι δύναται.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων· ἐπὶ δὲ τὰ ἐξῆς ἴωμεν.

[FR188]

Pet. III. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Τοῦτο εἰ μὲν ὡς ἐναργὲς καὶ μὴ δεόμενον ἀποδείξεως συγχωροῦμεν, αἴτημα μὲν οὐκ ἔστιν κατὰ τὸν Γεμῖνον, ἀξίωμα δέ. συμβεβληκὸς γὰρ τι καθ' αὐτὸ λέγει ταῖς ὀρθαῖς, ἀλλ' οὐ πορίσασθαι [τι] δι' ἀπλῆς ἐπινοίας ἀξιοῖ. ἀλλ' οὐδὲ κατὰ τὴν Ἀριστοτέλους διαίρεσιν αἴτημά ἐστι. τὸ γὰρ αἴτημα κατ' ἐκεῖνον δεῖται ἀποδείξεως τινός. εἰ δὲ ἀποδεικτὸν αὐτὸ φαῖμεν εἶναι καὶ ζητοῖμεν αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, οὐδ' ὡς κατὰ τὸν Γεμῖνον ἐν τοῖς αἰτήμασι ταχθήσεται. προφαίνεται μὲν οὖν καὶ κατὰ τὰς κοινὰς ἡμῶν ἐπινοίας ἢ τῶν ὀρθῶν ἰσότης, μονάδος δὲ ἔχουσα λόγον ἢ ὅρον πρὸς τὴν ἐπ' ἄπειρον αὐξήσιν καὶ ἐλάττωσιν τῶν ἐφ' ἑκάτερα γωνιῶν ἴση ἐστὶ πρὸς πᾶσαν ὀρθήν. καὶ γὰρ τὴν πρώτην οὕτως ὑπεστήσαμεν τὴν ὀρθήν, ἴσας τὰς ἐφ' ἑκάτερα γωνίας ποιήσαντες τῆς ἐφεστώσης εὐθείας, πρὸς ἣν ἐφέστηκεν. εἰ δὲ δεῖ καὶ ἀπόδειξιν αὐτοῦ παραθέσθαι γραμμικὴν, ἔστωσαν δύο ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ καὶ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$. λέγω δὴ ὅτι ἴσαι εἰσὶν. εἰ γὰρ μή, ἢ ἐτέρα μείζων. ἔστω ἡ πρὸς τὸ $\overline{\beta}$. ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς



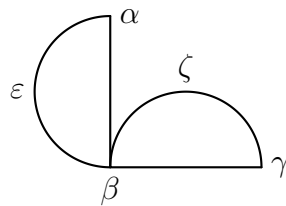
$\overline{\delta\epsilon}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\epsilon\zeta}$ ἐντὸς πεσεῖται, πιστεύω ὡς ἡ $\overline{\beta\eta}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\beta\gamma}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\theta}$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\theta}$ καὶ ἴσαι ἀλλήλαις — ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἴση τῇ ἐφεξῆς — ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\theta}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\beta\eta}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\kappa}$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\eta}$ καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθὴ διὰ ταῦτα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\eta}$. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\kappa}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\eta}$, ὥστε ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\theta}$ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\eta}$, ἀλλὰ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς.

[FR189]

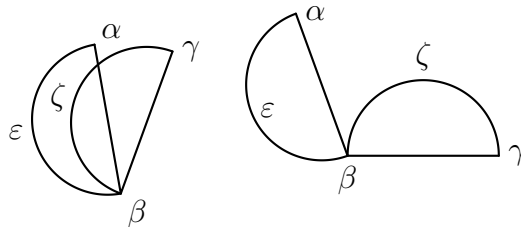
Τοῦτο μὲν οὖν καὶ ἄλλοις δέδεικται τῶν ἐξηγητῶν καὶ οὐ πολλῆς ἐδεῖτο πραγματείας, ὁ δὲ Πάππος ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι

ἀληθές, τὸ τὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίαν ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθήν, ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη, πάντως ὀρθὴν εἶναι, δύνασθαι δὲ καὶ περιφερόγραμμον γωνίαν ἴσην ὀρθῇ δειχθῆναι, καὶ δῆλον, ὥς οὐκέτι τὴν τοιαύτην ὀρθήν (εἶναι δύνασθαι;) προσαγορεύομεν. κατὰ γὰρ τὴν τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομὴν τὴν ὀρθήν ἐλαμβάνομεν ὑφιστάντες αὐτὴν ὑπὸ εὐθείας ἐφεστώσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἡ ἴση τῇ ὀρθῇ οὐ πάντως ὀρθή ἐστίν, εἴπερ μηδὲ εὐθύγραμμος. νενοήσθωσαν οὖν εὐθεῖαι δύο ἴσαι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$ ποιοῦσαι τὴν πρὸς τὸ β ὀρθήν, καὶ ἔστωσαν ἴσα καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡμικύκλια κέντρῳ καὶ διαστήματι γραφέντα τὰ $\alpha\epsilon\beta$ $\beta\zeta\gamma$. ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ ἡμικύκλια, ἐφαρμόσει ἀλλήλοις, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ $\epsilon\beta\alpha$

[FR190]



γωνία τῇ ὑπὸ $\zeta\beta\gamma$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ $\alpha\beta\zeta$. ὅλη ἄρα ἡ ὀρθὴ ἴση ἐστὶ τῇ μηνοειδεῖ τῇ ὑπὸ $\epsilon\beta\zeta$. καὶ ὅμως οὐκ ἔστιν ἡ μηνοειδὴς ὀρθή. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀμβλείας οὔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$ δειχθήσεται αὐτῇ ἴση γωνία ἡ μηνοειδὴς. τοῦτο γάρ ἐστι τὸ εἶδος τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν τὸ



συμβιβαζόμενον ταῖς εὐθυγράμμοις· πλὴν τό γε τοσοῦτον ἰστέον· ἐπὶ μὲν τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προσθεῖναι δεῖ τὴν μεταξὺ γωνίαν τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας καὶ $\overline{\beta\zeta}$ περιφερείας, ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφελεῖν. ἡ γὰρ $\overline{\alpha\beta}$ εὐθεῖα τέμνει τὴν $\overline{\beta\zeta}$ περιφέρειαν. ἐκκείσθω οὖν ἐκατέρας τῶν ὑποθέσεων τὰ διαγράμματα. Ταῦτα μὲν οὖν ἀναγεγράφθω δεικνύντα καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθή ἐστίν. εἰ γὰρ μηδὲ εὐθύγραμμος εἴη, πῶς ἂν ὀρθὴν τις εἴποι τὴν τοιαύτην;

[FR191]

Φανερόν δὲ καὶ ἐκ τοῦδε τοῦ αἰτήματος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τῇ ἰσότητι συγγενής ἐστίν, ὥσπερ ἡ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι. καὶ γὰρ ἐστίν ἡ μὲν ὀρθότης αὐτῇ τῇ ἰσότητι σύστοιχος — ἀμφοτέραι γὰρ ὑπὸ τὸ πέρας, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ὁμοιότης — ἡ δὲ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι, καθάπερ καὶ ἡ

ἀνομοιότης· ἀπειρίας γὰρ ἔχγονοι πᾶσαι. διὸ καὶ οἱ μὲν τὸ ποσὸν ὁρῶντες τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ λέγουσιν, οἱ δὲ τὸ ποιὸν ὁμοίαν. ὅπερ γὰρ ἔστιν ἐν ποσοῖς ἡ ἰσότης τοῦτο ἐν τοῖς ποιοῖς ἡ ὁμοιότης.

Pet. V. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάττονas ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας ἐπ’ ἄνειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλλάττονες.

Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρή τῶν αἰτημάτων· θεωρήμα γὰρ ἔστι, πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον, ἃς καὶ ὁ **Πτολεμαῖος** ἐν τινι βιβλίῳ διαλύσαι προύθετο, πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων. καὶ τό γε ἀντιστρέφον καὶ ὁ **Εὐκλείδης** ὡς θεωρήμα δείκνυσιν. ἴσως δὲ ἂν τινες ἀπατώμενοι καὶ τοῦτο τάττειν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἀξιώσειαν, ὡς διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῶν δύο ὀρθῶν αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον τῆς τῶν εὐθειῶν συνεύσεως καὶ συμπτώσεως. πρὸς οὓς ὁ **Γεμῖνος** ὀρθῶς ἀπήντησε λέγων ὅτι παρ’ αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις εἰς τὴν τῶν λόγων τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχὴν. ὅμοιον γὰρ φησι καὶ **Αριστοτέλης** ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν καὶ γεωμέτρου πιθανολογοῦντος ἀνέχεσθαι, καὶ ὁ παρὰ τῷ **Πλάτῳ** Σιμμίας, ὅτι „τοῖς ἐκ τῶν εἰκότων τὰς ἀποδείξεις ποιουμένοις σύνοιδα οὖσιν ἀλαζόσι“. κἀνταῦθα τοίνυν τὸ μὲν ἡλαττωμένων τῶν ὀρθῶν συνεύειν τὰς εὐθείας ἀληθὲς καὶ ἀναγκαῖον, τὸ δὲ συνευούσας ἐπὶ πλεόν ἐν τῷ ἐκβάλλεσθαι συμπεσεῖσθαι ποτε πιθανόν, ἀλλ’ οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μὴ τις ἀποδείξειεν λόγος, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τοῦτο ἀληθές. τὸ γὰρ εἶναί τινας γραμμὰς συνιούσας μὲν ἐπ’ ἄπειρον, ἀσυμπτώτους δὲ ὑπαρχούσας, καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστι καὶ περφόραται ἐπ’ ἄλλων εἰδῶν τῆς γραμμῆς. μήποτε οὖν τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν δυνατόν, ὅπερ ἐπ’ ἐκείνων τῶν γραμμῶν; ἕως γὰρ ἂν δι’ ἀποδείξεως αὐτὸ καταδησώμεθα, περιστᾷ τὴν φαντασίαν τὰ ἐπ’ ἄλλων δεικνύμενα γραμμῶν. εἰ δὲ καὶ οἱ διαμφισβητοῦντες λόγοι πρὸς τὴν σύμπτωσιν πολὺ τὸ πληκτικὸν ἔχοιεν, πῶς οὐχὶ πολλῶ πλεόν ἂν τὸ πιθανόν τοῦτο καὶ τὸ ἄλογον ἐκβάλλοιμεν τῆς ἡμετέρας παραδοχῆς;

Ἄλλ’ ὅτι μὲν ἀπόδειξιν χρή ζητεῖν τοῦ προκειμένου θεωρήματος δῆλον ἐκ τούτων, καὶ ὅτι τῆς τῶν αἰτημάτων ἔστιν ἀλλότριον ιδιότητος, πῶς δὲ ἀποδεικτέον αὐτὸ καὶ διὰ ποίων λόγων ἀναιρετέον τὰς πρὸς αὐτὸ φερομένας ἐνστάσεις, τηνικαῦτα λεκτέον, ἥνίκα ἂν καὶ ὁ στοιχειωτὴς αὐτοῦ μέλλῃ ποιεῖσθαι μνήμην ὡς ἐναργεῖ προσχρώμενος. τότε γὰρ ἀναγκαῖον αὐτοῦ δεῖξαι τὴν ἐνάργειαν οὐκ ἀναποδείκτως προφαινομένην ἀλλὰ δι’ ἀποδείξεων γνώριμον γιγνομένην.

Axiom. I–V. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἔστιν ἴσα, καὶ ἐὰν ἴσα ἴσοις προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα ἔστιν, καὶ ἐὰν ἴσων

[FR192]

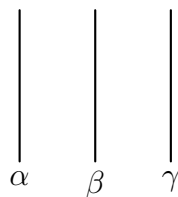
[FR193]

ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἴσα ἐστίν, καὶ τὸ ὅλον τοῦ
μέρους μείζον, καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἴας ἀλλήλοις ἐστίν.

Ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται, καὶ διαμφισβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδεὶς. πολλάκις μὲν γὰρ καὶ τὰς προτάσεις ἀπλῶς ἀξιώματα καλοῦσιν, ὅποῳι ποτε ἂν ᾧσιν εἴτε ἄμεσοι κυρίως εἴτε καὶ δεομεναί τινος ὑπομνήσεως, καὶ οἱ γε ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἀπαντα λόγον ἀπλοῦν ἀποφαντικὸν ἀξίωμα προσαγορεύειν εἰώθασιν. καὶ ὅταν διαλεκτικὰς ἡμῖν γράφωσι τέχνας περὶ ἀξιωμάτων, τοῦτο διὰ τῶν ἐπιγραμμάτων δηλοῦν ἐθέλουσιν. ἀκριβέστερον δέ τινες ἀπὸ τῶν ἄλλοω προτάσεων διακρίνοντες τὸ ἀξίωμα τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον δι' ἐνάργειαν πρότασιν οὕτως ὀνομάζουσιν, ὥσπερ καὶ ὁ Ἀριστοτέλης καὶ οἱ γεωμέτραι λέγουσιν. ταῦτὸν γὰρ ἐστὶν κατὰ τούτους ἀξίωμα καὶ ἔννοια κοινή. πολλοῦ ἄρα δεήσομεν ἡμεῖς τὸν γεωμέτρην Ἀπολλώνιον ἐπαινεῖν, ὃς καὶ τῶν ἀξιωμάτων ὡς οἶεται γέγραφεν ἀποδείξεις, ἀπεναντίας Εὐκλείδῃ φερόμενος. ὁ μὲν γὰρ καὶ τὸ ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς αἰτήμασι κατηρίθμησεν, ὁ δὲ καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις εὐρίσκειν. ἦν δὲ ἄρα διωρισμένα ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων τῇ φύσει καὶ τῶν ἐπιστημῶν διαφέρον τὸ γένος τῶν τε περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις καὶ πάντῃ δι' ἐνάργειαν προσπιπούσας καὶ τῶν ταῖς ἀποδείξεσι χρωμένων, αἱ τὰς ἀρχὰς ἀπ' ἐκείνων λαμβάνουσι καὶ λαβοῦσαι χρῶνται πρὸς τὰ οἰκεῖα συμπεράσματα δεόντως. ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, ἦν ὁ Ἀπολλώνιος εὐρηκέναι πέπεισται τοῦ πρώτου τῶν ἀξιωμάτων, οὐδὴν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμότερον, εἰ μὴ καὶ πλεον ἀμφισβητούμενον, μάθῃ τις ἂν ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. „ἔστω γὰρ, φησὶ, τὸ $\bar{\alpha}$ τῷ $\bar{\beta}$ ἴσον, τοῦτο δὲ τῷ $\bar{\gamma}$, λέγω ὅτι καὶ τὸ $\bar{\alpha}$ τῷ $\bar{\gamma}$ ἴσον. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\bar{\alpha}$ τῷ $\bar{\beta}$ ἴσον τὸν αὐτὸν αὐτῷ κατέχει τόπον, καὶ ἐπεὶ τὸ

[FR194]

[FR195]



$\bar{\beta}$ τῷ $\bar{\gamma}$ ἴσον, τὸν αὐτὸν καὶ τούτῳ κατέχει τόπον. καὶ τὸ $\bar{\alpha}$ ἄρα τῷ $\bar{\gamma}$ τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ἴσα ἄρα ἐστίν. “ ἐν δὲ τούτοις δύο προλαβεῖν ἀναγκαῖον, ἐν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἕτερον δὲ ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ταῦτα δὲ ὅτι πολλῷ ἀσαφέστερα τοῦ προτεθέντος ἀξιόματος ἐναργές· πῶς γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν ἐκπληροῦντα τόπον ἴσα ἐστίν· καθ' ὅλα ἢ κατὰ μέρος ἢ κατὰ σχηματισμὸν λόγου; διὸ καὶ οὐκ ἔστι παντελῶς εὐπαράδεκτον τὸ μεταβαίνειν ἐπὶ τὸν τόπον, ὃς ἐστὶν ἀγνωστότερος ἡμῖν τῶν ἐν τόπῳ ὄντων. χαλεπὴ γοῦν

καὶ ἡ εὕρεσις τῆς οὐσίας καὶ ἀμφισβητήσιμος. ἴν' οὖν μὴ μακρηγορῶμεν, πάντα ἀξιώματα ὡς ἄμεσα καὶ αὐτοφανῆ παραδοτέον, γνώριμα ἀφ' ἐαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν προσάγων οὐ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν, ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνάργειαν, ἣν ἔχομεν ἐν ταῖς ἀδιδάκτοις προλήψεσιν.

Τοῦτό τε δὴ περὶ τῶν ἀξιωμάτων προληπτέον κριτήριον τῆς ιδιότητος αὐτῶν, καὶ ὅτι πάντα τοῦ κοινοῦ γένους ἐστὶ τῶν μαθημάτων. οὐ γὰρ μόνον μεγέθεσιν ἐπαληθεύει τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῖς καὶ κινήσεσι καὶ χρόνοις. καὶ τοῦτο ἀναγκαίως. τὸ γὰρ ἴσον καὶ ἄνισον καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος καὶ τὸ μείζον καὶ τὸ ἔλασσον κοινὰ καὶ τῶν διηρημένων ἐστὶ ποσῶν καὶ τῶν συνεχῶν. ἢ τε οὖν περὶ τοὺς χρόνους θεωρία δεῖται πάντων τούτων ὡς ἐναργῶν καὶ ἡ περὶ τὰς κινήσεις καὶ ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ μεγέθη, καὶ ἐπὶ πάντων ἀληθές, καὶ τὸ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι καὶ τῶν λοιπῶν, ὅπερ ἂν λάβωμεν. κοινοῖς δὲ οὖσιν ἕκαστος χρῆται κατὰ τὴν οἰκεῖαν ὕλην, ἐφ' ὅσον αὐτὴ ἀπαιτεῖ, καὶ ὁ μὲν ὡς ἐπὶ μεγεθῶν, ὁ δὲ ὡς ἐπ' ἀριθμῶν, ὁ δὲ ὡς ἐπὶ γρόνων αὐτῷ προσχρῆται. καὶ οὕτως ἴδια γίνεται τὰ συμπεράσματα καθ' ἑκάστην ἐπιστήμην κὰν ἢ τὰ ἀξιώματα κοινά.

[FR196]

Καὶ μὴν καὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν οὔτε εἰς ἐλάχιστον δεῖ συναιρεῖν, ὡς Ἡρων ποιεῖ τρία μόνον ἐκθέμενος — ἀξίωμα γὰρ καὶ ὅτι τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον, καὶ ὁ γεωμέτρης πολλαχοῦ καὶ τοῦτο παραλαμβάνει πρὸς τὰς ἀποδείξεις, καὶ ὅτι τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα· καὶ γὰρ τοῦτο εὐθὺς ἐν τῷ τετάρτῳ συντελέσει πρὸς τὸ ζητούμενον — οὔτε αὖ προστιθέναι ἄλλα ἐπ' ἄλλοις, ὧν τὰ μὲν ἐστὶν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ὕλης, ὡς δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, καίτοι τῶν ἀξιωμάτων τοῦ κοινοῦ γένους ὄντων, ὡς εἵπομεν. τὰ δὲ ἔπεται τοῖς ἐκκειμένοις, οἷον τὸ ἴσα εἶναι τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια. τοῦτο γὰρ ἀκολουθεῖ τῷ ἂν ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἴσα εἶναι. τὰ γὰρ ἴσον τῷ ἡμίσει προσλαβόντα αὐτὸ τὸ ἡμισυ διπλάσια γίνεται τοῦ αὐτοῦ καὶ ἴσα ἀλλήλοις διὰ τὴν ἴσην προσθήκην. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν λόγον οὐ τὰ διπλάσια μόνον, ἀλλὰ καὶ τὰ τριπλάσια καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλάσια πάντα ἴσα φανήσεται.

[FR197]

Τούτοις δὲ τοῖς ἀξιόμασιν ὁ Πάππος συναναγράφεσθαί φησιν ὅτι καὶ ἂν ἴσοις ἄνισα προστεθῇ, ἢ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶν τῇ τῶν προστεθέντων, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, ἢ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἐξ ἀρχῆς. καὶ ἐστὶ καὶ ταῦτα προφανῆ μὲν ἀφ' ἐαυτῶν, δείκνυται δὲ ὅμως τοῦτον τὸν τρόπον. ἔστω ἴσα τὰ $\bar{\alpha}$ $\bar{\beta}$, καὶ προσκείσθω αὐτοῖς ἄνισα τὰ $\bar{\gamma}$ $\bar{\delta}$, μείζον δὲ τὸ $\bar{\gamma}$ τοῦ $\bar{\delta}$ τῷ $\bar{\epsilon}$, ἐπεὶ οὖν τὸ $\bar{\alpha}$ τῷ $\bar{\beta}$ ἴσον καὶ τὸ $\bar{\zeta}$ τῷ $\bar{\delta}$, τὸ $\bar{\alpha\zeta}$ τῷ $\bar{\beta\delta}$ ἴσον. ἐὰν γὰρ ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα. τὸ ἄρα $\bar{\gamma\alpha}$ τοῦ $\bar{\beta\delta}$ τῷ $\bar{\epsilon}$ μόνῳ ὑπερέχει, ὥ καὶ τὸ $\bar{\gamma}$ μόνον ὑπερεῖχεν τοῦ $\bar{\delta}$. πάλιν ἄνισα τὰ $\bar{\gamma}$ $\bar{\delta}$ καὶ προσκείσθω ἴσα τὰ $\bar{\alpha}$ $\bar{\beta}$, καὶ ἔστω τοῦ $\bar{\gamma}$ πρὸς τὸ $\bar{\delta}$ ὑπεροχὴ τὸ $\bar{\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν τὸ $\bar{\alpha}$ τῷ $\bar{\beta}$ ἴσον καὶ τὸ $\bar{\alpha\zeta}$ ἴσον τῷ $\bar{\beta\delta}$, ὅλον ἄρα τὸ $\bar{\alpha\gamma}$ τοῦ $\bar{\beta\delta}$ τῷ $\bar{\epsilon}$ μόνῳ ὑπερέχει, ὥ καὶ τὸ $\bar{\gamma}$ τοῦ $\bar{\delta}$.

[FR198]

Ταῦτα οὖν ἔπεται τοῖς προειρημένοις ἀξιόμασι καὶ εἰκότως ἐν τοῖς πλείστοις ἀντιγράφοις παραλείπεται, ὅσα δὲ ἄλλα τούτοις προστίθῃσιν, προεῖληπται διὰ τῶν ὅρων καὶ ἐκείνοις ἀκόλουθα, οἷον ὅτι πάντα τοῦ ἐπιπέδου τὰ μέρη καὶ τῆς εὐθείας ἀλλήλοις ἐφαρμόττει — τὰ γὰρ εἰς ἄκρον τεταμένα τοιαύτην ἔχει φύσιν — καὶ ὅτι γραμμὴν μὲν διαιρεῖ σημεῖον, ἐπιφάνειαν δὲ γραμμή, στερεὸν δὲ ἐπιφάνεια — πάντα γὰρ διαιρεῖται τούτοις, ὅφ' ὧν καὶ περατοῦται προσεχῶς — καὶ ὅτι τὸ ἄπειρον ἐν τοῖς μεγέθεσιν ἐστὶν καὶ τῇ προσθέσει καὶ τῇ ἐπικαθαιρέσει, δυνάμει δὲ ἐκάστερον· πᾶν γὰρ συνεχὲς ἐπ' ἄπειρον διαιρετόν ἐστι καὶ αὐξητόν.

[FR199]

PROPOSITIONUM PARS PRIOR.

Ἄλλ' ἐπεὶ καὶ ταῦτα συνεκεφαλαιωσάμεθα, τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς λοιπῶν τὴν ἐπίσκεψιν ποιησόμεθα· μέχρι γὰρ τούτων αἱ ἀρχαί. τῶν δὲ πρὸς γεωμετρίαν ἐνστάντων οἱ μὲν πλείστοι πρὸς τὰς ἀρχὰς ἠπόρησαν ἀνυπόστατα τὰ μέρη δεικνύναι σπουδάσαντες — ὧν καὶ οἱ λόγοι διατεθρύλθινται, τῶν μὲν καὶ πᾶσαν ἐπιστήμην ἀναιρῶντων καὶ ὥσπερ πολεμίων καρπούς ἐξ ἀλλοτρίας χώρας καὶ γονίμου τῆς φιλοσοφίας ἀφανιζόντων ὥσπερ τῶν **Ἐφεκτικῶν**, τῶν δὲ τὰς γεωμετρικὰς μόνας ἀρχὰς ἀνατρέπειν προθεμένων, ὥσπερ τῶν **Ἐπικουρείων** — οἱ δὲ ἤδη καὶ ταῖς ἀρχαῖς ἐπιτρέψαντες οὐ φασι τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς ἀποδείκνυσθαι, μὴ συγχωρηθέντος αὐτοῖς καὶ ἄλλου τινός, ὃ μὴ προεῖληπται ἐν ταῖς ἀρχαῖς. τοῦτον γὰρ τὸν τρόπον τῆς ἀντιρρήσεως μετῴληθεν **Ζήνων** ὁ Σιδώνιος μὲν, τῆς δὲ Ἐπικούρου μετασχὼν αἵρέσεως, πρὸς ὃν καὶ ὁ **Ποσειδώνιος** ὅλον γέγραφε βιβλίον δεικνὺς σαθρὰν αὐτοῦ πᾶσαν τὴν ἐπίνοιαν.

[FR200]

Ἄλλ' αἱ μὲν ὑπὲρ τῶν ἀρχῶν ἀντιλογίαι μετρίως ἡμῖν διὰ τῶν ἔμπροσθεν ἠνύσθησαν, τὴν δὲ τοῦ **Ζήνωνος** ἐπιβολὴν μικρὸν ὕστερον ἐπισκεψόμεθα. νυνὶ δὲ ἀναλαβόντες ἐπὶ βραχὺ τὸν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων λόγον καὶ περὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν καὶ τῶν ἐκατέρου μερῶν καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρέσεων ἐπὶ τὴν ἐξήγησιν τραπώμεθα τῶν δεικνυμένων ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ, τὰ μὲν γλαφυρότερα τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων τοῖς παλαιοῖς ἀναλεγόμενοι καὶ τὴν ἀπέραντον αὐτῶν πολυλογίαν συντέμνοντες, τὰ δὲ τεχνικώτερα καὶ μεθόδων ἐπιστημονικῶν ἐχόμενα παραδιδόντες, τῇ τῶν πραγμάτων ἐπεξεργασίᾳ πλέον ἀπονέμοντες ἢ τῇ ποικιλίᾳ τῶν πώσεων καὶ τῶν λημμάτων, οἷς ὥς τὸ πολὺ τοὺς νεαροπρεπεῖς ἐπιτρέχοντας ὀρώμεν.

Prop. I, probl. I. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης
τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Τῆς ἐπιστήμης πάσης διττῆς οὐσης καὶ τῆς μὲν περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις ἀσχολουμένης, τῆς δὲ περὶ τὰ ἐξ ἐκείνων δεικνύμενα καὶ ποριζόμενα καὶ ὅλως περὶ τὰ ἀκόλουθα ταῖς ἀρχαῖς ἐξελιττούσης τὴν ἑαυτῆς πραγματείαν, αὕτη πάλιν

[FR201]

ἐν τοῖς γεωμετρητοῖς λόγοις διεΐλεν ἑαυτὴν εἰς τε τὴν τῶν προβλημάτων ἀπεργασίαν καὶ τὴν τῶν θεωρημάτων εὗρεσιν, προβλήματα μὲν καλέσασα, ἐν οἷς τὰ μὴ ὄντα πω πορίσασθαι προτίθεται καὶ εἰς ἐμφανὲς παραγαγεῖν καὶ προσμηχανήσασθαι, θεωρήματα δὲ, ἐν οἷς τὸ ὑπάρχον ἢ μὴ ὑπάρχον ἰδεῖν καὶ γινῶναι καὶ ἀποδείξαι προαιρεῖται. τὰ μὲν γὰρ γενέσεις καὶ θέσεις καὶ παραβολάς, ἀναγραφάς καὶ περιγραφάς καὶ ἐναρμόσεις καὶ ἐπαφάς καὶ ὅσα τοιαῦτα ὑποστήσασθαι παρακελεύεται, τὰ δὲ τὰ συμπτώματα καὶ τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα τοῖς ὑποκειμένοις τῇ γεωμετρίᾳ πιέσαι καὶ καταδήσασθαι σπεύδει διὰ τῶν ἀποδείξεων. περὶ ὧν γε μὴν ζητήσεις γενέσθαι δυνατόν, περὶ τούτων πάντων ἡ γεωμετρία ποιεῖται τὸν λόγον, τὰ μὲν εἰς τὰ προβλήματα ἀναφέρουσα, τὰ δὲ εἰς τὰ θεωρήματα. καὶ γὰρ τὸ τί ἐστὶ ζητεῖ, καὶ τοῦτο διχῶς, ἢ γὰρ τὸν λόγον ζητεῖ καὶ τὴν νόησιν ἢ τὴν οὐσίαν αὐτὴν τοῦ ὑποκειμένου. λέγω δὲ οἷον ὅταν ζητῇ, τίς ἡ ὁμοιομερὴς γραμμὴ. τοῦτο γὰρ ζητοῦσα ἢ τὸν ὅρον εὑρεῖν ἐθέλει τῆς τοιαύτης γραμμῆς ὅτι ὁμοιομερὴς ἐστὶ γραμμὴ ἢ πάντα τὰ μόρια πᾶσιν ἐφαρμόζοντα ἔχουσα, ἢ αὐτὰ τὰ εἶδη τῶν ὁμοιομερῶν γραμμῶν λαβεῖν, οἷον ὅτι ἡ εὐθεῖά ἐστίν, ἡ περιφερὴς, ἡ περὶ κύλινδρον ἑλίζ. καὶ πρὸς τούτῳ τὸ εἶ ἐστὶν αὐτὸ καθ' αὐτὸ ζητεῖ — καὶ τοῦτο μάλιστα ἐν τοῖς διορισμοῖς ἐξατάζουσα, εἰ ἀδύνατον τὸ διὰ τοῦτο ζητούμενον ἢ δυνατόν, καὶ μέχρι τίνος ἐγγχωρεῖ καὶ ποσαχῶς — καὶ μὴν καὶ τὸ ὁποῖόν τί ἐστίν· ὅταν γὰρ τὰ καθ' αὐτὰ συμβεβηκότα τῷ τριγώνῳ καὶ τῷ κύκλῳ καὶ ταῖς παραλλήλοις ἐπισκοπῇ, δῆλον ὅτι τὸ ὁποῖόν ἐστὶν ἐνταῦθα ζητεῖ.

[FR202]

Τὴν γε μὴν αἰτίαν καὶ τὸ διὰ τί πολλοῖς μὲν ἔδοξεν ἡ γεωμετρία μὴ θεωρεῖν — ταύτης γὰρ ἐστὶ καὶ ὁ Ἀμφίνομος τῆς δόξης Ἀριστοτέλους κατάρξαντος — εὔροι δ' ἄν τις, φησὶν ὁ Γεμῖνος, καὶ τὴν τούτον ζήτησιν ἐν γεωμετρίᾳ. πῶς γὰρ οὐχὶ γεωμέτρου τὸ ζητῆσαι, δι' ἣν αἰτίαν ἐν μὲν τοῖς κύκλοις ἅπειρα πολυγώνια ἐγγράφεται ἰσόπλευρα, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οὐκέτι πολύεδρα σχήματα ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια καὶ ἐξ ὁμοίων ἐπιπέδων συγκείμενα δυνατόν ἐγγράφειν ἅπειρα; τίνος γὰρ ἂν εἶν τοῦτο καὶ ζητῆσαι καὶ εὑρεῖν ἢ τοῦ γεωμέτρου; ὅταν μὲν οὖν ὁ συλλογισμὸς ἢ δι' ἀδυνάτου τοῖς γεωμέτραις, ἀγαπῶσι τὸ σύμπτωμα μόνον εὑρεῖν, ὅταν δὲ διὰ προηγουμένης ἀποδείξεως, τότε πάλιν, εἰ μὲν ἐπὶ μέρους αἱ ἀποδείξεις γίγνουντο, οὕτω δῆλον τὸ αἷτιον, εἰ δὲ καθ' ὅλον καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων, εὐθύς καὶ τὸ διὰ τί γίγνεται καταφανές.

Περὶ μὲν οὖν τῶν ζητουμένων τοσαῦτα· πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευὴν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα. τούτων δὲ ἡ μὲν πρότασις λέγει, τίνος δεδομένου τί τὸ ζητούμενόν ἐστίν. ἡ γὰρ τελεία πρότασις ἐξ ἀμφοτέρων ἐστίν. ἡ δ' ἔκθεσις αὐτὸ καθ' αὐτὸ τὸ δεδομένον ἀποδιαλαβοῦσα προευντρεπίζει τῇ ζητήσει. ὁ δὲ διορισμὸς χωρὶς τὸ ζητούμενον, ὅτι ποτὲ ἐστίν, διασαφεί. ἡ δὲ κατασκευὴ τὰ ἐλλείποντα τῷ δεδομένῳ πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν προστίθησιν. ἡ δὲ ἀπόδειξις ἐπιστημονικῶς ἀπὸ τῶν ὁμολογηθέντων συνάγει τὸ προκείμενον. τὸ δὲ συμπέρασμα

[FR203]

πάλιν ἐπὶ τὴν πρότασιν ἀναστρέφει βεβαιοῦν τὸ δεδεδειγμένον. καὶ τὰ μὲν σύμ-
 παντα μέρη τῶν τε προβλημάτων καὶ τῶν θεωρημάτων ἐστὶ τοσαῦτα· τὰ δὲ
 ἀναγκαιότατα καὶ ἐν πᾶσιν ὑπάρχοντα πρότασις καὶ ἀπόδειξις καὶ συμπέρασμα.
 δεῖ γὰρ καὶ προειδέναι τὸ ζητούμενον καὶ δείκνυσθαι τοῦτο διὰ τῶν μέσων καὶ
 συνάγεσθαι τὸ δεδεδειγμένον. καὶ τούτων τῶν τριῶν ἐκλείπειν τι τῶν ἀδυνάτων
 ἐστίν. τὰ δὲ λοιπὰ πολλαχοῦ μὲν παραλαμβάνεται, πολλαχοῦ δὲ καὶ οὐδεμίαν
 παρέχοντα χρεῖαν παραλείπεται. διορισμός τε γὰρ καὶ ἔκθεσις οὐκ ἔστιν ἐν
 ἐκείνῳ τῷ προβλήματι ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν
 πρὸς τῇ βάσει διπλασίαν τῆς λοιπῆς, κατασκευὴ δὲ ἐν πλείστοις πάνυ θεωρήμασιν
 οὐκ ἔστι τῆς ἐκθέσεως ἀποχρώσεως ἄνευ προσθήκης ἄλλης ἐκ τῶν δεδομένων
 δείξαι τὸ προκείμενον. πότε οὖν ἐκλιμπάνειν τὴν ἔκθεσιν φαμεν; ὅταν ἐν τῇ
 προτάσει μὴδὲν ἢ δεδομένον ὅτι ἡ πρότασις διήρηται ὡς ἐπίπαν εἰς δεδομένον καὶ
 ζητούμενον. οὐ μὴν τοῦτο αἰεὶ γίνεται, ἀλλ' ἐνίοτε μόνον λέγει τὸ ζητούμενον,
 ὃ δεῖ γνῶναι ἢ πορίσασθαι, ὡς ἐπὶ τοῦ προειρημένου προβλήματος. οὐ γὰρ
 προλέγει, τίνος δεδομένου δεῖ συστήσασθαι τὸ ἰσοσκελὲς ἔχον ἑκατέραν τῶν
 ἴσων διπλασίαν τῆς λοιπῆς, ἀλλ' ὅτι δεῖ πορίσασθαι. καὶ γίνεται μὲν κἀνταῦθα
 ἐκ προοιωνισκομένων ἢ τοῦ προκειμένου λήψις. καὶ γὰρ τί τὸ ἰσοσκελὲς καὶ
 τί τὸ ἴσον ἢ διπλάσιον εἰδότες τυψκάνομεν. τοῦτο δὲ ἀπάσης διανοητικῆς
 μαθήσεως ἴδιόν φησιν Ἀριστοτέλης. ὑπόκειται δὲ ὅμως οὐδὲν ἡμῖν ὥσπερ ἐπ'
 ἄλλων προβλημάτων, οἷον ὅταν λέγῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα
 τεμεῖν. ἐνταῦθα γὰρ εὐθεῖα δέδοται, προσταττόμεθα δὲ αὐτὴν δίχα διελεῖν, καὶ
 διώρισται, τί μὲν τὸ δεδομένον χωρίς, τί δὲ τὸ ζητούμενον. ὅταν μὲν οὖν ἡ
 πρότασις ἀμφότερα ἔχῃ, τότε καὶ διορισμὸς εὐρίσκεται καὶ ἔκθεσις, ὅταν δὲ
 ἐκλείπῃ τὸ δεδομένον, ἐκλιμπάνει καὶ ταῦτα. ἢ γὰρ ἔκθεσις τοῦ δεδομένου
 ἐστίν καὶ ὁ διορισμός. ἔσται γὰρ ὁ αὐτὸς τῇ προτάσει. τί γὰρ ἄλλο ἂν εἴποις
 διοριζόμενος ἐπὶ τοῦ προοιωνισθέντος προβλήματος, ἢ ὅτι δεῖ εὐρεῖν ἰσοσκελὲς
 τοιόνδε; τοῦτο δ' ἦν ἡ πρότασις. ἐὰν ἄρα ἡ πρότασις μὴ ἔχῃ τὸ μὲν δεδομένον, τὸ
 δὲ ζητούμενον, ἢ μὲν ἔκθεσις σιωπᾷται τῷ μὴ εἶναι τὸ δεδομένον, ὃ δὲ διορισμὸς
 παραλείπεται, ἵνα μὴ ὁ αὐτὸς γένηται τῇ προτάσει. πολλὰ δ' ἂν εὖροις καὶ ἄλλα
 τοιαῦτα προβλήματα καὶ μάλιστα ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς καὶ ἐν τῷ δεκάτῳ εὐρεῖν
 δύο εὐθείας δυνάμει συμμέτρους μέσον περιεχούσας καὶ πάντα ὅσα τοιαῦτα.

[FR204]

[FR205]

Πᾶν γε μὴν τὸ δεδομένον καθ' ἓνα τούτων δίδεται τῶν τρόπων, ἢ θέσει, ἢ
 λόγῳ, ἢ μεγέθει, ἢ εἶδει. τὸ μὲν γὰρ σημεῖον θέσει δίδεται μόνον, γραμμὴ δὲ καὶ
 τὰ ἄλλα πᾶσιν. ὅταν γὰρ λέγωμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, τὸ εἶδος
 λέγομεν, ὁποῖον δέδοται τῆς γωνίας, ὅτι εὐθύγραμμον, ἵνα μὴ ζητῶμεν διὰ τῶν
 αὐτῶν μεθόδων καὶ τὴν περιφερόγραμμον δίχα τεμεῖν, ὅταν δὲ ὅτι δύο δοθεισῶν
 εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἀφελεῖν. τῷ μεγέθει δέδοται.
 τὸ γὰρ μείζον καὶ ἔλασσον καὶ τὸ πεπερασμένον καὶ ἀπειρον τοῦ μεγέθους ἐστὶν
 ἴδια κατηγορήματα. ὅταν δὲ λέγωμεν ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ
 ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται, δέδοται ὁ αὐτὸς λόγος ἐν τοῖς τέτρασιν μεγέθεσιν.
 ὅταν δὲ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ χρῇ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι,

[FR206]

τότε τῇ θέσει δέδοται τὸ σημεῖον. διὸ καὶ τῆς θέσεως διαφόρου δυναμένης εἶναι καὶ ἡ κατασκευὴ ποικιλίαν ἐπιδέχεται. δίδεται γὰρ τὸ σημεῖον ἢ ἔχω τῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ ἐπ' ἄκρων τῆς εὐθείας ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περάτων αὐτῆς. τετραχῶς οἶν τοῦ δεδομένου λαμβανομένου δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἔκθεσις γίνεται τετραχῶς. ἐνίοτε δὲ καὶ δύο συμπλέκει τρόπους καὶ τρεῖς.

Τὴν δὲ λεγομένην ἀπόδειξιν ὅτε μὲν καὶ τὰ ἴδια τῆς ἀποδείξεως ἔχουσιν εὐρήσομεν ἀπὸ τῶν ὀρισμῶν μέσων τὸ ζητούμενον δεικνύουσιν — αὕτη γὰρ ἀποδείξεως τελειότης — ὅτε δὲ ἐκ τεκμηρίων ἐπιχειροῦσαν. καὶ δεῖ μὴ λανθάνειν. πανταχοῦ μὲν γὰρ τὸ ἀναγκαῖον ἔχουσιν οἱ γεωμετρικοὶ λόγοι διὰ τὴν ὑποκειμένην ὕλην, οὐ πανταχοῦ δὲ περαίνονται διὰ τῶν ἀποδεικτικῶν μεθόδων. ὅταν γὰρ διὰ τοῦ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν ἴσην εἶναι δύο ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίας δεικνύηται τὸ τρίγωνον ἴσας ἔχον τὰς ἐντὸς τρεῖς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς, πῶς ἀπ' αἰτίας ἢ ἀπόδειξις αὕτη, πῶς δὲ οὐχὶ τεκμηρίον ἐστὶ τὸ μέσον; καὶ γὰρ μήπω τῆς ἐκτὸς οὔσης γωνίας αἱ ἐντὸς οὔσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἔστι γὰρ τὸ τρίγωνον καὶ τῆς πλευρᾶς μὴ ἐκβεβλημένης. ὅταν δὲ διὰ τῆς τῶν κύκλων περιγραφῆς τὸ συσταθὲν τρίγωνον ἰσόπλευρον δεικνύηται, ἀπ' αἰτίας ἢ ἐπιβολῇ γίνεται. τὴν γὰρ ὁμοιότητα καὶ ἰσότητα τῶν κύκλων τῆς τοῦ τριγώνου κατὰ τὰς πλευρὰς ἰσότητος αἰτιασόμεθα.

[FR207]

Τὸ γε μὴν συμπέρασμα διπλοῦν εἰώθασιν ποιεῖσθαι τινὰ τρόπον· καὶ γὰρ ὡς ἐπὶ τοῦ δεδομένου δείξαντες καὶ ὡς καθόλου συνάγουσιν ἀνατρέχοντες ἀπὸ τοῦ μερικοῦ συμπεράσματος ἐπὶ τὸ καθόλου. διότι γὰρ οὐ προσχρῶνται τῇ ιδιότητι τῶν ὑποκειμένων, ἀλλὰ πρὸ ὁμμάτων ποιούμενοι τὸ δεδομένον γράφουσι τὴν γωνίαν ἢ τὴν εὐθεΐαν, ταῦτόν ἡγοῦνται τὸ ἐπὶ ταύτης συναγόμενον καὶ ἐπὶ τοῦ ὁμοίου συμπεπεράσθαι παντός. μεταβαίνουν μὲν οὖν ἐπὶ τὸ καθόλου, ἵνα μὴ μερικὸν ὑπολάβωμεν εἶναι τὸ συμπέρασμα. εὐλόγως δὲ μεταβαίνουν, ἐπειδὴ τοῖς ἐκτεθεῖσιν, οὐχ ἢ ταῦτά ἐστιν, ἀλλ' ἢ τοῖς ἄλλοις ὅμοια, χρῶνται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν. οὐ γὰρ ἢ τοσὴδε ἐστὶν ἡ ἐκκειμένη γωνία ταύτη τὴν διχοτομίαν ποιούμεναι, ἀλλ' ἢ μόνον εὐθύγραμμος ἔστι δὲ τὸ μὲν τοσόνδε τῆς ἐκκειμένης ἴδιον, τὸ δὲ εὐθύγραμμον πασῶν τῶν εὐθυγράμμων κοινόν. ἔστω γὰρ ἡ δεδομένη ἡ ὀρθή. εἰ μὲν οὖν τῇ ἀποδείξει τὴν ὀρθότητα παρελάμβανον **[sic., marginal pencilled note: “περι!”]**, οὐκ ἡδυνάμην ἐπὶ πᾶν τὸ εἶδος τῆς εὐθυγράμμου μεταβαίνειν, εἰ δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν αὐτῆς οὐ προσποιούμαι, τὸ δὲ εὐθύγραμμον σκοποῦ μόνον, ὁμοίως ὁ λόγος ἐφαρμόσει καὶ παρὰ ταῖς εὐθυγράμμοις γωνίαις.

[FR208]

Ταῦτα δὲ πάντα τὰ προειρημένα σχεψόμεθα ἐπὶ τοῦ πρώτου τούτου προβλήματος. ὅτι μὲν γὰρ πρόβλημά ἐστι δῆλον. ἐπιτάττει γὰρ ἡμῖν τριγώνου μηχανήσασθαι γένεσιν ἰσοπλεύρου. συνέστηκεν δὲ ἡ ἐν τούτῳ πρότασις ἔκ τε τοῦ δεδομένου καὶ τοῦ ζητουμένου. δέδοται μὲν γὰρ εὐθεῖα πεπερασμένη, ζητεῖται δέ, πῶς ἂν ἐπ' αὐτῆς συσταίῃ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ ἡγεῖται τὸ δεδομένον, ἔπεται δὲ τὸ ζητούμενον, ἵνα καὶ συνημμένον πλέξης, εἰ ἐστὶν εὐθεῖα πεπερασμένη, δυνατόν ἐπ' αὐτῆς συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον. οὔτε γὰρ μὴ εὐθείας οὔσης συσταίῃ ἂν τρίγωνον — ὑπὸ γὰρ εὐθειῶν περιέχεται γραμ-

μῶν — οὔτε μὴ πεπερασμένης· οὐ γὰρ δύναται γωνία γενέσθαι [εἰ μὴ] πρὸς ἐνὶ σημείῳ· τῆς δὲ ἀπείρου πέρας σημεῖον οὐκ ἔστιν.

Μετὰ δὲ τὴν πρότασιν ἐξῆς ἡ ἔκθεσις· Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεία πεπερασμένη ἥδε. καὶ ὁρᾷς ὅτι το δεδομένον αὐτὸ λέγει μόνον ἡ ἔκθεσις, οὐ προσποιησομένη τὸ ζητούμενον. καὶ ἐπὶ ταύτῃ ὁ διορισμός· Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ἐκτεθείσης πεπερασμένης εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. τρόπον τινὰ προσεχείας ἐστὶν αἷτιος ὁ διορισμός. προσεχεστέρους γὰρ ἡμᾶς ποιεῖ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ἀναφωνῶν τὸ ζητούμενον, ὥσπερ ἡ ἔκθεσις εὐ μαθεστέρους ἀπεργάζεται πρὸ ὁμμάτων ποιουμένη τὸ δεδομένον. μετὰ δὲ τὸν διορισμὸν ἡ κατασκευὴ· Κέντρῳ μὲν τῷ ἐτέρῳ πέρατι τῆς εὐθείας διαστήματι δὲ τῷ λοιπῷ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ πρότερον [δισατήματι], διαστήματι δὲ τῷ κέντρῳ γεγράφθω κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κοίνου σημείου τῆς τῶν κύκλων τομῆς ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι. καὶ ὁρᾷς ὅτι πρὸς τὴν κατασκευὴν χρῶμαι τοῖς αἰτήμασιν, τῷ τε ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν συμεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν καὶ τῷ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι. καθόλου γὰρ τὰ μὲν αἰτήματα συντελεῖ ταῖς κατασκευαῖς τὰ δὲ ἀξιώματα ταῖς ἀποδείξεσιν. ἐφεξῆς οὖν ἡ ἀπόδειξις· Ἐπειδὴ θάτερον σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας κέντρον ἐστὶν τοῦ περιέχοντος αὐτὸ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἐπεὶ τὸ λοιπὸν σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς δοθείσης τοῦ περιέχοντος αὐτὸ κύκλου κέντρον ἐστίν, ἴση ἐστὶν ἡ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. καὶ τούτων ὑπόμνησις ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου, ὃς ἔλεγεν ἴσας εἶναι τὰς ἐκ τοῦ κέντρου πάσας. ἕκαστέρα ἄρα δὴ αὐτῇ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα διὰ τὸ $\bar{\alpha}$ ἀξίωμα. αἱ τρεῖς ἄρα ἴσαι. συνέστη ἄρα ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον. τοῦτο μὲν τὸ πρότερον συμπέρασμα τῇ ἐκθέσει ἐπόμενον. ἐπὶ δὲ τούτῳ τὸ καθόλου· Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέστη. καὶ γὰρ τὴν διπλασίαν τῆς νῦν ἐκτεθείσης ποιήσης δεδομένην, αἱ αὐταὶ κατασκευαὶ καὶ ἀποδείξεις ἀρμόσουσιν, καὶν τριπλασίαν καὶν ἄλλην ὁπωσοῦν μείζονα ταύτης ἢ ἐλάσσονα λάβης. τοῦτοις δὲ προσέθηκεν τὸ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, δεικνύς ὅτι τὸ συμπέρασμα προβληματικόν. καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν θεωρημάτων προστίθῃσι τὸ ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὰ μὲν γὰρ ποιήσιν ἐπαγγέλλεται τινος, τὰ δὲ δεῖξιν καὶ εὔρεσιν ὄντος. ὅλως μὲν οὖν ἐπάγει ταῦτα τοῖς συμπεράσμασιν ἐνδεικνύμενος, ὅτι τὰ τῆς προτάσεως γέγονεν, καὶ τέλος ἀρχῇ συνάπτων καὶ μιμούμενος τὸν ἀνελιχθέντα νοῦν καὶ πάλιν εἰς τὴν ἀρχὴν ἐπιστρέφοντα. οὐ ταῦτὸν δέ, ἀλλ' ὅτε μὲν τὸ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, ὅτε δὲ τὸ ὅπερ ἔδει δεῖξαι διὰ τὴν τῶν προβλημάτων πρὸς τὰ θεωρήματα διαφοράν.

Ἡμεῖς μὲν οὖν ἐφ' ἐνὸς τοῦ πρώτου προβλήματος ἐγυμνάσαμεν πάντα ταῦτα καὶ σαφῇ πεποιθήκαμεν. δεῖ δὲ τοὺς ἀκούοντας καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ταῦτα ζητεῖν, τίνα μὲν παραλαμβάνεται, τίνα δὲ παραλείπεται τῶν κεφαλαίων καὶ ποσαχῶς τὸ δεδομένον δέδοται, καὶ ἀπὸ ποίων ἀρχῶν ἢ τὰς κατασκευὰς ἢ τὰς ἀποδείξεις

[FR209]

[FR210]

λαμβάνομεν. ἡ γὰρ τούτων συνοπτικὴ θεωρία γυμνασίαν οὐκ ὀλίγην ἐμποιεῖ καὶ μελέτην τῶν ἐν γεωμετρίας λόγων. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ταῦτα διώριστα, φέρε καὶ περὶ τῶν συνηρημένων τούτοις βραχέα διέλθωμεν, τί λῆμμα, τί πτώσις, τί πόρισμα, τί ἔνστασις, τί ἀναγωγή.

Τὸ μὲν οὖν λῆμμα πολλάκις καὶ κατὰ πάσης προτάσεως εἰς κατασκευὴν ἄλλου λαμβανομένης κατηγοροῦσιν, ἐκ τοσῶνδε λημμάτων αὐτοῖς τὴν ἀπόδειξιν γεγονέναι φάσκοντες. ἰδίως δὲ τὸ ἐν τοῖς γεωμετρούμενοις λῆμμα πρότασις ἐστὶ δεομένη πίστεως. ὅταν γὰρ ἡ περὶ τὴν κατασκευὴν ἢ περὶ τὴν ἀπόδειξιν λάβωμεν τι τῶν μὴ δεδειγμένων ἀλλὰ λόγου δεομένων, τότε τὸ ληφθὲν ὡς ἀμφίβολον καθ' αὐτὸ ζητήσεως ἀξιώσαντες λῆμμα αὐτὸ προσαγορεύομεν τοῦ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος διαφέρων τῷ ἀποδεικτὸν ὑπάρχειν, ἐκείνων ἄνευ ἀποδείξεως εἰς πίστιν ἄλλων αὐτόθεν παραλαμβανομένων περὶ δὲ τὴν εὕρεσιν τῶν λημμάτων τὸ μὲν ἄριστον τῆς διανοίας ἐστὶ πρὸς τοῦτο ἐπιτηδεϊότης. πολλοὺς γὰρ ἐστὶν ἰδεῖν ὁξεῖς περὶ τὰς λύσεις καὶ οὐ μεθόδοις τοῦτο ποιοῦντας, ὅσπερ καὶ ὁ καθ' ἡμᾶς **Κράτιστος** ἱκανὸς μὲν ἦν θηρᾶν τὸ ζητούμενον ἐκ πρώτων καὶ ἐλαχίστων ὡς δυνατόν. ἐχρήσατο δὲ τῇ φύσει πρὸς εὕρεσιν. μέθοδοι δὲ ὅμως παραδίδονται, καλλίστη μὲν ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως ἐπ' ἀρχὴν ὁμολογουμένην ἀνάγουσα τὸ ζητούμενον, ἣν καὶ ὁ **Πλάτων** ὡς φασὶν **Λεωδάμαντι** παραδέδωκεν, ἀφ' ἧς καὶ ἐκεῖνος πολλῶν κατὰ γεωμετρίαν εὕρετῆς ἱστορήται γενέσθαι. δευτέρα δὲ ἡ διαιρητική, κατ' ἄρθρα μὲν διαιροῦσα τὸ προκείμενον γένος, ἀφορμὴν δὲ τῇ ἀποδείξει παρεχομένη διὰ τῆς τῶν ἄλλων ἀναιρέσεως τῆς τοῦ προκειμένου κατασκευῆς, ἣν καὶ αὐτὴν ὁ **Πλάτων** ἐξύμνησεν ὡς πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις ἐπικουρον γινομένην. τρίτη δὲ ἡ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς οὐκ αὐτὸ δεικνύσα τὸ ζητούμενον αὐτόθεν, ἀλλὰ τὸ ἀντικείμενον ἐλέγχουσα καὶ κατὰ συμβεβηκὸς τὸ ἀληθὲς εὐρίσκουσα.

Τὸ μὲν οὖν λῆμμα τοιαύτην ἔχει θεωρίαν, ἡ δὲ **πτῶσις** διαφορὸς τῆς κατασκευῆς τρόπους ἐπαγγέλλεται καὶ θέσεων ἐξαλλαγὴν τῶν σημείων μετατιθεμένων ἢ τῶν γραμμῶν ἢ τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν στερεῶν. καὶ ὅλως πᾶσα αὐτῆς ἢ ποικιλία περὶ τὴν καταγραφὴν ὁράται, διὸ καὶ πτώσις ἀποκαλεῖται μετάθεσις οὖσα τῆς κατασκευῆς.

Τὸ δὲ **πόρισμα** λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ **Εὐκλείδη** γεγραμμένα πορίσματα. λέγεται δὲ ἰδίως ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν, ὥσπερ τι κέρδος ὃν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον.

Ἡ δὲ **ἐνστασις** κωλύει τὴν ὅλην ἀτραπὸν τοῦ λόγου ἥτοι πρὸς τὴν κατασκευὴν ἢ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ἀπαντῶσα, καὶ οὐχ ὥσπερ τὴν πτώσιν προθέμενον ἀναγκαῖον ἐπιδεικνύναι τὴν πρότασιν ἐπαληθεύουσιν, οὕτω καὶ τὴν ἐνστασιν, ἀλλὰ ἀναλεῖν δεῖ τὴν ἐνστασιν καὶ δεῖξαι τὸν χρώμενον αὐτῇ θεωρούμενον.

Ἡ δὲ **ἀπαγωγή** μετάβασις ἐστὶν ἀπ' ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο, οὗ γνωσθέντος ἢ πορισθέντος καὶ τὸ προκείμενον ἔσται καταφανές οἷον ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς

[FR211]

[FR212]

[FR213]

ἄλλο, ὃ τοῦτο ἔπεται, τὴν εὐρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζητοῦν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὐρεθῇεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι **Ἰποκράτην** τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον ἐτετραγώνισε καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυῆς περὶ τὰ διαγράμματα εἶπερ τις ἄλλος γενόμενος.

Τοιαῦτα καὶ περὶ τούτων· ἐπὶ δὲ τὸ προκείμενον ἐπανέλθωμεν πρόβλημα.

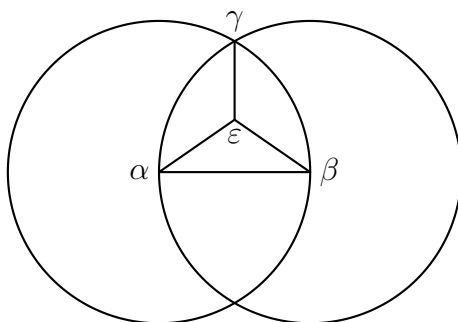
Τό μὲν οὖν ἰσόπλευρον τρίγωνον ὅτι κάλλιστον ἐν τοῖς τριγώνοις καὶ τῷ κύκλῳ συγγενέστατον τῷ πάσας ἴσας ἔχοντι τὰς ἐκ τοῦ κέντρου καὶ μίαν καὶ ἀπλὴν τὴν ἔξωθεν αὐτὸ ὀρίζουσιν γραμμὴν παντὶ καταφανές. ἔοικεν δὲ ἡ τῶν δύο κύκλων περίληψις, καὶ τούτων ἐκ μέρους ἑκατέρου — οὐ γὰρ εἰς ὅλον ἑκάτερον ἐγγέγραπται, ἀλλ' εἰς τὸ ἕκτον ἑκατέρου — δηλοῦν ὡς ἐν εἰκόσιν, ὅπως καὶ τὰ προελθόντα ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τὸ τέλειον καὶ τὸ ταῦτόν καὶ τὸ ἴσον ἀπ' ἐκείνων καταδέχεται. κατὰ γὰρ τοῦτον τὸν τρόπον καὶ τὰ ἐπ' εὐθείας κινούμενα κύκλῳ περιάγεται διὰ τῆς αἰ γενεσίης, καὶ αἱ ψυχαὶ μεταβατικὰς ἔχουσαι νοήσεις διὰ τῶν ἀποκαταστάσεων καὶ τῶν περιόδων ἀπεικονίζουσι τὴν ἀμετάβατον ἀνέργειαν τοῦ νοῦ. λέγεται δὲ καὶ ὑπὸ δύο νοῶν ἡ ζωογόνος πηγὴ περιέχεσθαι τῶν ψυχῶν. εἰ τοίνυν ὁ μὲν κύκλος εἰκὼν ἐστὶ τῆς νοερᾶς οὐσίας, τὸ δὲ τρίγωνον τῆς πρωτίστης ψυχῆς διὰ τε τὴν ἰσότητά καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν, εἰκότως ἂν ταὶ τοῦτο διὰ τῶν κύκλων ἐν αὐτοῖς μέσον ἀπολαμβανόμενον ἰσόπλευρον ἀποδεικνύοιτο. εἰ δὲ καὶ πᾶσα ψυχὴ πρόεισιν ἀπὸ νοῦ καὶ ἐπιστρέφει πρὸς νοῦν καὶ μετέχει τοῦ νοῦ δυαδικῶς, εὖ ἂν ἔχοι καὶ ταύτῃ τὸ τρίγωνον τῆς τριφυοῦς τῶν ψυχῶν ὑποστάσεως σύμβολον ὃν ὑπὸ δυεῖν κύκλων περιληφθὲν λαμβάνειν τὴν γένεσιν.

[FR214]

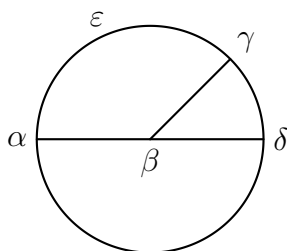
Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ὡς ἐξ εἰκόνων ἡμᾶς ἀναμιμνησκέτω τῆς τῶν πραγμάτων φύσεως. ἐπειδὴ δὲ τινες πρὸς τὴν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν ἐνέστησαν οἰόμενοι τὴν ὅλην γεωμετρίαν διελέγχειν βραχέα καὶ πρὸς τούτους ἀπαντήσομεν. λέγει δὲ **Ζήνων** ἐκεῖνος, οὗ καὶ πρότερον ἐμνήσθην, ὅτι, καὶ ταῖς ἀρχαῖς τις ἐπιτρέψῃ τῶν γεωμετρῶν, οὐκ ἂν συσταίῃ τὰ ἐφεξῆς, μὴ συγχωρηθέντος αὐτοῖς ὅτι δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ τμήματα οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ τοῦτο μὴ δοθῇ, τὸ ἰσόπλευρον οὐ δείκνυται τρίγωνον. ἔστω γὰρ φησὶν ἡ $\overline{\alpha\beta}$ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς δεῖ συστήσασθαι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. καταγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\gamma\epsilon\alpha}$ $\overline{\gamma\epsilon\beta}$ κοινόν ἔχουσαι τὸ $\overline{\gamma\epsilon}$ τμήμα. συμβαίνει τοίνυν τὰς μὲν ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἴσας εἶναι τῇ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ δοθείσῃ, οὐκέτι δὲ τὰς τοῦ τριγώνου ἴσας, ἀλλὰ ἐλάσσονας τὰς δύο τῆς $\overline{\alpha\beta}$. τούτου δὲ μὴ συστάντος οὐδ' ἂν τὰ ἐφεξῆς ἔτι σύστασιν λάβοι. μήποτε οὖν, φησὶν ὁ **Ζήνων**, καὶ τῶν ἀρχῶν δοθεισῶν οὐχὶ ἔπεται τὰ ἐξῆς, εἰ μὴ καὶ τοῦτο προληφθῇ τὸ μήτε περιφερῶν μήτε εὐθειῶν εἶναι τμήματα κοινά.

[FR215]

Πρὸς δὲ ταῦτα ῥητέον πρῶτον μὲν, ὅτι τοῦτο τρόπον τινὰ προεῖληπται ἐν ταῖς ἀρχαῖς τὸ δύο εὐθειῶν μὴ εἶναι τμήμα κοινόν — καὶ γὰρ ὁ τῆς εὐθείας ὀρισμὸς τοῦτο εἶχεν, εἶπερ εὐθεῖά ἐστὶν ἡ ἐξ ἴσου κειμένη τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. τὸ



γάρ ἴσον εἶναι τὸ διάστημα τῶν σημείων τῇ εὐθείᾳ μίαν ποιεῖ τὴν συνάπτουσαν αὐτὰ καὶ ἐλάχιστην, ὥστε, εἴ τις αὐτὴν κατὰ μέρος ἐφαρμόσῃ, καὶ κατὰ λοιπὸν μέρος ἐφαρμόττειν. ἐπ' ἄκρον γὰρ τεταμένη διὰ τὸ ἐλάχιστην εἶναι ὅλη ἐπὶ ὅλην πίπτειν ἀναγκασθήσεται — καὶ δὴ καὶ ὅτι ἐν τοῖς αἰτήμασι τοῦτο προδήλως εἴληπται. τὸ γὰρ καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν δεικνύει σαφῶς, ὅτι μίαν εἶναι δεῖ τὴν ἐκβαλλομένην καὶ κατὰ μίαν κίνησιν ἐκβάλλεσθαι. εἰ δὲ δεῖ καὶ ὥσπερ λήμματος τούτου λαβεῖν ἀπόδειξιν, ἔστω, εἰ δυνατόν ἢ $\overline{\alpha\beta}$ [FR216]
 τμήμα κοινὸν τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ τῆς $\overline{\alpha\delta}$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β , διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\beta\alpha}$ γεγράφθω κύκλος ὁ $\overline{\alpha\gamma\delta}$. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἐστὶ διὰ τοῦ κέντρου ἢ $\overline{\alpha\beta\gamma}$,



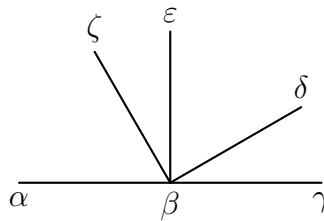
ἡμικύκλιόν ἐστι τὸ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου ἢ $\overline{\alpha\beta\delta}$ ἡμικύκλιον τὸ $\overline{\alpha\epsilon\delta}$. ἴσα ἄρα ἀλλήλοις τὰ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$ $\overline{\alpha\epsilon\delta}$ ὅπερ ἀδύνατον.

Πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπόδειξιν ὁ **Ζηνων** εἶποι ἄν, ὅτι καὶ τὸ τὴν διάμετρον δίχα τέμνειν τὸν κύκλον ἀποδέδεικται προλαβόντων ἡμῶν, ὅτι οὐκ ἔστι δύο περιφερειῶν ἐν τμήμα κοινόν. οὕτω γὰρ ἐλαμβάνομεν τὴν ἐτέραν ἐπὶ τὴν ἐτέραν ἐφαρμόττειν τῶν περιφερειῶν, ἢ μὴ ἐφαρμόττουσαν ἐκτὸς πίπτειν ἢ ἐντός. κωλύει δέ, φησὶν, οὐδὲν μὴ ὅλην ἐφαρμόζειν πρὸς ὅλην, ἀλλὰ κατὰ τι μέρος. ἕως δ' ἂν μὴ ἀποδεικνύηται τὸ τὴν διάμετρον δίχα τέμνειν τὸν κύκλον οὐδὲ τὸ προκείμενον δειχθήσεται.

Πρὸς ταῦτα καὶ ὁ **Ποσειδώνιος** ὀρθῶς ἀπήντησεν ἐπισκώψας τὸν δριμὺν **Ἐπίκουρον** ὥς οὐ συνειδότα, κἂν κατὰ μέρος μὴ ἐφαρμόττωσιν αἱ περιφέρειαι, προχωροῦσαν τὴν ἀπόδειξιν· καθ' ὃ γὰρ οὐκ ἐφαρμόζουσι μέρος, ἢ μὲν ἐντός, ἢ δὲ ἐκτὸς ἔσται, καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα, τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου προβληθείσης [FR217]

ἐπὶ τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν. ἔσονται γὰρ ἴσαι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσαι, ἥ τε μείζων ἢ ἐπὶ τὴν ἐκτὸς καὶ ἡ ἐλάσσων ἢ ἐπὶ τὴν ἐντὸς. ἡ οὖν ὅλη πρὸς ὅλην ἐφαρμόσει καὶ ἴσαι εἰσὶν, ἥ κατὰ μέρος ἐφαρμόζουσα παραλλάττει καθ' ἕτερον, ἡ οὐδὲν μέρος αὐτῆς οὐδενὶ ἐφαρμόζει, καὶ εἰ τοῦτο, ἡ ἐκτὸς πίπτει ἢ ἐντὸς· πάντα δὲ ταῦτα ὡσαύτως διελέγχεται.

Ταῦτα μὲν ὑπὲρ τούτων· ὁ δὲ **Ζήνων** ἐτέραν ἀπόδειξιν ἀναγράφει τοιαύτην, ἣν καὶ διαβάλλειν ἐπιχειρεῖ. ἔστω γὰρ δύο εὐθειῶν τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$ τμήμα κοινὸν ἢ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἥχθω τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ πρὸς ὀρθᾶς ἡ $\overline{\beta\epsilon}$. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$. εἰ μὲν

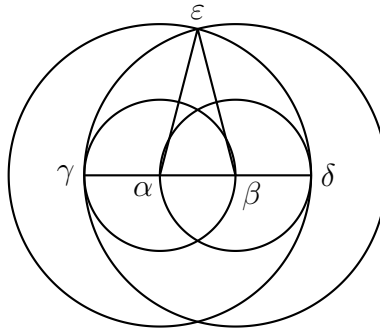


οὖν καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\delta}$ ὀρθή, ἴσαι ἔσονται, ὅπερ ἀδύνατον, εἰ δὲ μή, ἥχθω τῇ $\overline{\alpha\delta}$ πρὸς ὀρθᾶς ἡ $\overline{\zeta\beta}$. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\beta\alpha}$. ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\alpha}$ ὀρθή· ἴσαι ἄρα εἰσὶν ἀλλήλαις, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν οὖν ἀπόδειξις αὕτη διαβάλλει δὲ αὐτὴν ὡς προλαμβάνουσάν τι τῶν ὕστερον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ [εὐθειᾷ] πρὸς ὀρθᾶς ἀγαγεῖν. ὁ δὲ **Ποσειδώνιος** οὐδαμοῦ μὲν ἐν ταῖς στοιχειώσεσιν ἀπόδειξιν τοιαύτην φέρεσθαι φησιν, ἀλλὰ τὸν **Ζήωνα** συκοφαντεῖν τοὺς ἐφ' ἑαυτοῦ γεωμέτρως ὡς μοχθηροῦ ἀποδείξει χρωμένους· εἶναι δὲ τίνα καὶ ὑπὲρ ταύτης λόγον εἰπεῖν. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ τις πάντως ἐκατέρᾳ τῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθᾶς — πᾶσαι γὰρ δύο εὐθεῖαι δύνανται ποιεῖν ὀρθήν. καὶ τοῦτο προειλήφαμεν ὀριζόμενοι τὴν ὀρθήν. παρὰ γὰρ τὴν τοιάνδε κλίσιν μόνην ὑφίστανομεν τὴν ὀρθήν — ἔστω ἥδε τυχὸν ἦν ἀνεστήσαμεν. πρὸς τὸ καὶ αὐτὸν τὸν **Ἐπίκουρον** συγχωρεῖν καὶ τοὺς ἄλλους φιλοσόφους πολλὰ μὲν δυνατὰ πολλὰ δὲ καὶ τῆς ἀδυνάτου ὕλης ὑποτίθεσθαι τῆς τοῦ ἀκολούθου ἔνεκα θεωρίας.

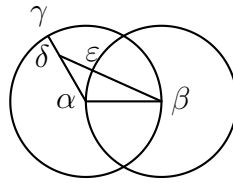
[FR218]

Τοσαῦτα περὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. δεῖ δὲ καὶ τὰ λοιπὰ συστήσασθαι καὶ πρότερον τὸ ἰσοσκελές. ἔστω οὖν ἡ $\overline{\alpha\beta}$, ἐφ' ἧς δεῖ συστήσασθαι τὸ ἰσοσκελές. καὶ γεγράφθωσαν κύκλοι ὡς ἐπὶ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἐπὶ τὰ $\overline{\gamma}$ $\overline{\delta}$ σημεία. ἴσα ἄρα ἡ $\overline{\gamma\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$. κέντρῳ οὖν τῷ $\overline{\beta}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\gamma\beta}$ γεγράφθω κύκλος ὁ $\overline{\gamma\epsilon}$, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ $\overline{\alpha}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\delta\alpha}$ ὁ $\overline{\delta\epsilon}$ κύκλος. καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\epsilon}$, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι εἰς τὰ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ σημεία ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\epsilon\alpha}$ $\overline{\epsilon\beta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν $\overline{\epsilon\alpha}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$, ἡ δὲ $\overline{\epsilon\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$, ἴση δὲ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$, ἴση καὶ ἡ $\overline{\epsilon\alpha}$ τῇ $\overline{\epsilon\beta}$. ἀλλὰ καὶ μείζους τῆς $\overline{\alpha\beta}$. ἰσοσκελές ἄρα ἐστὶν τὸ $\overline{\alpha\beta\epsilon}$ τρίγωνον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[FR219]



Ἀλλὰ. δὴ προστετάχθω σκαληνὸν συστήσασθαι τρίγωνον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς $\overline{\alpha\beta}$. καὶ γεγράφθωσαν οἱ κύκλοι κέντροις καὶ διασήμασιν ὡς ἐπὶ τῶν πρότερον. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ κέντρον ἔχοντος τὸ $\overline{\alpha}$ σημεῖον τὸ $\overline{\gamma}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ ἐπὶ ταύτῃ σημεῖον τὸ $\overline{\delta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\delta\beta}$. ἐπεὶ οὖν



κέντρον τὸ $\overline{\alpha}$, ἴση δὲ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$, μείζων ἄρα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\alpha\delta}$. κέντρον δὲ καὶ τὸ $\overline{\beta}$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $\overline{\epsilon\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$. μείζων ἄρα ἡ $\overline{\delta\beta}$ τῆς $\overline{\beta\alpha}$. ἡ δὲ $\overline{\beta\alpha}$ τῆς $\overline{\alpha\delta}$ μείζων. αἱ τρεῖς ἄρα $\overline{\delta\beta}$, $\overline{\beta\alpha}$, $\overline{\alpha\delta}$ ἄνισοί εἰσιν· σκαληνὸν ἄρα τὸ τρίγωνόν ἐστιν, ὥστε συνεστάθη τὰ τρία τρίγωνα.

Ταῦτα μὲν οὖν πολυθρύλητα, τὸ δὲ ἐν τούτοις γλαφυρόν, ὅτι τὸ μὲν ἰσόπλευρον πανταχόθεν ἴσον ὄν μοναχῶς συνίσταται, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς ἐν δύο μόναῖς πλευραῖς ἰσότητα ἔχων διχῶς συνίσταται· ἡ γὰρ δοθεῖσα εὐθεῖα ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, ὡς ἡμεῖς ἐποιήσαμεν, ἢ μείζων ἀμφοτέρων, τὸ δὲ σκαληνὸν πάντῃ ἄνισον ὄν τριχῶς συνίσταται· ἡ γὰρ δοθεῖσα ἢ μεγίστη ἐστίν, ἢ ἐλαχίστη τῶν τριῶν, ἢ τῆς μὲν μείζων, τῆς δὲ ἐλάσσων. καὶ ἔξεστιν ἐκάστην ἑαυτῷ ἢ προτείναντα ἢ συστείλαντα τῶν ὑποθέσεων γυμνάζεσθαι· ἡμῖν δὲ ἀρκεῖτω τὰ ἐκκεῖμενα.

[FR220]

Καθόλου δὲ θεωρήσομεν, ὅτι τῶν προβλημάτων τὰ μὲν μοναχῶς γίγνεται, τὰ δὲ πλεοναχῶς, τὰ δὲ ἀπειραχῶς. λέγεται δὲ, ὡς φησὶν Ἀμφίνομος, τὰ μὲν μοναχῶς συνιστάμενα [τεταγμένα], τὰ δὲ πλεοναχῶς καὶ κατὰ ἀριθμὸν ὠρισμένον μέσσα, τὰ δὲ ἀπειραχῶς ποικιλλόμενα ἄτακτα. πῶς μὲν οὖν μοναχῶς ἢ πλεοναχῶς συσταίη ἂν προβλήματα, δῆλον ἐπὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὸ μὲν γὰρ ἰσόπλευρον μοναχῶς, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ μὲν διχῶς συνίσταται, τὸ δὲ τριχῶς. ἀπειραχῶς δὲ τὰ τοιαῦτα προβλήματα γένοιτο ἂν· τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν

εἰς τρία ἀνάλογα. εἰ μὲν εἰς διπλάσιον λόγον τμηθεῖη καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος παρὰ τὴν μείζονα παραβληθεῖη ἔλλειπον εἶδει τετραγώνῳ, ἔσται εἰς τρία ἴσα τετμημένη. εἰ δὲ τὸ μείζον τμήμα τοῦ ἐλάσσονος εἴη μείζον ἢ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον καὶ παραβληθεῖη τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα ἔλλειπον εἶδει τετραγώνῳ, ἔσται εἰς ἄνισα τρία ἀνάλογον τετμημένη. ἐπεὶ οὖν ἀπειραχῶς ἂν εἰς δύο τμηθεῖη, ὣν τὸ μείζον [τοῦ ἐλάσσονος μείζον] ἐστὶν ἢ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον — ἐπ’ ἀπειρον γὰρ ὁ πολλαπλάσιος πρόεισι λόγος — ἀπειραχῶς καὶ εἰς τρία ἀνάλογα τμηθήσεται.

[FR221]

Δεῖ δὲ εἰδέναι καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα λέγεται πλεοναχῶς. καὶ γὰρ πᾶν τὸ προτεινόμενον πρόβλημα καλεῖται, εἴτε μαθήσεως ἕνεκα προτείνοιτο εἴτε καὶ ποιήσεως. ἰδίως δὲ ἐν τοῖς μαθήμασι καλεῖται πρόβλημα τὸ προτεινόμενον εἰς ποιήσιν τὴν θεωρητικήν. καὶ γὰρ τὸ ποιούμενον ἐν τούτοις τέλος ἔχει τὴν θεωρίαν· καὶ πολλάκις μὲν καὶ τῶν ἀδυνάτων τινὰ προβλήματα καλοῦσιν, ἰδιώτερον δὲ τὸ δυνατόν καὶ μήτε πλεονάζον μήτε ἔλλειπον ἔχει τὴν ἐπωνυμίαν ταύτην. ἐστὶν δὲ πλεονάζον μὲν τὸ τοιόνδε τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ διμοίρου ὀρθῇ. τοῦτο γὰρ παρέλκει καὶ περιττῶς πρόσκειται. παντὶ γὰρ ὑπάρχει τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ. τῶν δὲ πλεοναζόντων ὅσα μὲν ἀσυμβάτοις πλεονάζει συμπτώμασι καὶ ἀνυπάρκτοις ἀδύνατα ταῦτα προσαγορεύουσιν, ὅσα δὲ συμβαίνειν δυναμένοις μείζονα ἢ προβλήματα ταῦτα καλοῦσιν. ἔλλειπες δὲ ἐστὶ πρόβλημα, ὃ καλεῖται ἔλασσον ἢ πρόβλημα, τὸ προσθήκης ἄλλης δεόμενον, ἵνα ἐκ τῆς ἀοριστίας εἰς τάξιν καὶ ὅρον ἐπιστημονικὸν ἀχθῇ· οἷον εἰ λέγοι τις ἰσοσκελὲς συστήσασθαι τρίγωνον. ἔλλειπες γὰρ τοῦτο καὶ ἀοριστῶδες καὶ δεῖ τοῦ προσθήσοντος, ὁποῖον ἰσοσκελές, τὸ ἔχον μείζονα τὴν βάσιν ἢ τὸ ἐλάσσονα ἔχον τῶν ἴσων ἑκατέρας, καὶ πότερον τὸ ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν διπλὴν ἑκατέρας τῶν πρὸς τῇ βάσει, οἷον τὸ ἡμιτετράγωνον, ἢ τὸ ἔχον ἑκαστέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ διπλὴν ἢ κατ’ ἄλλον τινὰ λόγον τὰς γωνίας ταύτας ἔχον, τριπλάσιον ἢ τετρπλάσιον. δυνατόν γὰρ ἀπειραχῶς ποικίλλειν. φανερόν οὖν ἐκ τούτων, ὅτι τὰ κυρίως λεγόμενα προβλήματα βούλεται τὴν ἀοριστίαν διαφεύγειν καὶ μὴ εἶναι τῶν ἀπειραχῶς γινομένων. λέγεται δὲ ὅμως καὶ κείνα προβλήματα διὰ τὴν ὁμωνυμίαν τοῦ προβλήματος. τὸ δὲ πρῶτιστον πρόβλημα τῶν στοιχείων καὶ ταύτῃ πλεονεχτεῖ τῷ μήτε πλεονάζον εἶναι μήτε ἔλλειπες μήτε ἀόριστον καὶ πολλαχῶς ἢ ἀπειραχῶς συνιστάμενον. ἔδει γὰρ τοιοῦτον εἶναι τὸ τῶν ἄλλων στοιχεῖον ἐσόμενον.

[FR222]

Prop. II, probl. II. Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεΐαν θέσθαι.

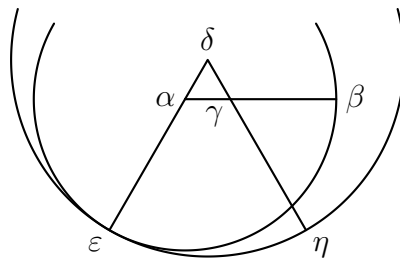
Τῶν προβλημάτων τὰ μὲν ἄντωτά ἐστὶν, τὰ δὲ πολύπτωτα, ὥσπερ καὶ τῶν θεωρημάτων. ὅσα μὲν οὖν τὴν αὐτὴν δύναμιν ἔχει διὰ πλειόνων πεφοιτηκυῖαν διαγραμμάτων καὶ τὰς θέσεις ἐξαλλάττοντα τὸν αὐτὸν φυλάττει τῆς ἀποδείξεως

[FR223]

τρόπον, ταῦτα λέγεται πτώσεις ἔχειν. ὅσα δὲ κατὰ μίαν θέσιν καὶ κατασκευὴν μίαν προκόντει, ταῦτα ἄπτωτά ἐστιν. ἀπλῶς γὰρ ἡ πτώσις περὶ τὴν κατασκευὴν ὁπᾶται καὶ τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων. ἐστὶν οὖν τὸ β πρόβλημα πολύπτωτον, δέδονται δὲ ἐν αὐτῷ τὸ μὲν σημεῖον τῇ θέσει — ταύτῃ γὰρ καὶ δίδεται μόνον — ἡ δὲ εὐθεῖα τῷ τε εἶδει — οὐ γὰρ ἀπλῶς ἐστὶ γραμμὴ, ἀλλὰ τοιάδε — καὶ τῇ θέσει. ζητεῖται δὲ ταύτῃ τῇ εὐθείᾳ ἴσην θέσθαι πρὸς τῷ σημείῳ, ὅπου ποτ' ἂν ᾖ τοῦτο κείμενον. πρόδηλον δὲ ὅτι πάντος ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τὸ σημεῖόν ἐστιν, ἐν ᾧ καὶ ἡ εὐθεῖα καὶ οὐκ ἐν μετεωροτέρῳ. πᾶσι γὰρ τοῖς τῶν ἐπιπέδων προβλήμασιν καὶ θεωρήμασιν ἐν ἐπίπεδον ὑποκεῖσθαι χρὴ νομίζειν. εἰ δέ τις ἀποροίῃ, πῶς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ θέσθαι ἴσην παρακελεύεται — τί γάρ, εἰ ἄπειρος δέδοται; τὸ γὰρ δοθὲν τοῦτο καὶ ἐπὶ τὴν πεπερασμένην φέρει καὶ ἐπὶ τὴν ἄπειρον· σημαίνει γὰρ τὸ ἐκκείμενον πᾶν καὶ ὑποβεβλημένον ἡμῖν εἰς τὴν ζήτησιν. δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὸς ὅτε μὲν λέγων, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον, ὅτε δὲ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον κάθετον ἀγαγεῖν — εἴ τις οὖν ταῦτα διαποροίῃ, λεκτέον ὅτι τὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ θέσθαι παρακελευσάμενος πῶς οὐχὶ δῆλόν σοι πεποίηκεν αὐτόθεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα πεπέρασται; πάντως γὰρ ἢ πρὸς τῷ σημείῳ τεθησομένη πεπέρασται κατ' αὐτὸ τὸ σημεῖον ὥστε πολλῶ πρότερον ἐκείνη πεπέρασται, ἢ ἐστὶν ἴση ἢ τιθεμένη. ἅμα τε οὖν εἶπεν πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ καὶ ἀμφοτέρας περατοῖ τὰς εὐθείας καὶ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἣν ἐκείνη τίθησιν ἴσην.

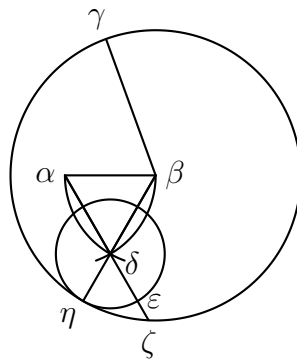
[FR224]

Ὅτι δὲ αἱ πρῶσις τούτου τοῦ προβλήματος γίνονται παρὰ τὴν τοῦ σημείου διάφορον θέσιν, δῆλον. ἡ γὰρ ἔξω κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας ἢ ἐπ' αὐτῆς, καὶ εἰ ἐπ' αὐτῆς, ἡ τῶν περάτων αὐτῆς ἔσται θάτερον ἢ ἐν τῷ μεταξὺ κείσεται τῶν ἄκρων, καὶ εἰ ἔξω αὐτῆς, ἡ ἐκ πλαγίου, ὥστε τὴν ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸ πέρας τῆς εὐθείας ἐπιζευγνυμένην γωνίαν ποιεῖν ἢ ἐπ' εὐθείας τῇ δεδομένη, ὥστε ἐκβαλλομένην αὐτὴν ἐπὶ τὸ σημεῖον πίπτειν. ὁ μὲν οὖν γεωμέτρης ἔλαβεν τὸ σημεῖον ἔξω κείμενον καὶ ἐκ πλαγίου, γυμνασίας δὲ ἕνεκα πάσας ληπτέον τὰς θέσεις, ὧν ἡμεῖς ἐκθησόμεθα τὴν δυσκολωτέραν. ἔστω γὰρ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἢ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ τὸ σημεῖον τὸ δοθὲν τὸ γ κείμενον ἐπ' αὐτῆς ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περάτων, καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τῷ στοιχείῳ, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς $\gamma\alpha$ τὸ $\delta\gamma\alpha$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $\overline{\delta\gamma}$ $\overline{\delta\alpha}$, καὶ κέντρῳ τῷ α , διαστήματι δὲ τῷ

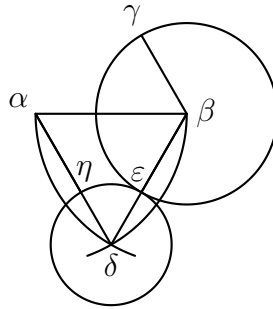


[FR225]

[FR226]



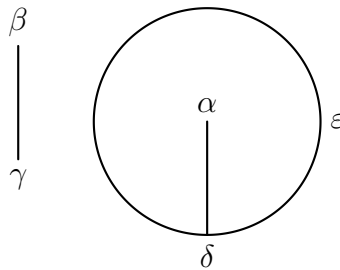
96



$\overline{\gamma\epsilon}$ κύκλος. πάλιν κέντρῳ $\overline{\delta}$, διαστήματι δὲ $\overline{\delta\epsilon}$ κύκλος γεγράφθω. τεμεῖ ἄρα τὴν $\overline{\delta\alpha}$ ὁ $\overline{\eta\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν τὸ $\overline{\delta}$ κέντρον τοῦ $\overline{\eta\epsilon}$, ἴση ἡ $\overline{\eta\delta}$ τῇ $\overline{\delta\epsilon}$. ἦν δὲ καὶ ἡ $\overline{\delta\alpha}$ τῇ $\overline{\delta\beta}$ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ $\overline{\alpha\eta}$ ἴση τῇ $\overline{\beta\epsilon}$. ἄλλα ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ ἴση ἐστὶν τῇ $\overline{\beta\gamma}$. ἐκ κέντρου γὰρ εἰσὶν ἀμφοτέραι· ἡ ἄρα $\overline{\alpha\eta}$ ἴση ἐστὶν τῇ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ κεῖται πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. πολλῶν δὲ καὶ ἐτέρων πτώσεων οὐσῶν ἀρκεῖ καὶ ταύτας πρὸς τὸ παρὸν ἀναγράψασθαι· καὶ γὰρ ἀπὸ τούτων δυνατὸν καὶ περὶ τὰς ἄλλας γυμνάσασθαι τοῖς ζητητικωτέροις.

[FR227]

Ἦδη δὲ τινες ἀφελόντες τὴν τοῦ στοιχείου τούτου κατασκευὴν καὶ ποικιλίαν εἰρήχασιν οὕτως· ἔστω τὸ $\overline{\alpha}$ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἡ δὲ $\overline{\beta\gamma}$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $\overline{\alpha}$ διαστήματι δὲ τοσούτῳ, ὅση ἐστὶν ἡ $\overline{\beta\gamma}$, κύκλος γεγράφθω ὁ $\overline{\epsilon\delta}$ καὶ προσεκβεβλήσθω τὴν εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha}$ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἡ $\overline{\alpha\delta}$. αὕτη

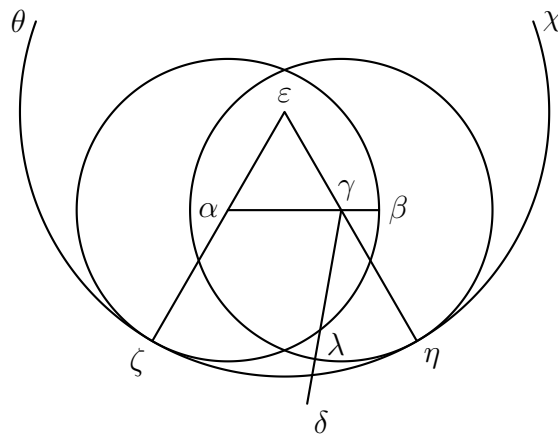


ἄρα ἴση τῇ $\overline{\beta\gamma}$. τοσαύτη γὰρ ἦν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ὅση ἡ $\overline{\beta\gamma}$, καὶ γέγονεν τὸ ἐπιταχθέν. εἴ τις οὖν ταῦτα λέγοι, τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖται. ὅταν γὰρ λέγῃ κεντρῷ τὸ $\overline{\alpha}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\beta\gamma}$ γράφεσθαι τὸν $\overline{\epsilon\delta}$ κύκλον, ἴσην ἔλαβεν ἥδη τρόπον τιὰ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ κειμένην πέρατι, καὶ φυλάττον τὸ αἶτημα τοῦ διαστήματος τοῦτο μὲν ἐποίει κέντρον, τῷ δὲ ἔγραφεν τὸν κύκλον, ἐνταῦθα δὲ ἄλλο μὲν τὸ κέντρον, ἀλλαχοῦ δὲ τὸ διάστημα τοῦ κύκλου. πάντα ἄρα τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως οὐ προσθησόμεθα.

[FR228]

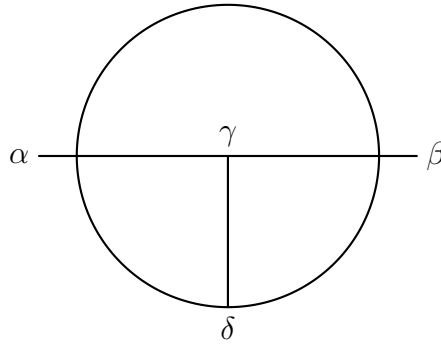
Prop. III, probl. III. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἀφελεῖν.

[FR229]

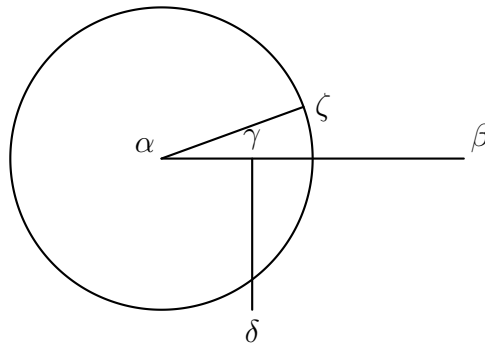


[FR230]

98



κύκλον αφαιρήσεις από τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσην τῇ $\overline{\gamma\delta}$ — ἡ μείζων τῆς ἡμισείας· καὶ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ σημείῳ θέμενος ἴσην τῇ $\overline{\gamma\delta}$ τὴν $\overline{\alpha\zeta}$ καὶ γραψας κύκλον κέντρῳ τῷ $\overline{\alpha}$ διαστήματι τῷ $\overline{\alpha\zeta}$ αφαιρήσεις ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἴσην τῇ $\overline{\alpha\zeta}$, τουτέστιν τῇ $\overline{\gamma\delta}$.

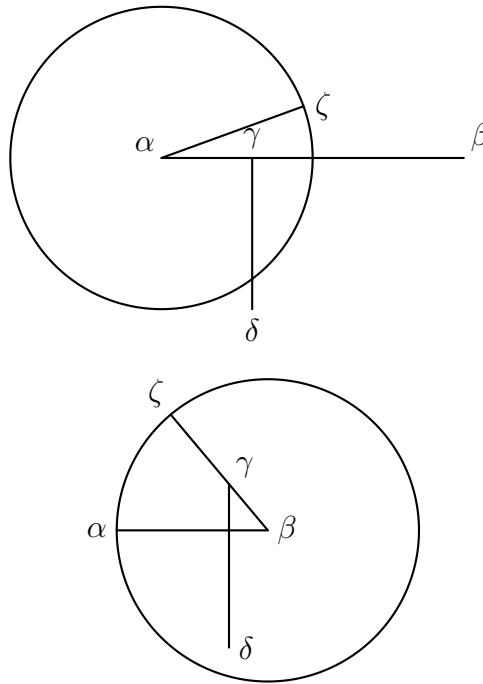


Εἰ δὲ μὴ κατὰ τὸ μέρος τέμνει τὴν α $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\gamma\delta}$, ἔστω ἡ $\overline{\gamma\alpha}$ τῆς ἡμισείας αὐτῆς μείζων. εἰ τούνυν ἡ $\overline{\gamma\delta}$ ἡ ἡμίσειά ἐστιν τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἢ ἐλάσσων, κέντρῳ χρησάμενος τῷ $\overline{\gamma}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\gamma\delta}$ αφαιρήσεις ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσην τῇ $\overline{\gamma\delta}$ — ἡ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἤτοι ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ — καὶ γέγονεν τὸ προσταχθέν — ἡ καὶ ταύτης μείζων — καὶ πάλιν πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ θέμενος ἴσην τῇ $\overline{\gamma\delta}$ τὰ αὐτὰς ποιήσεις· κέντρῳ γὰρ τῷ $\overline{\alpha}$ διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\zeta\alpha}$ γράψεις κύκλον αφαιροῦντα ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἴσην τῇ $\overline{\alpha\zeta}$, τουτέστιν τῇ $\overline{\gamma\delta}$.

[FR231]

Εἰ δὲ τέμνοιεν ἀλλήλας ὡς αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\alpha\beta}$, κέντρῳ τῷ $\overline{\beta}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\beta\alpha}$ κύκλος γεγράφθω ὁ $\overline{\alpha\zeta}$ καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $\overline{\beta\gamma}$ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $\overline{\zeta}$. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι εἰσιν ἄνισοι ἡ $\overline{\beta\zeta}$ καὶ ἡ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἡ $\overline{\gamma\delta}$ κατὰ τὸ πέρας ἑαυτῆς τέμνει τὴν $\overline{\beta\zeta}$, δυνατόν ἴσην ποιῆσαι τῇ $\overline{\beta\zeta}$ ἀπὸ τῆς $\overline{\beta\delta}$ (?). δέδεικται γὰρ ἀμφοτέρω. δυνατόν ἄρα καὶ τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἴσην ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$ (?). ἡ γὰρ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἡ $\overline{\beta\zeta}$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

[FR232]



Ἡμεῖς μὲν οὖν ἐκ διαιρέσεως λαβόντες τὰς πτώσεις ἐπιδείξαι τὴν ποικιλίαν αὐτῶν ἐπειράθημεν. θαυμάσιον δὲ ἢ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις· πάσαις γὰρ ἐκεῖναι ταῖς εἰρημέναις κατασκευαῖς ἐφαρμόττει, καὶ δυνατόν ἐπὶ πάσης θέσεως πρὸς τῷ πέρατι τῆς μείζονος ἴσην τῇ ἐλάσσονι θέντι γράφειν τῷ αὐτῷ πέρατι κέντρῳ χρώμενον καὶ διαστήματι τῇ θέσει κύκον, ὃς ἀπὸ τοῦ μείζονος ἴσην ἀφαιρήσει τῇ ἐλάσσονι, εἴτε τέμνοιεν ἀλλήλας, εἴτε ἡ ἐτέρα τὴν ἐτέραν, εἴθ' ὁμωσοῦν ἄλλως ἔχοιεν θέσεως.

[FR233]

Prop. III, theor. I. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχει δὲ καὶ γωνίαν γωνία ἴσην τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Τοῦτο πρῶτον θεώρημα ἐν τῇ στοιχειώσει παρειλήφαμεν, τὰ δὲ πρὸ τούτου πάντα προβληματικά ἦν, τὸ μὲν πρῶτον περὶ τὴν τῶν τριγώνων γένεσιν πραγματενόμενον, τὸ δὲ δεύτερον καὶ τρίτον ἴσην εὐθεῖαν ἄλλην ἄλλη πορῖσασθαι προτιθέμενα, καὶ τοῦτων τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ οὐκ ἴσου τὴν ἴσην ὑπίστατο, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ἀνίσου κατὰ ἀφαίρεσιν τὸ ἴσον εὗρισκεν. τῆς οὖν ἰσοτήτος, ἢ τὸ πρῶτιστόν ἐστιν ἐν τῷ ποσῷ σύμπτωμα, πεπορισμένης κατὰ τε τὸ τρίγωνον καὶ

εὐθείας τοῦτο πρῶτον ὅπερ ἐξεθέμεθα θεώρημα παραδίδωσιν ἐπ' ἐκείνοις. καὶ πῶς γὰρ ἔμελλεν μὴ προουποστήσας τὰ τρίγωνα μηδὲ πορισάμενος τὴν γένεσιν αὐτῶν περὶ τῶν καθ' αὐτὸ συμβεβηκότων αὐτοῖς διδάσκειν καὶ γωνιῶν τῶν ἐν αὐτοῖς ἰσότητος καὶ πλευρῶν, πῶς δὲ ἂν ἔλαβεν πλευρὰς ἴσας πλευραῖς καὶ εὐθείας ἄλλαις εὐθείαις μὴ τοῦτο διαπραγματευσάμενος προβληματικῶς καὶ μηχανησάμενος τὴν τῶν ἴσων εὐθειῶν εὔρεσιν; λεγέτω γὰρ εἰ τύχοι πρὸ τῆς ἐκείνων ποιήσεως, ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα τόδε τι τὸ σύμπτωμα ἔχῃ, ἔχει καὶ τόδε πάντως. ἄρα οὖν οὐ ῥᾶδιον παντὶ πρὸς αὐτὸν ἀπαντᾶν· ἴσμεν γὰρ ὅλως, εἰ συνίστασθαι δύναται τρίγωνον· ἐπαγέτω δὲ καὶ ὅτι καὶ τὰ δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔπῃ ταῖς δύο πλευραῖς —. οὐκ ἂν τις καὶ πρὸς τοῦτο διηπόρησεν, μήποτε οὐδὲ δυνατόν εὐθείας ἀλλήλαις ἴσας εἶναι; καὶ μάλιστα ἐπὶ τῶν γεωμετρίας εἰδῶν, ἐν οἷς οὐ πάντως ἀνισότητος οὔσης καὶ ἰσότης ἐστίν. μαθησόμεθα γοῦν ὅτι ἡ κερατοειδὴς ἀεὶ ἄνισος τῇ ὀξείᾳ καὶ οὐδεποτε ἴση, καὶ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου ὠσαύτως. καὶ ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλασσον οὐ πάντως διὰ τοῦ ἴσου γίνεται.

[FR234]

Ταῦτα τοίνυν ὁ στοιχειωτὴς προαναιρῶν καὶ τῶν τριγώνων τὴν σύστασιν παραδέδωκεν — κοινὴ γάρ ἐστι τῶν τριῶν εἰδῶν — καὶ τὰς τῶν ἴσων εὐθειῶν γενέσεις καὶ ταύτας διττάς, τὴν μὲν γὰρ μὴ οὔσαν ὅλως ὑφίστησι, τὴν δὲ ἀπὸ τῆς ἀνίσου κατὰ ἀφαίρεσιν πορίζεται. καὶ τούτοις εἰκότως ἐπιφέρει τὸ θεώρημα, δι' οὗ δείκνυται, πῶς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένην ἀναφαίνεται καὶ τὴν βάσιν ἴσην ἔχοντα τῇ βάσει καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῷ ἐμβαδῷ καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ταῖς λοιπαῖς ἴσας. τρία γὰρ ἐστὶ τὰ δεικνύμενα, δύο δὲ τὰ διδόμενα περὶ τὰ τρίγωνα. δέδοται μὲν οὖν δύο πλευρῶν ἰσότης καὶ δύο πλευραὶ — καὶ δῆλον ὅτι τῷ λόγῳ δέδοται — καὶ γωνίας αὖ τῆς ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένης πρὸς γωνίαν ἰσότης. ζητεῖται δὲ τρία, ἢ τῆς βάσεως πρὸς τὴν βάσιν ἰσότης ἢ τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ τρίγωνον ἢ τῶν λοιπῶν γωνιῶν πρὸς τὰς λοιπὰς. ἐπειδὴ δὲ δυνατόν ἦν τὰς μὲν δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς, οὐ μέντοι τὸ θεώρημα ἀληθεύειν τῷ μὴ εἶναι ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσην, ἀλλὰ ἅμα ἀμφοτέρας, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τοῖς δεδομένοις τὸ ἴσας εἶναι τὰς πλευρὰς οὐχ ἀπλῶς, ἀλλ' ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. εἰ γὰρ ἔτυχεν τῶν τριγώνων θάτερον ἔχον τὴν μὲν τῶν πλευρῶν τριῶν μονάδων, τὴν δὲ τεττάρων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τὴν μὲν πέντε, τὴν δὲ δυεῖν, ὀρθῆς οὔσης τῆς ὑπὸ τούτων περιεχομένης γωνίας, ἦσαν μὲν ἂν αἱ δύο ἅμα πλευραὶ ταῖς δύο ἴσαι — ἐπὶ τὰ γὰρ καὶ αὐταὶ καὶ ἐκείναι — οὐκ ἐδείκνυτο δὲ ἴσον τῷ τριγώνῳ τὸ τρίγωνον· ὅπου μὲν γὰρ τὸ ἐμβαδὸν ἐστὶν ἕξ, ὅπου δὲ πέντε, καὶ τὸ τοῦδε αἴτιον, ὅτι οὐχὶ καὶ ἑκατέρα ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ. πολλοὶ γοῦν ἐν διανομαῖς τισι χωρίων τοῦτο μὴ παραφυλάξαντες τὸ μείζον λαβόντες χωρίον δικαίων ἀπηνέγκαντο δόξαν ὡς τὸ ἴσον ἐλόμενοι διὰ τὸ συναμφοτέρας τὰς περιεχούσας ἴσας εἶναι συναμφοτέρας. δεῖ τοίνυν καὶ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ λαμβάνειν ἴσην καί, ὅπου ἂν ὁ στοιχειωτὴς τοῦτο προστιθῇ, ἐπισημαίνεσθαι ὡς οὐ μάτην προστίθησιν· ἐπεὶ καὶ περὶ τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος τῶν δε-

[FR235]

[FR236]

δεμένων ἴσων διαλεγόμενος προσέθηκεν τὸ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένην, ἵνα μὴ ἀδιορίστως ῥηθέντος τῶν πρὸς τὴν βάσιν τινὰς λάβωμεν γωνιῶν. καὶ μὴν καὶ τὴν βάσιν ἐπὶ τῶν τριγώνων. μηδεμιᾶς μὲν πω προωνομασμένης, τὴν πρὸς τῇ ὀφει κειμένην πλευράν, τῶν δὲ δυεῖν ἤδη προειλημμένων. ἐξ ἀνάγκης τὴν λοιπὴν εἶναι βάσιν ὑποθετέον. διὸ καὶ ἐνταῦθα ὁ στοιχειωτὴς τὰς δύο προλαβὼν ἴσας ταῖς δύο πλευραῖς τὰς ὑπολοίπους βάσεις τῶν τριγώνων ἐκάλεσεν. τρίγωνον δὲ αὖ ἴσον τριγώνῳ λέγεται τηνικαῦτα, ἡνίκα ἂν τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν ἴσον ᾖ. δυνατὸν γὰρ τῶν περιμέτρων ἴσων ὑπαρχουσῶν διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν γωνιῶν καὶ τὰ ἐμβαδὰ ἄνισα εἶναι. καλῶ δὲ ἐμβαδὸν αὐτὸ τὸ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἀπολαμβανόμενον, ὥσπερ δὴ περίμετρον τὴν συγκειμένην γραμμὴν ἐκ τριῶν τριγωνικῶν πλευρῶν. ἄλλο οὖν ἐκάτερον καὶ δεῖ μετὰ τῆς τῶν περιμέτρων ἰσότητος κατὰ μίαν πλευράν καὶ τὰς γωνίας ἴσας εἶναι, εἰ μέλλοι καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τῷ ἐμβαδῷ ἴσον. συμβαίνει δὲ ἐπὶ τινων καὶ τῶν ἐμβαδῶν ἴσων ὄντων ἀνίσους εἶναι τὰς περιμέτρους καὶ τῶν περιμέτρων ἴσων οὓσων ἄνισα τὰ ἐμβαδὰ. δυεῖν γοῦν ὄντων τριγώνων ἰσοσκελῶν, ὧν ἐκάτερον ἔχει τὰς ἴσας πλευράς ἀπὸ πέντε μονάδων, τῶν δὲ βάσεων τὸ μὲν ὀκτώ, τὸ δὲ ἕξ· τούτων ὁ μὲν ἄπειρος γεωμετρίας εἴποι ἂν μείζον εἶναι τὸ ἔχον ὀκτὼ τὴν βάσιν. πᾶσα γὰρ ἔσται ἡ περίμετρος ὀκτωκαίδεκα. ὁ δ' αὖ γεωμετρικὸς εἴποι ἂν ὅτι ἐκατέρου τὸ ἐμβαδὸν ἐστί δώδεκα. καὶ ταῦτα ἀποδείξει κάθετον ἀγαγὼν ἐν ἐκατέρῳ τῶν τριγώνων ἀπὸ τῆς κορυφῆς καὶ ποιήσας ταύτην ἐπὶ θατέρῳ μέρει τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ἔστιν δὲ ὥσπερ ἔφην καὶ τῶν περιμέτρων ἰσαζομένων ἄνισα εἶναι τὰ χωρία. καὶ ἤδη τινὲς κοινωνοὺς ἑαυτῶν ἐν διανομαῖς χωρίων παρακρούσαντο διὰ τῆς κατὰ τὴν περίμετρον ἰσότητος μείζον λαβόντες χωρίον.

[FR237]

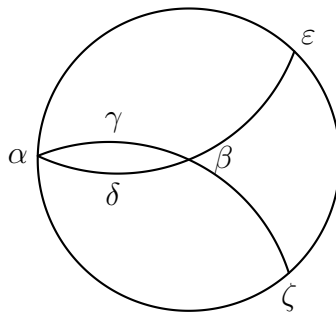
Βάσις δὲ αὖ ἴση λέγεται εἶναι βάσει καὶ ὅλως εὐθεῖα ἴση ἐστὶν ἄλλη εὐθεῖα, ἐπειδὴν αὐτῶν τὰ πέρατα συναπτόμενα ὅλην ὅλη ποιήσει ἐφαρμόσαι. πᾶσα μὲν γὰρ εὐθεῖα ἐπὶ πᾶσαν ἐφαρμόττει. τῶν δὲ ἴσων καὶ κατὰ τὰ πέρατα γίνεται ἡ ἐφαρμογή. γωνία δὲ ἴση γωνίᾳ λέγεται ἡ εὐθύγραμμος τῇ εὐθυγράμμῳ, ὅταν μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐτέραν πλευρῶν τιθεμένης ἐπὶ μίαν τῶν τῆς ἐτέρας καὶ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἐφαρμόζη. ὅταν δὲ ἡ λοιπὴ ἔξω πίπτῃ τῆς λοιπῆς, μείζων ἐστὶν ἡ γωνία, ἥς ἡ πλευρὰ ἔξω πέπτωκεν, ὅταν δὲ ἐντός, ἐλάσσων. ὅπου μὲν γὰρ περιλαμβάνει τὴν ἐτέραν, ὅπου δὲ περιλαμβάνεται ὑπ' αὐτῆς. τὴν δὲ ἰσότητα τῶν γωνιῶν ληψόμεθα κατὰ τὴν ἐφάρμοσιν τῶν πλευρῶν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁμοειδῶν, οἷον τῶν μηνοειδῶν, τῶν ξυστροειδῶν, τῶν ἀμφικύρτων, ἐπεὶ δυνατὸν καὶ ἴσας εἶναι καὶ μὴ ἐφαρμόττειν ἀλλήλαις τὰς πλευράς. ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ὀρθὴ μηνοειδεῖ τινὶ γωνίᾳ, καὶ ἀδύνατον ἐφαρμόσαι ταῖς εὐθείαις τὰς περιφερείας. ἔτι τοίνυν ἐκεῖνο προληπτέον, ὅτι ὑποτείνειν λέγονται γωνίας αἱ πλευραὶ αἱ κατ' ἀντικρὺ κείμεναι. πᾶσα γὰρ τριγωνικὴ γωνία περιέχεται μὲν ὑπὸ δύο τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ὑποτείνεται δὲ ὑπὸ τῆς λοιπῆς. διὸ καὶ ὁ γεωμέτρης τῷ καὶ τὰς γωνίας ἴσας εἶναι προσέθηκεν τὸ ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἵνα μὴ νομίσωμεν ἀδιάφορον εἶναι οἷαν

[FR238]

ποτέ γωνίαν λαβεῖν καὶ ταύτην ἴσην εἶπείν τῇ τυχούσῃ τῶν λοιπῶν δύο τοῦ τριγώνου γωνιῶν. ἀλλὰ ἴσας λέγωμεν, ἃς ὑποτείνουσιν αἱ ἴσαι πλευραί. καὶ μὴν τῶν ἴσων πλευρῶν ἢ μὲν ὑποτείνει τὴν ἑτέραν, ἢ δὲ μία τῶν περιεχουσῶν τὴν λοιπὴν.

Πρὸς μὲν οὖν τὴν σαφήνειαν τοῦ θεωρήματος τοσαῦτα προειλήφθω, πρὸς δὲ τὴν ἀπόδειξιν ἐκεῖνο προλάβωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. τοῦτο γὰρ ὡς ὁμολογούμενον ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν. εἰ γὰρ τὰ πέρατα, φησὶν, ἐφαρμόσει τῶν βάσεων ἀλλήλοις, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βάσεις, εἰ δὲ μή, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσι. πόθεν οὖν, ὅτι τοῦτο ἀδύνατον; ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι περιέχουσαι χωρίον αἱ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ $\overline{\alpha\delta\beta}$ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον. καὶ κέντρῳ τῷ β , διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\alpha\beta}$ γεγραφθῶ κύκλος ὁ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἡ $\overline{\alpha\gamma\beta\zeta}$,

[FR239]



ἡμίσεια τῆς περιφερείας ἐστὶν ἡ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$. πάλιν ἐπεὶ διάμετρος ἡ $\overline{\alpha\delta\beta\epsilon}$, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐστὶν ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$. [περιφέρειαι] ἄρα ἴσαι εἰσὶν αἱ $\overline{\alpha\epsilon}$ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς εἰδὼς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν αἰτημάτων ἔλεγεν, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὡς ἂν μιᾶς ἀεὶ δυναμένης εὐθείας ἐπιζευγνύναι τὰ δύο σημεῖα καὶ οὐ δυεῖν. περιφέρειαι μὲν γὰρ πλείους ἐπιζευγνύουσιν καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐπὶ τὰ ἐναντία. οὕτω γὰρ καὶ τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ἐπιζεύγνυται διὰ δύο μὲν περιφερειῶν, μιᾶς δὲ εὐθείας. δυνατὸν δὲ καὶ ἐκτὸς τῶν ἡμικυκλίων καὶ ἐντὸς ἀπείρους γράφαι περιφερεῖς ἐπιζευγνυούσας τὰ δοθέντα σημεῖα. τὸ δὲ αἷτιον, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. ἐν δὲ πανταχοῦ τὸ ἐλάχιστον καὶ ἀεὶ μέτρον γίνεται τῶν ἄλλων. ὥσπερ οὖν ἡ ὀρθὴ μία οὔσα μέτρον γίνεται τῆς ἀπερίας τῶν ἄλλων γωνιῶν — διὰ γὰρ ταύτης κάκείνας εὐρίσκομεν — οὕτω καὶ ἡ εὐθεῖα συντελεῖ πρὸς τὴν καταμέτρησιν τῶν μὴ εὐθειῶν.

[FR240]

Τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων· ὅτι δὲ ἡ σύμπερασις τούτου τοῦ θεωρήματος ἀπόδειξις ἀπὸ κοινῶν ἐννοιῶν ἡρτηται καὶ ὡς αὐτοφύης ἐστὶ καὶ ἀπ' αὐτῆς ὠρμημένη τῷ τῶν ὑποθέσεων ἐναργείας παντὶ κατακφανές. διότι μὲν γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ ταῖς δυσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, ἐφαρμόζουσιν ἀλλήλαις, διότι δὲ αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι, καὶ αὗται ἐφαρμόττουσι. τῆς δὲ γωνίας

ἐπὶ τὴν γωνίαν ἀρμοζούσης καὶ τῶν πλευρῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἐφαρμόσει καὶ τὰ πέρατα κάτω τῶν πλευρῶν, εἰ δὲ ταῦτα, καὶ ἡ βάσις ἐφαρμόσει τῇ βάσει, εἰ δὲ αἱ τρεῖς ταῖς τρισί, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ πάντα πᾶσιν. ἡ ἄρα ἰσότης ἐν ὁμοειδέσιν ὀφθεῖσα τῆς ὅλης ἀποδείξεως αἰτία ἀνεφάνη. δύο γάρ ἐστιν ἐνταῦθα ἀξιώματα συνεκτικὰ τῆς συμπάσης μεθόδου τοῦ προκειμένου θεωρήματος, ἐν μὲν ὅτι ἐφαρμόζοντα ἴσα ἀλλήλοις — τοῦτο ἀπλῶς ἀληθές καὶ οὐδὲ ἐνός προσδιορισμοῦ δεόμενον, ὥς χρήται ὁ στοιχειωτής ἐπὶ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν· ταῦτα γὰρ φησιν, διότι ἐφαρμόζει, ἴσα ἐστίν — ἕτερον δὲ ὅτι τὰ ἴσα ἐφαρμόζει ἀλλήλοις — τοῦτο δὲ οὐκ ἐπὶ πάντων ἀληθές, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν. ὁμοειδῆ δὲ λέγω οἷον εὐθείαν εὐθείαν καὶ περιφέρειαν περιφέρειαν τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ γωνίας γωνίαις ὑπὸ ὁμοίων ὁμοίως κειμένων περιεχομέναις. τούτων δὲ ὅτι τὰ δεδομένα ἴσα, ἐφαρμόζει ἀλλήλοις· ὥστε εἶναι συνελόντι φάναι τὴν πᾶσαν ἀπόδειξιν τοιαύτην· δέδοται ἴσα τάδε τοῖσδε, πλευραὶ δύο δυσι καὶ γωνίαι αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι, καὶ ἐφαρμόττει ἀλλήλοις ταῦτα. εἰ δὲ ταῦτα ἐφαρμόττει ἀλλήλοις, καὶ ἡ βάσις τῇ βάσει καὶ πάντα πᾶσιν· εἰ δὲ ἐφαρμόττει ταῦτα, καὶ ἴσα ἐστίν· εἰ ἄρα δέδοται ἴσα τάδε τοῖσδε, συναποδείκνυται καὶ ὅτι πάντα πᾶσιν ἴσα. καὶ οὗτος πρῶτος ἀναφαίνεται τρόπος τῆς γνώσεως τῶν ἴσων πάντη τριγώνων.

[FR241]

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῆς ὅλης ἀποδείξεως τοσαῦτα· **Κάρπος** δὲ ὁ μηχανικὸς ἐν τῇ ἀστρολογικῇ πραγματείᾳ τὸν περὶ τῶν προβλημάτων καὶ θεωρημάτων λόγον ἀνακινήσας — εἰ μὲν κατὰ καιρὸν ἢ μή, παρείσθω πρὸς παρόν — ἐμβαλὼν δὲ ὅμως εἰς τὴν τούτων διάκρισιν τῇ τάξει πρότερον τὸ προβληματικὸν γένος εἶναι φησι τῶν θεωρημάτων. τὰ γὰρ ὑποκείμενα, περὶ [α] τὰ συμπτώματα ζητεῖται, διὰ τῶν προβλημάτων ἀνευρίσκεσθαι. καὶ τοῦ μὲν προβλήματος τὴν πρότασιν ἀπλῆν εἶναι καὶ πάσης ἐντέχνου συνέσεως ἀπροσδεᾶ — τόδε γὰρ τι φανερώς ποιῆσαι παρακελεύεται· συστήσασθαι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῇ ἐλάσσονι ἀπὸ τῆς μείζονος ἴσην ἀφελεῖν. τί γὰρ τούτων ἀσαφές καὶ περιειργασμένον; — τοῦ δὲ θεωρήματος ἐργώδη καὶ πολλῆς δεομένην ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς κρίσεως, ἵνα μήτε πλεονάζουσα φαίνεται μήτ' ἐλλείπουσα τῆς ἀληθείας, οἷον δὴ καὶ τοῦτο πρῶτιστον ὃν τῶν θεωρημάτων. καὶ ἐπὶ μὲν τῶν προβλημάτων μία τις ἔστιν ὁδὸς ἢ διὰ τῆς ἀναλύσεως εὐρημένη κοινή, καθ' ἣν προιόντες δυνάμεθα κατορθοῦν. οὕτω γὰρ τὰ ἀσαφέστερα θηρᾶται τῶν προβλημάτων. ἐπὶ δὲ τῶν θεωρημάτων δύσληπτος ἢ μεταχείρησις, ὡς μέχρις ἡμῶν, φησί, μηδὲν δύνασθαι κοινήν παραδοῦναι μέθοδον τῆς τούτων εὐρέσεως, ὥστε καὶ διὰ τὴν ῥαστώνην ἀπλούστερον ἂν εἴη τὸ προβληματικὸν γένος. τούτων δὲ διωρισμένων „Διὰ ταῦτα ἄρα, φησί, καὶ ἐν τῇ στοιχειώσει τὰ προβλήματα προηγεῖται τῶν θεωρημάτων, καὶ ἀπὸ τούτων ἡ στοιχειώσις ἄρχεται, καὶ τὸ πρῶτον θεώρημα τέταρτόν ἐστι κατὰ τὴν τάξιν, οὐ διότι τὸ πέμπτον ἐξ αὐτῶν δείκνυται, ἀλλ' ὅτι, καὶ εἰ μηδὲν τῶν πρὸ αὐτοῦ δεῖται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν, ἔδει πρωτεύειν ἐκεῖνα, διότι προβλήματα ἦν, τοῦτο δὲ θεώρημα. παντελῶς γὰρ ἐπὶ τούτου ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις χρήται καὶ τρόπον τινὰ τὸ αὐτὸ τρίγωνον ἐν

[FR242]

[FR243]

διαφόροις λαμβάνει τόποις κείμενον. καὶ γὰρ ἡ ἐφαρμογή καὶ ἡ ἀπὸ ταύτης ἰσότης δεικνυμένη παντάπασιν ἔχεται τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ὑπολήψεως. ἀλλ' ὅμως καὶ τοιαύτης οὔσης τῆς τοῦ πρώτου θεωρήματος ἀποδείξεως εἰκότως προηγήσατο τὰ προβλήματα. διότι καθόλου τὴν προηγουμένην ἐκεῖνα τάξιν ἔλαχεν.“

Καὶ ἴσως τῇ μὲν τάξει τὰ προβλήματα πρὸ τῶν θεωρημάτων ἐστὶ καὶ μάλιστα τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὰ αἰσθητὰ στρεφομένων τεχνῶν ἀνιοῦσιν ἐπὶ θεωρίαν. τῇ δὲ ἀξία τὰ θεωρήματα προυπάρχει τῶν προβλημάτων. καὶ ἔοικεν ἡ ὅλη γεωμετρία, καθ' ὃ μὲν συνάπτει ταῖς πολλαῖς τεχναῖς, ἐνεργεῖν προβληματικῶς, καθ' ὃ δὲ τῇ πρώτῃ ἐπιστήμῃ γεινῆ, θεωρηματικῶς ἀνάγεσθαι ἀπὸ τῶν προβλημάτων ἐπὶ τὰ θεωρήματα ἀπὸ δευτέρων ἐπὶ προῶτα καὶ [ἐκ] τεχνικωτέρων εἰς ἐπιστημονικώτερα. μάταιον οὖν τὸν Γεμῖνον αἰτιᾶσθαι ὡς τὸ θεώρημα τελειότερον εἶναι τοῦ προβλήματος λέγοντα. καὶ γὰρ αὐτὸς ὁ Κάρπος τοῖς προβλήμασι τὸ προηγεῖσθαι κατὰ τὴν τάξιν ἀποδέδωκεν, ὁ δὲ Γεμῖνος κατὰ τὴν τελειότεραν ἀξίαν. καὶ μὴν καὶ περὶ τοῦ τετάρτου θεωρήματος εἵπομεν, ὅπως τρόπον τινὰ δεῖται τῶν πρὸ αὐτοῦ προβλημάτων, ἐν οἷς καὶ τῶν τριγώνων τὰς γενέσεις καὶ τῆς ἰσότητος τὴν εὑρεσιν ἐμάθομεν.

Προκείσθω δὲ νῦν καὶ ὅτι ὡς μὲν ἐν θεωρήμασιν ἀπλούστατόν ἐστι καὶ ἀρχοειδέστατον. ἀπ' αὐτῶν γὰρ ὡς εἶπεῖν μόνων αὐτοφυῶς δείκνυται τῶν πρώτων ἐννοιῶν. σύμπτωμα δέ τι περὶ τὰ τρίγωνα φαινόμενον τὰ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀποδεικνύον εἰκότως μετὰ τὰ προβλήματα τέτακται, δι' ὧν τὰ ὑποκείμενα τῷ συμπτώματι τούτῳ καὶ ὅλως τὰ δεδομένα κατασκευάζεται.

[FR244]

Prop. V, theor. II. Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσὶν· καὶ προσεχβληθειςὼν τῶν ἴσων ευθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι εἰσὶ.

Τῶν θεωρημάτων τὰ μὲν ἐστὶν ἀπλᾶ, τὰ δὲ σύνθετα. λέγω δὲ ἀπλᾶ μὲν, ὅσα κατὰ τὰ ὑποθέσεις καὶ κατὰ τὰ συμπεράσματα αἰδαίρετά ἐστιν ἐν ἔχοντα τὸ δεδομένον καὶ τὸ ζητούμενον ἔν· οἷον εἰ οὕτως ἔλεγεν ὁ στοιχειωτής· πᾶν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἴσας ἔχει τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας — σύνθετα δὲ τὰ ἐκ πλειόνων ἢ τὰς ὑποθέσεις ἔχοντα συγκειμένας ἢ τὰ συμπεράσματα τῆς ὑποθέσεως οὔσης ἀπλῆς ἢ καὶ ἀμφοτέρω. καὶ τούτων τὰ μὲν ἐστὶ συμπεπλεγμένα, τὰ δὲ ἀσύμπλεκτα. ἐστὶ δὲ ἀσύμπλεκτα μὲν, ὅσα σύνθετα ὄντα μὴ δύναται διαιρεῖσθαι εἰς ἀπλᾶ θεωρήματα, ὥσπερ τὸ τέταρτον. ἐν ἐκείνῳ γὰρ καὶ τὸ δεδομένον σύγκειται καὶ τὸ ἐπόμενον, ἀλλ' οὐ δύναται διαιρεθῆναι τὸ δεδομένον εἰς ἀπλᾶ καὶ ποιήσασθαι θεωρήματα. οὐ γάρ, ἐὰν ἴσας ἔχῃ μόνας τὰ πλευρὰς τὰ τρίγωνα ἢ μόνην τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν, συμβαίνει τὰ λοιπά. συμπεπλεγμένα δέ, ὅσα διαιρεῖται εἰς ἀπλᾶ, οἷον ἐκεῖνο τὸ θεώρημα· τὰ τρίγωνα

[FR245]

καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ταῖς βάσεσι. δυνατόν γὰρ καὶ διελόντα εἰπεῖν· τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ταῖς βάσεσι, καὶ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ὁμοίως. πάντων δὲ τῶν συνθέτων τὰ μὲν κατὰ τὸ συμπέρασμα συντίθεται ἀπὸ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως ὀρμηθέντα, τὰ δὲ κατὰ τὰς ὑποθέσεις ἔχει τὴν σύνθεσιν καὶ τὸ αὐτὸ πάσαις ἐπάγει συμπέρασμα, τὰ δὲ κατὰ τὸ συμπέρασμα καὶ τὰς ὑποθέσεις συνθετά ἐστι. κατὰ μὲν οὖν τὸ συμπέρασμα ἐνταῦθα (?) σύνθεσις ἐστίν. ἐπὶ τούτου γὰρ τοῦ θεωρήματος τρία ἐστὶ τὰ συναγόμενα· ὅτι αἱ βάσεις ἴσαι, ὅτι τὰ τρίγωνα ἴσα, ὅτι αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν — κατὰ δὲ τὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τῶν τριγώνων καὶ παραλληλογράμμων θεωρήματος, τῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντων — κατ' ἀμφοτέρω δὲ ὡς ἐπ' ἐκείνου· αἱ διάμετροι τῶν κύκλων καὶ τῶν ἐλλείψεων τὰ τε χωρία διχὰ διαιροῦσι καὶ τὰς περιεχούσας τὰ χωρία γραμμάς. τῶν δὲ συμπεπλεγμένων τὰ μὲν ἐστὶ καθολικά, τὰ δὲ ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους συνάγει τὸ καθόλου. ἐὰν γὰρ εἴπωμεν, ὅτι ἡ διάμετρος τὸν κύκλον καὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὰ παραλληλόγραμμα διαιρεῖ, ἕκαστον μὲν τῶν συμπεπλεγμένων οὐ καθόλου λαμβάνομεν, τὸ δὲ ἐκ πάντων καθόλου ποιοῦμεν, ἐὰν δὲ εἴπωμεν· ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ κέντρου διχοτομοῦσιν ἀλλήλας καὶ τὰς τῶν τμημάτων πάντων γωνίας ἴσας ποιοῦσι, καθόλου λέγομεν. ἐπὶ γοῦν τῆς ἐλλείψεως οὔτε πᾶσαι αἱ τῶν τμημάτων γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ μόνων τῶν ὑπὸ τοῦ ἄξονος γινομένων. ὅλως δὲ τὰς συνθέσεις ταύτας ἐμνησανήσαντο οἱ γεωμέτραι διὰ τε τὴν συντομίαν καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις. πολλὰ γὰρ ἀσύνθετα μὲν ὄντα οὐκ ἀναλύεται συντεθέντα δὲ μόνως εὐοδίαν παρέχει πρὸς τὴν ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀνάλυσιν.

[FR246]

Τούτων δὴ προτεθεωρημένων τὸ πέμπτον θεώρημα σύνθετον πάντως ῥητέον καὶ κατ' ἀμφοτέρω σύνθετον, κατὰ τε τὸ δεδομένον καὶ κατὰ τὸ ζητούμενον, ἃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐνδεικνύμενος ἐν ὃν αὐτὸ ἐμέρισεν καὶ χωρὶς ἐκάτερα παρέθετο τὰ διδόμενα καὶ τὰ ζητούμενα, τῶν ἰσοσκελῶν εἰπὼν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, καὶ πάλιν ἐξῆς· καὶ προσεχβληθειςὼν τῶν ἴσων αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι. οὐ γὰρ δύο δεῖ νομίζειν εἶναι θεωρήματα, ἀλλ' ἓν, σύνθετον δὲ ὄν καὶ κατὰ τὸ δεδομένον καὶ κατὰ τὸ ζητούμενον. καὶ τῶν συγκειμένων ἐκάτερον τέλειον καὶ ἀληθές, διὸ καὶ ἡ ἀνάλυσις ἀληθὴς ἀφ' ἐκατέρου. εἴτε γὰρ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον, εἴτε αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἴσαι εὐθεῖαι προσεχβέβληνται καὶ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές. ἀλλ' ὁ στοιχειωτὴς πρὸς μὲν τὸ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας εἶναι ποιήσεται τὴν ἀντιστροφὴν, πρὸς δὲ τὸ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσας οὐκέτι. καίτοι καὶ τοῦτο ἀληθές.

[FR247]

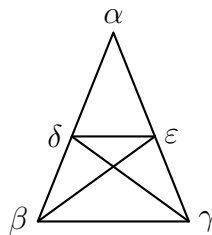
Τούτου μὲν οὖν τὴν αἰτίαν ὕστερον λέξομεν, νῦν δὲ ἐκεῖνο πρῶτον ζητήσωμεν, δι' ἣν αἰτίαν ὅλως τοῦτο προσαπέδειξεν τὸ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσας εἶναι. οὐδαμῶς γὰρ τούτῳ χρήσεται πρὸς ἄλλων ἢ κατασκευὴν ἢ ἀπόδειξιν προβλημάτων ἢ θεωρημάτων. ἄχρηστον οὖν ἐσόμενον τί ἔδει παρεμβάλλειν τῷ θεωρηματι τούτῳ; ῥητέον δὴ πρὸς ταύτην τὴν ζήτησιν, ὅτι καὶ εἰ μηδαμοῦ χρησθῆναι μέλλοι τῷ καὶ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἴσας εἶναι,

ἀλλὰ πρὸς γε τὰς τῶν ἐνστάσεων ἀνατροπὰς καὶ τὰς διαλύσεις τῶν ἀντιπιπτόντων τοῖς θεωρήμασιν ἔσται τοῦτο χρήσιμον. ἐπιστημονικὸν δὲ καὶ τεχνικὸν προοικονομεῖσθαι τὰς λύσεις τῶν μαχομένων τοῖς ῥηθήσεσθαι μέλλουσι καὶ τῶν ἀπαντήσεων προκαταβάλλεσθαι τὰς ἀφορμάς, ἵνα μὴ μόνον αἱ τῶν ἀληθῶν ἀποδείξεις διὰ τῶν προαποδεδειγμένων ἀλλὰ καὶ οἱ τοῦ ψεύδους ἔλεγχοι δι' ἐκείνων γίνονται. καὶ λάβοις ἂν καὶ ἐκ τούτου πρὸς ῥητορικὴν ὄφελος τῆς ἐν γεωμετρίας τάξεως. ὁ γὰρ καὶ ἐν ἐκείνοις τοῖς λόγοις τοῦτο δυνάμενος ποιῆσαι καὶ προιδεῖν τὰ μαχόμενα τοῖς ἐφεξῆς κεφαλαίοις καὶ πρὸ τῆς ἐκείνων μεταχειρήσεως ὥς δὴ πάρεργον ἄλλοις προηγουμένοις συγκατασκευάσαι τὰς λύσεις αὐτῶν, οὗτος ἀσφαλεστάτην ἂν μάλιστα μέθοδον προίσταιτο τῶν ἀγῶνων. τοῦτο τοίνυν καὶ ὁ στοιχειωτῆς ἔργῳ διδάσκων ἡμᾶς πρὸ τῶν θεωρημάτων, οἷς τὰ ἀντιπίπτοντα διαλύσομεν τῷ νῦν δεικνυμένῳ χρώμενοι, συναποδείκνυσιν τὸ καὶ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἴσας εἶναι καὶ προευτρεπίζει τὸν τοῦ ψεύδους ἐπ' ἐκείνων ἔλεγχον. ἔσται δὲ προιοῦσιν δῆλον ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐβδόμου θεωρήματος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐνάτου τὰς φερομένας ἐνστάσεις ἀπὸ τούτου διαλύσομεν. ἐκ δὴ τούτου φανερόν καὶ δι' ἣν αἰτίαν οὐκ ἀντέστρεψεν καὶ ἀπὸ τούτου τὸ ἔκτον, ὥς οὐδὲ τούτου προηγουμένην ἔχοντος χρεῖαν, ἀλλὰ κατὰ συμβεβηκὸς ἡμῖν πρὸς τὴν ὅλην ἐπιστήμην συντελοῦντος.

[FR248]

Εἰ δέ τις ἡμᾶς ἀπαιτοίη καὶ μὴ προσεκβάλλοντας τὰς ἴσας εὐθείας ἀποδεικνύναι τῶν ἰσοσκελῶν ἴσας τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας — οὐ γὰρ χρῆναι διὰ τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν ἀποδεικνύναι καὶ ταύτας ἴσας — τρόπον τινὰ μεταθέντες τὴν κατασκευὴν καὶ τὰς ἔξω ποιήσαντες ἐντὸς τοῦ ἰσοσκελοῦς δεῖξομεν τὸ προκείμενον. ἔστω γὰρ ἰσοσκελὲς τὸ $\overline{αβγ}$ καὶ εἰλήφθω σημεῖον τυχὸν ἐπὶ τῆς $\overline{αβ}$ τὸ δ , καὶ ἀπὸ τῆς $\overline{αγ}$ ἴση τῇ $\overline{αδ}$ ἢ $\overline{αε}$ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{βε}$, $\overline{δγ}$ $\overline{δε}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{αβ}$ τῇ $\overline{αγ}$ καὶ ἡ $\overline{αδ}$ τῇ $\overline{αε}$ καὶ γωνία ἡ $\overline{α}$ κοινή, ἔσται καὶ ἡ $\overline{βε}$ ἴση τῇ $\overline{δγ}$ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ὥστε ἡ ὑπὸ $\overline{αβε}$ τῇ ὑπὸ $\overline{αγδ}$ ἴση ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ $\overline{δβ}$ ἴση τῇ $\overline{εγ}$ καὶ ἡ $\overline{βε}$ τῇ $\overline{δγ}$ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{δβε}$ τῇ

[FR249]

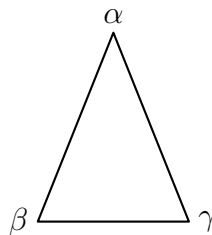


ὑπὸ $\overline{εγδ}$ ἴση, καὶ ἡ $\overline{δε}$ βάσις κοινή, καὶ πάντα ἴσα πᾶσιν, ὥστε ἡ μὲν ὑπὸ $\overline{εδβ}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{δεγ}$ ἢ δὲ ὑπὸ $\overline{δεβ}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{εδγ}$. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ $\overline{εδβ}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{δεγ}$, ὧν ἀφῆρηνται ἴσαι αἱ ὑπὸ $\overline{δεβ}$ $\overline{εδγ}$, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{βδγ}$ $\overline{γεβ}$ ἴσαι εἰσίν. εἰσὶν δὲ καὶ αἱ $\overline{βδ}$ $\overline{δγ}$ πλευραὶ ἴσαι ταῖς $\overline{γε}$ $\overline{εβ}$ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ καὶ

ἡ $\overline{\beta\gamma}$ κοινὴ βάσις, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν, ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴσαι εἰσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\beta\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\beta}$. ὑποτείνει γὰρ τὴν μὲν ὑπὸ $\overline{\delta\beta\gamma}$ ἢ $\overline{\delta\gamma}$, τὴν δὲ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\beta}$ ἢ $\overline{\epsilon\beta}$. τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι καὶ μὴ προσεχβληθεῖσιν τῶν ἴσων εὐθειῶν.

Ἔτι δὲ συντομώτερον ἀποδείκνυσιν ὁ **Πάππος** μηδεμιᾶς προσθήκης δεηθεὶς οὕτως· ἔστω τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἰσοσκελὲς καὶ ἴση ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. νοήσωμεν οὖν τοῦτο τὸ ἐν ὧς δύο τρίγωνα, καὶ λέγωμεν οὕτως· ἐπεὶ ἐστὶ καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$

[FR250]



τῇ $\overline{\alpha\beta}$, δύο αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσαι δυοὶ ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\beta}$, ἡ αὐτὴ γάρ, ἔστιν ἄρα καὶ πάντα πᾶσιν ἴσα, ἡ μὲν $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$, τὸ δὲ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρίγωνον τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ γωνία· ὑπὸ γὰρ ταύτας αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$. τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι. καὶ ἔοικεν τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως εὐρεῖν κατανοήσας ὅτι καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐπὶ τοῦ τετάρτον θεωρήματος ἐνώσας τὰ δύο τρίγωνα καὶ ἐφαρμόσας ἀλλήλοις καὶ ἐκ δυοῖν ἐν ἀποτελέσας οὕτως αὐτῶν τὴν ἰσότητα τὴν κατὰ πάντα τεθέεται. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν καὶ ἡμᾶς δυνατὸν ἐν τῷ ἐνὶ τούτῳ παρὰ τὴν λῆψιν τὰ δύο τρίγωνα θεωροῦντας ἀποδεικνύναι τὴν ἰσότητα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν.

Τῷ μὲν οὖν **Θαλῇ** τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὐρέσεως ἔνεκα καὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος χάρις λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἀρχαϊκώτερον δὲ τὰς ἴσας ὁμοίας προσειρηχέναι. μειζόνως δὲ ἂν τις ἀγασθεῖ τῶν νεωτέρων τοῦς ἀποδείξαντας ἔτι καθολικώτερον — ὧν ἐστὶ καὶ **Γεμῖνος** — τὰς ἀφ' ἑνὸς σημείου προσπιπτούσας εὐθείας ἴσας ἐπὶ μίαν ὁμοιομερῆ γραμμὴν ἴσας γωνίας ποιούσας, ὥστ' εἴτε εὐθεῖαν ἔχοι βάσιν εἴτε περιφέρειαν εἴτε ἔλικα κυλινδρικήν, ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας. τούτῳ γὰρ ὁ **Γεμῖνος** τῷ θεωρήματι χρώμενος δείκνυσιν, ὅτι μόναι τρεῖς εἰσι γραμμαὶ καὶ οὐ πλείους αἱ ὁμοιομερεῖς εὐθεῖαι καὶ περιφερὲς καὶ ἡ περὶ κύλινδρον ἔλιξ. καὶ τοῦτό ἐστὶ τὸ κυρίως καθόλου ᾧ πρῶτῳ τὸ σύμπτωμα ὑπάρχει, καθάπερ δὴ καὶ τὸ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους ἔχειν τριγώνῳ παντὶ δειχθήσεται καθ' αὐτὸ ὑπάρχον. οὐκ ἔστιν ἄρα καθόλου τοῦ ἰσοσκελοῦς, εἰ καὶ παντὶ αὐτῷ ὑπάρχει τὸ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἔχειν, ἀλλὰ τῶν πρὸς ὁμοιομερῇ γραμμῇ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἐκείναις γὰρ

[FR251]

πρώτως ὑπάρχει τὸ ἴσας ὑποτείνειν γωνίας.

Prop. VI, theor. III. Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ὦσιν καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι εἰσί.

Τοῦτο τὸ τηώρημα δύο ταῦτο ἐπεδείξατο πρώτιστον τῶν θεωρημάτων τὴν τε ἀντιστροφὴν καὶ τὴν εἰς ἀδύνατον ἀναγωγὴν. ἀντιστρέφει μὲν γὰρ τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι, δείκνυται δὲ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀναγωγῆς. δεῖ δὲ περὶ ἀμφοτέρων εἰπεῖν, ὅσα πρὸς τὴν παροῦσάν ἐστι πραγματεῖαν οἰκεῖα.

[FR252]

Λέγεται τοίνυν ἡ ἀντιστροφή παρὰ τοῖς γεωμέτραις ἢ μὲν προηγουμένως καὶ κυρίως, ὅταν τὰ συμπεράσματα καὶ τὰς ὑποθέσεις ἀλλήλων ἀντιμεταλαμβάνη τὰ θεωρήματα, καὶ τὸ μὲν τοῦ προτέρου συμπέρασμα ὑπόθεσις ἐν τῷ δευτέρῳ γίνηται, ἢ δὲ ὑπόθεσις ὡς συμπέρασμα ἐπάγεται· οἷον τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι — ὑπόθεσις μὲν τὸ ἰσοσκελὲς ἐνταῦθα τρίγωνον, συμπέρασμα δὲ ἡ τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ἰσότης — καὶ ὧν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι, ταῦτα ἰσοσκελῆ, ὃ δὴ καὶ τὸ ἕκτον λέγει θεωρήμα, ὑπόθεσιν μὲν ποιησάμενον τὸ ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας, συμπέρασμα δὲ τὴν ἰσοτητα τῶν πλευρῶν τῶν ὑποτείνουσῶν τὰς ἴσας ἐκείνας γωνίας. ἢ δὲ ἐστὶν ἀντιστροφή κατὰ μόνην τὴν ποιὰν τῶν συγκειμένων ἐναλλαγὴν. ἐὰν γὰρ ἡ θεωρήμα σύνθετον ἀπὸ πλείονων ὑποθέσεων ἀρχόμενον καὶ λήγον εἷς τι συμπέρασμα, λαβόντες τὸ συμπέρασμα καὶ μίαν τῶν ὑποθέσεων συμπέρασμα ποιοῦνται μίαν τῶν ὑποθέσεων ἢ καὶ πλείους. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον τῷ τετάρτῳ θεωρήματι τὸ ὀγδοὸν ἀντιστρέφει. τὸ μὲν γὰρ φησιν ὑπὸ ἴσας πλευρὰς καὶ γωνίας βάσεις ἴσαι ὑποτείνουσι, τὰ δὲ ἐπ' ἴσων βάσεων ἴσαι πλευραὶ κείμεναι γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ὧν τὸ μὲν ἐπὶ ἴσων βάσεων συμπέρασμα ἦν τοῦ προτέρου, τὸ δὲ ἴσαι πλευραὶ κείμεναι μία τῶν ἐν ἐκείνῳ προειλημμένων ὑποθέσεων. δύο δὴ τούτων οὐσῶν ἀντιστροφῶν ἢ μὲν προηγουμένη μονοειδὴς ἐστὶ καὶ ὠρισμένη, ἢ δὲ ἑτέρα ποικίλη καὶ εἰς ἀριθμὸν πρόεισι πολὺν θεωρημάτων καὶ οὐκ ἐν ἐνὶ ἀντιστρέφουσα ἀλλ' ἐν πολλοῖς διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐν τοῖς συνθέτοις θεωρήμασιν ὑποθέσεων. πολλάκις δὲ καὶ τῷ ἀπὸ δυεῖν [ἢ πλείονων] ὑποθέσεων ἀρχομένῳ ἐν ἀντιστρέφομεν, ὅταν αἱ ὑποθέσεις μὴ πᾶσαι ὦσιν ὠρισμέναι ἀλλ' ἔνιαι ἀοριστώδεις.

[FR253]

Δεῖ δὲ ἐφιστάνειν καὶ ἐν τούτοις, ὅτι πολλαὶ ἀντιστροφαὶ γίνονται ψευδεῖς καὶ οὐκ εἰσὶ κυρίως ἀντιστροφαί· οἷον πᾶς ἐξάγωνος ἀριθμὸς τρίγωνός ἐστιν, ἀλλ' οὐκ ἔτι ἀληθὲς, ὅτι πᾶς τρίγωνος ἐξάγωνός ἐστιν. αἴτιον δὲ ὅτι τὸ μὲν ἐστὶ κοινότερον, τὸ δὲ μερικώτερον καὶ κατὰ παντὸς λέγεται μόνον θατέρου θάτερον. ἐφ' ὧν δὲ τὸ πρώτως ὑπάρχον καὶ τὸ ἢ αὐτὸ λαμβάνεται ἐκείνων καὶ ἀντιστροφή παρακολουθεῖ. καὶ ταῦτα οὐδὲ τοὺς περὶ τὸν **Μέναιχμον** καὶ **Ἀμφίνομον** λέληθεν μαθηματικούς.

[FR254]

Αὐτῶν δὲ τῶν ἀντιστροφόντων θεωρημάτων τὰ μὲν εἰώθασι καλεῖν προηγούμενα, τὰ δὲ ἀντίστροφα. ὅταν μὲν γὰρ ὑποθέμονοι τι γένος ἀποδεικνύωσι τὸ περὶ αὐτὸ σύμπτωμα, προηγούμενον τοῦτο λέγουσιν, ὅταν δὲ ἀνάπαλιν ὑπόθεσιν μὲν ποιῶνται τὸ σύμπτωμα, συμπέρασμα δὲ τὸ μένος, ὃ τοῦτο συμβέβηκεν, ἀντίστροφον τὸ τοιόνδε προσαγορεύουσι. πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἴσας ἔχει τὰς πρὸς τῇ βάσει, τοῦτο προηγούμενον — ὑπόκειται γὰρ τὸ τῇ φύσει προηγούμενον, λέγω δὴ τὸ γένος αὐτὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον — πᾶν τρίγωνον δύο γωνίας ἴσας ἔχον καὶ τὰς ὑποτείνουσας πλευρὰς ἴσας ἔχει καὶ ἐστὶν ἰσοσκελές, τοῦτο ἀντιστρέφον. ἐναλλάττει γὰρ τὸ ὑποκείμενον καὶ τὸ τούτου πάθος, καὶ τὸ μὲν ὑποτίθησι, τὸ δὲ ἀπὸ τούτου δείκνυσι.

Τοσαῦτα περὶ τῶν γεωμετρικῶν ἀντιστροφῶν εἶχομεν λέγειν. αἱ δὲ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαὶ πάντως μὲν εἰς ἀδύνατον τελευτῶσιν ἐναργές, καὶ οὐ τὸ ἀντικείμενον ὁμολόγηται, συμβαίνει δὲ τὰς μὲν αὐτῶν ἐπὶ τὰ μαχόμενα ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις ἥτοι αἰτήμασιν ἢ ταῖς ὑποθέσεσι τελευτᾶν, τὰς δὲ ἐπὶ τὰ τοῖς προαποδεδειγμένοις ἀντιφάσκοντα. τὸ μὲν γὰρ ἔκτον τοῦτο θεωρήμα τὸ συμβαῖνον ἀδύνατον ἐπιδείκνυσι διὰ τὸ κοινὴν ἐννοιαν ἀνατρέπειν τὴν τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον λέγουσαν, τὸ δὲ ὄγδοον καταντᾷ μὲν εἰς ἀδύνατον, ἀλλ' οὐ κοινῆς ἐννοίας ἀνατρεπτικόν, ἀλλ' τοῦ δεδειγμένου διὰ τοῦ ἐβδόμου θεωρήματος. ὁ γὰρ ἀπέφησεν τὸ ἔβδομον, τοῦτο ἐκεῖνο δείκνυσι καταφασκόμενον τοῖς μὴ σεγχωροῦσι τὸ ζητούμενον.

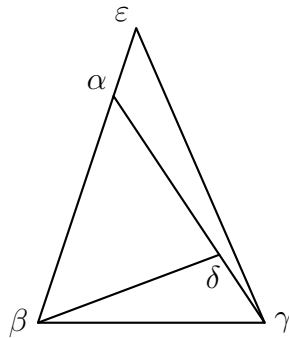
[FR255]

Πᾶς γε μὴν εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγὴ λαβοῦσα τῷ ζητούμενῳ τὸ μαχόμενον καὶ τοῦτο ὑποθεμένη πρόεισιν, ἕως ἂν εἰς ὁμολογούμενον ἄτοπον καταντήσῃ καὶ δι' ἐκεῖνο τὴν ὑπόθεσιν ἀνελοῦσα βεβαιώσῃ τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον. ὅλως γὰρ εἰδέναι χρὴ ὅτι πᾶσαι αἱ μαθηματικαὶ πίστεις ἢ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰσιν ἢ ἐπὶ τὰς ἀρχάς, ὥς πού φησι καὶ ὁ **Πορφύριος**. καὶ αἱ μὲν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν διτταὶ καὶ αὐταὶ τυγχάνουσιν, ἢ γὰρ ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν ὥρμηται καὶ τῆς ἐναργείας μόνης τῆς αὐτοπίστου, ἢ ἀπὸ τῶν προδεδειγμένων· αἱ δὲ ἐπὶ τὰς ἀρχάς ἢ θετικαὶ τῶν ἀρχῶν εἰσιν ἢ ἀναιρετικά. ἀλλὰ θετικά μὲν οὔσαι τῶν ἀρχῶν ἀναλύσεις καλοῦνται, καὶ ταύταις αἱ συνθέσεις ἀντίκεινται — δυνατόν γὰρ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ἐκεῖνων προελθεῖν εὐτάκτως ἐπὶ τὸ ζητούμενον, καὶ τοῦτό ἐστιν ἡ σύνθεσις — ἀναιρετικά δὲ οὔσαι εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὰι προσαγορεύονται. τὸ γὰρ τῶν ὁμολογημένων τι καὶ ἐναργῶν ἀνατρέψαι ταύτης ἔργον τῆς ἐφόδου. καὶ ἐστὶ καὶ ἐπὶ ταύτης συλλογισμός τις, ἀλλ' οὐχ ὁ αὐτὸς ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. ἐν γὰρ ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀναγωγαῖς ἡ πλοκὴ κατὰ τὸ δεύτερόν ἐστιν τῶν ὑποθετικῶν, οἷον εἰ μὴ εἰσιν τῶν ἴσας ἐχόντων γωνίας τριγώνων αἱ ὑποτείνουσας πλευραὶ τὰς ἴσας γωνίας ἴσαι, τὸ ὅλον ἴσον ἐστὶν τῷ μέρει· ἀλλὰ τοῦτο ἀδύνατον· εἰσὶν ἄρα τῶν ἴσας ἐχόντων δύο γωνίας τριγώνων αἱ ὑποτείνουσας πλευραὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ αὐταὶ ἴσαι.

[FR256]

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς παρὰ τοῖς γεωμέτραις εἰς τὸ ἀδύνατον ἀναγωγῆς· χρῆται δέ, ὅπερ ἔφανεν, ὁ στοιχειωτὴς τῇ μὲν ἀντιστροφῇ κατὰ τὴν πρότασιν, τὸ συμπέρασμα τοῦ πέμπτου θεωρήματος ὡς δεδεμόνον λαβὼν καὶ τὴν ὑπόθεσιν

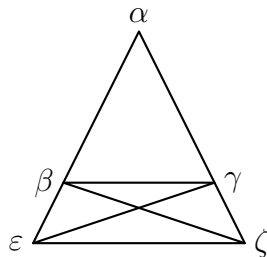
τὴν ἐκεῖνου προστιθεὶς ὡς ζητούμενον, τῇ δὲ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ περί τε τὴν κατασκευὴν καὶ τὴν ἀπόδειξιν. εἰ δέ τινες ἐνίσταντο λέγοντες ὅτι τὸν τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσην ἀφαιροῦντα οὐ δεῖ πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ ποιεῖσθαι τὴν ἀφαίρεσιν, ἀλλὰ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$, θέμενοι καὶ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὸ αὐτὸ κατανήσομεν ἀδύνατον. ἔστω γὰρ ἴση ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\beta\alpha}$ καὶ κείσθω ἴση ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ τῇ $\overline{\delta\gamma}$. ὅλη ἄρα ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴση τῇ



$\overline{\beta\epsilon}$, κοινὴ δὲ ἡ $\overline{\beta\gamma}$, δύο δυεῖν ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς τῇ $\overline{\beta}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ — οὕτω γὰρ κείται — καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα διὰ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ τὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$

[FR257]

τρίγωνον τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριγώνῳ ἴσον, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄλλ' ἐπεὶ καὶ τοῦτο δῆλον, ἐπόμενόν ἐστι καὶ τὸ λοιπὸν δεῖξαι τῆς ἀντιστροφῆς. ὁ μὲν γὰρ στοιχειωτῆς πρὸς μέρος ἀντέστρεψεν τοῦ πέμπτου θεωρήματος ὅλον τὸ ἕκτον. δεῖ δὲ καὶ τὴν λοιπὴν ἀντιστροφὴν προσθεῖναι. αὕτη δὲ ἐστίν ἡ λαμβάνουσα μὲν ὡς ὑπόθεσιν τὸ εἶναι τριγώνου τινὸς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας, δεικνύουσα δὲ ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον. ἔστω τοίνυν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρίγωνον καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι. λέγω ὅτι ἰσοσκελὲς ἐστὶν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\epsilon}$ σημεῖον τὸ $\overline{\epsilon}$



καὶ ἴση τῇ $\overline{\beta\epsilon}$ ἡ $\overline{\gamma\zeta}$ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\epsilon\gamma}$ $\overline{\beta\zeta}$ $\overline{\epsilon\zeta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\gamma\zeta}$, κοινὴ ἡ $\overline{\beta\gamma}$, δύο δυεῖν ἴσαι, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\beta}$ γωνία ἴση, καὶ γὰρ ὑπὸ τὴν βάσιν, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὸ τέταρτον. ἴση ἄρα καὶ ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$

βάσις τῇ $\overline{\zeta\beta}$ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\beta}$ ἴση καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\zeta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$, ὑπὸ γὰρ αὐτὰς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἦν δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$ ὅλη τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\beta}$ ἴση, ἀφ' ὧν ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\beta\gamma}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\beta}$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\zeta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\epsilon}$. ἐστὶν δὲ ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ ἴση καὶ ἡ $\overline{\beta\zeta}$ τῇ $\overline{\epsilon\gamma}$ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\epsilon}$ ἴση, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ τῇ $\overline{\alpha\zeta}$ ἴση δι' αὐτὸ τὸ ἕκτον — δέδεικται γὰρ — ἀφ' ὧν ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ ἴση — οὕτως γὰρ ἀφήρηται — λοιπὴ ἄρα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴση. ἰσοσκελὲς ἄρα ἐστὶν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρίγωνον. ἐάν τε ἄρα τὰς δύο γωνίας ἴσας ἔχῃ, ἰσοσκελὲς ἐστὶν, ἐάν τε τῶν πλευρῶν ἐκβληθεισῶν τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσας ἔχῃ, καὶ οὕτως ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ δοθὲν τρίγωνον.

[FR258]

Τί οὖν αἴτιον, δι' ὃ οὐκ ἀντέστρεψεν ὁ στοιχειωτὴς καὶ τὸ λοιπὸν μέρος; ἢ ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ πέμπτου θεωρήματος τὸ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας εἶναι πάρεργον ἦν, ἄλλων ἔνεκα ἀπόρων διαλύσεως ἐκβεβλημένον, τὸ δὲ τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσων οὐσῶν ἰσοσκελὲς εἶναι τρίγωνον οὔτε πρὸς ἀπόδειξιν προηγουμένην οὔτε πρὸς διάλυσιν αὐτῷ συντελεῖ τῶν ζητουμένων πρὸς τῷ καὶ διὰ τῶν ἐξῆς θεωρημάτων ἀποφαίνεσθαι τοῦτο καὶ ἀφορμας αὐτῷ κάκεῖνα παρέχειν τοῦ τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσων οὐσῶν δείκνυσθαι καὶ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς; εἰ γὰρ εὐθεία πᾶσα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα καὶ ποιῶσα δύο γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν γωνιῶν δεδομένων ἴσων καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει πάντως ἴσαι ἔσονται, τούτων δὲ ἴσων οὐσῶν καὶ αἱ ὑποτείνουσιν αὐτὰς ἴσαι. τούτῳ τοίνυν χρώμενος ἐν πάσῃ τῇ στοιχειώσει ἡδύνατο λαμβάνειν ὅτι τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσων οὐσῶν τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐστὶν εἴπερ ἐδεῖτο καὶ τούτου πρὸς τινων θεωρημάτων ἀπόδειξιν. οὐ γὰρ μετὰ πολλὰ φανήσεται δεικνύμενον ὅτι, ἐάν εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταῖσα γωνίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ. καὶ τὰ μὲν πρὸ τούτου οὐδὲν δεῖ τῆς ἀντιστροφῆς ταύτης, τὰ δὲ ἐξῆς, εἰ δέοιτο, διὰ τούτου τὴν πίστιν ἔξει τοῦ θεωρήματος.

[FR259]

Prop. VII, theor. III. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι οὐ σταθῇσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐστὶ μὲν τὸ θεώρημα τοῦτο σπάνιον τι πεπονθὸς καὶ οὐ πάνυ ταῖς ἐπιστημονικαῖς προτάσεσιν εἰωθός. τὸ γὰρ ἀποφατικῶς σχηματίζεσθαι καὶ μὴ καταφατικῶς οὐ σφόδρα αὐταῖς οἰκεῖον. τὰ γοῦν πολλὰ καταφάσεις εἰσὶν αἱ προτάσεις τῶν τε γεωμετρικῶν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν θεωρημάτων. αἴτιον δέ, ὡς φησὶν Ἀριστοτέλης, ὅτι τὸ καθόλου καταφατικὸν ταῖς ἐπιστήμαις ἐστὶ μάλιστα προσήκον ὡς αὐταρχέστερον καὶ μηδὲν τῆς ἀποφάσεως προσδεόμενον, τὸ δὲ καθόλου

[FR260]

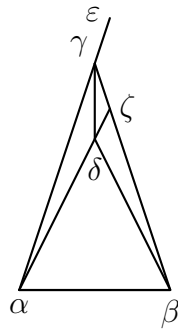
ἀποφατικὸν δεῖται καὶ τῆς καταφάσεως, εἰ μέλλοι δείκνυσθαι. ἄνευ γὰρ καταφάσεως οὔτε ἀπόδειξις ἐστίν, οὔτε συλλογισμὸς οὐδεὶς, καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἀποδεικτικαὶ τῶν ἐπιστημῶν τὰ μὲν πλεῖστα καταφατικὰ δεικνύουσι, σπανίως δὲ χρῶνται καὶ τοῖς ἀποφατικοῖς συμπεράσμασι.

Θαυμαστῆς δὲ ἀκριβείας ἐστὶν ἡ πρότασις τοῦ θεωρήματος πλήρης καὶ πάσαις ἡσφάλισται ταῖς προδοθήκαις, δι' ὧν ἀνέλεγκτος ἀποτετέλεσται καὶ ἀναμφισβήτητος τοῖς συκοφαντεῖν ἐπιχειροῦσι. πρῶτον μὲν γὰρ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς **εὐθείας** εἴληπται, ἵνα μὴ ἐπ' ἄλλης δύο δυσὶν ἴσας δεικνύωμεν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ παραλογιζώμεθα τοὺς τῇ προτάσει χρωμένους. ἔπειτα μιᾶς εὐθείας οὔσης οὐ φησὶν ἐπὶ ταύτην συσταθήσεσθαι τὰς δύο ταῖς δυσὶν ἴσας οὐχ ἀπλῶς — τοῦτο γὰρ δυνατόν — ἀλλ' **ἑκατέραν ἑκατέρᾳ**. τί γὰρ θαυμαστὸν ἀμφοτέρας ἀμφοτέραις ἴσας λαβεῖν τῶν ἐπιστυνισταμένων, τὴν μὲν ἐκτείναντα, τὴν δὲ συστειλάντα· ἀλλ' ἑκατέραν ἑκατέρᾳ φησὶν ἀδύνατον. τρίτον προστίθησιν τὸ **πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ**. τί γὰρ, εἰ τις ταῖς προϋφεστώσαις δύο ποιήσας ἴσας ἄλλας δύο καὶ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἀφαρμόσειεν ταύτας ἐκείναις καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῷ κορυφοῦντι τὰς ὑποκειμένας εὐθείας καὶ ταύτας συστήσαιτο; πάντως γὰρ ἴσων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τὰ πέρατα ἐφαρμόσει. τέταρτον τὸ **ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη**. τί γὰρ, εἰ μιᾶς εὐθείας ὑποκειμένης τὰς μὲν ἐπὶ τὸ ἕτερον αὐτῆς μέρος ποιήσαιμεν τῶν εὐθειῶν, τὰς δὲ ἐπὶ τὸ ἕτερον, ὥστε τὴν εὐθεῖαν κοινὴν εἶναι βάσιν τριγώνων δυεῖν τὰς κορυφὰς ἀντικειμένας ἐχόντων; ἵνα οὖν μὴ τοῦτο παθόντες τὴν αὐτῶν ἀπάτην ἐπὶ τὸν στοιχειωτὴν μεταγάγωμεν προσέθηκεν τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. πέμπτον ἐπήνεγκε τὸ **τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις** καὶ γὰρ ἦν δυνατόν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο δυσὶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ συστήσασθαι πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ὅλη τῇ εὐθείᾳ χρησάμενον καὶ ἐπὶ ταύτης τὰς δύο συνιστάντα, τῶν συνιστμένων οὐ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐκείναις ἔχουσιν ἀλλὰ ἕτερα. ἐὰν γοῦν νοήσωμεν ἐν τετραγώνῳ δύο διαγωνίους ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν, ἔσονται δύο δυσὶν ἴσαι, πλευρὰ καὶ διάμετρος τῇ παραλλήλῳ πλευρᾷ καὶ τῇ ἐτέρᾳ διαμέτρῳ, ἀλλ' οὐχ αἱ ἴσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔξουσιν· οὔτε γὰρ αἱ παράλληλοι οὔτε αἱ διαμέτροι τὰ αὐτὰ ἔξουσιν ἀλλήλαις, αὗται δὲ ἦσαν ἴσαι.

[FR261]

Τούτων οὐ πάντων τῶν διορισμῶν φυλαττομένων ἢ τε πρότασις ἀληθὴς καὶ ὁ συλλαγισμὸς ἀναμφισβήτητος ἀποδείκνυται. τάχα δ' ἂν τινες καὶ ἐπὶ τούτοις ἅπασιν τοῖς ἐπιστημονικοῖς ὅροις ἐνίστασθαι τολμήσειαν λέγοντες, ὅτι καὶ τούτων ὑποκειμένων δυνατόν ἐστίν, ὃ φησὶν ὁ γεωμέτρης ἀδύνατον εἶναι. ἔστω γὰρ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ εὐθεῖα καὶ ἐπὶ ταύτης δύο ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ δύο ἴσαι αἱ $\overline{\alpha\delta}$ $\overline{\delta\beta}$ καὶ ἔστωσαν αὐταὶ ἐντὸς ἐκείνων, ἵνα καὶ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ $\overline{\gamma}$ καὶ τῷ $\overline{\delta}$ ᾧσι καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις τὸ $\overline{\alpha}$ καὶ τὸ $\overline{\beta}$, καὶ ἡ μὲν $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$ ἴση, ἡ δὲ $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$. πρὸς δὲ τοὺς οὕτως ἐνισταμένους ἀπαντησόμεθα τὴν μὲν $\overline{\delta\gamma}$ ἐπιζεύξαντες, τὰς δὲ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ $\overline{\alpha\delta}$ ἐκβάλλοντες. τούτων γὰρ

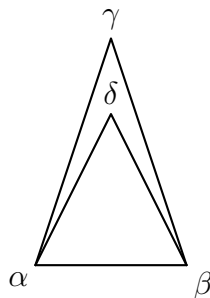
[FR262]



κατσκευασθέντων πρόδηλον ὅτι ἰσοσκελές μὲν τὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ τρίγωνον, ἴσης οὐσης, ὡς ἐκείνων λόγος, τῆς $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. αἱ δὲ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι, ἢ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\gamma}$. [μείζων δὲ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ ἢ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$], μείζων ἄρα τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ ἢ ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\gamma}$, πόλλω ἄρα μείζων ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\gamma}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$. ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν ἴση ἢ $\overline{\delta\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\beta}$, ἴσαι καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$, ἢ αὐτὴ ἄρα καὶ μείζων πολλῶ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ τοῦτο ἦν ἄρα, ὅπερ ἐξηγούμενοι τὸ πέμπτον ἐλέγομεν ὅτι τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, καὶ εἰ μὴ πρὸς τὰς ἀποδείξεις τῶν ἐξῆς θεωρημάτων, ἀλλὰ πρὸς γε τὰς τῶν ἐνστάσεων διαλύσεις ἐστὶν χρήσιμον. καὶ γὰρ νῦν τὴν ἐνστασιν διηλέγξαμεν λαβόντες ὅτι τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$ ἴσων οὐσῶν ἔσσονται καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$ $\overline{\zeta\delta\gamma}$ γωνίαι ἴσαι. φανήσεται δὲ ὡσαύτως καὶ ἐπ' ἄλλων θεωρημάτων ἡμῖν τοῦτο συντελοῦν εἰς τὰς τῶν ἀπορουμένων διαλύσεις.

[FR263]

Εἰ δὲ λέγοι τις ὅτι ἔστωσαν ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$ ἴσαι αἱ $\overline{\beta\delta}$ $\overline{\beta\gamma}$, ὧν ἡ μὲν $\overline{\beta\gamma}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἢ δὲ $\overline{\beta\delta}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$ πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ α καὶ τῷ β , τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$ τὸ γ καὶ τὸ δ σημείον, τί ἐροῦμεν πρὸς τοῦτον τὸν λόγον; ἢ ὅτι δεῖ καὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς



$\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας συνεστάναι καὶ τὰς ταύταις ἴσας ἐπὶ τῆς αὐτῆς συνίστασθαι τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας; οὕτως γὰρ καὶ ὁ στοιχειωτῆς ἐν τῇ προτάσει λέγει. αἱ δὲ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ $\overline{\alpha\delta}$ εὐθεῖαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας, ἀλλὰ πρὸς τινι σημείῳ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας

[FR264]

τὴν σύστασιν ἔσχον καὶ οὐκ ἐπ' αὐτῆς, ὥστε ἄλλαι μὲν εἰσιν αἱ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας, οἷον αἱ $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ καὶ αἱ $\overline{\alpha\delta}$ $\overline{\delta\beta}$, καὶ ἄλλαι αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι καὶ αἱ ταύταις ἴσαι, δέον πως τὰς συνισταμένας εὐθείας ἴσας ταύταις εἶναι, αἱ ἦσαν ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας.

Τοσαῦτα καὶ πρὸς ταύτην εἰήσθω τὴν ζήτησιν· ὅτι δὲ τὸ θεώρημα τοῦτο δέ-
δεικται παρὰ τῷ στοιχειωτῇ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς καὶ ὅτι τὸ ἀδύνατον
μάχεται πρὸς κοινὴν ἔννοιαν τὴν λέγουσαν τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον καὶ
τὸ αὐτὸ μεῖζον καὶ ἴσον εἶναι ἀδύνατον, πρόδηλον. ἔοικεν δὲ εἶναι τοῦτο
τὸ θεώρημα λῆμμα προλαμβανόμενον τοῦ ὀγδόου θεωρήματος. εἰς γὰρ τὴν
ἀπόδειξιν ἐκείνου συντελεῖ καὶ οὔτε στοιχεῖόν ἐστιν ἀπλῶς οὔτε στοιχειῶδες.
οὐ γὰρ ἐπὶ πολλὰ διατείνει τὴν ἑαυτοῦ χρεῖαν. σπανιωτάτην γοῦν αὐτοῦ παρὰ
τῷ γεωμέτρῃ τὴν χρῆσιν εὐρήσομεν.

[FR265]

Prop. VIII, theor. V. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς
ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν βάσιν
τῇ βάσει ἴσην, καὶ κῆν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ
τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

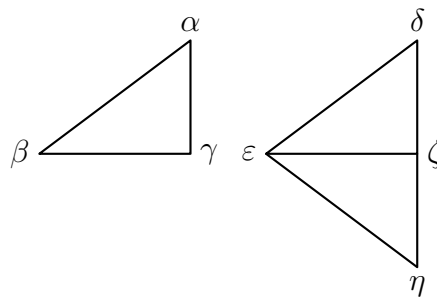
Τὸ ὀγδοὸν θεώρημα ἀντίστροφον μὲν ἐστὶ τοῦ τετάρτου, οὐ κατὰ τὴν προ-
ηγουμένην ἀντιστροφὴν ληφθέν — οὐ γὰρ ὅλην τὴν ὑπόθεσιν ἐκείνου ποιεῖται
συμπέρασμα καὶ ὅλον τὸ συμπέρασμα ὑπόθεσιν — ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ὑποθέσεως
τοῦ τετάρτου τὸ δὲ τῶν ἐκείνῳ ζητουμένων συμπλέκον δείκνυσιν ἓν τι τῶν
ἐκεῖ δεδομένων. τὸ μὲν γὰρ τὰς δύο πλευρὰς ἴσας εἶναι ταῖς δύο πλευραῖς
ὑπόθεσις ἐστὶν ἐν ἀμφοτέραις, τὸ δὲ τὴν βάσιν ἴσην τῇ βάσει ἐν ἐκείνῳ μὲν
τῶν ζητουμένων ἦν, ἐν δὲ τούτῳ δέδοται. τὸ δὲ τὴν γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ
δεδεμένον μὲν ἐν ἐκείνῳ, ζητούμενον δὲ ἐν τούτῳ· μόνη τοίνυν ἡ ἐναλλαγή
τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων ποιεῖ τὴν ἀντιστροφὴν. εἰ δὲ τις ἐπιποιοίῃ
μαθεῖν τὴν αἰτίαν, δί ἦν ὀγδοὸν τέτακται καὶ οὐ μετὰ τὸ τέταρτον εὐθύς ὡς
ἀντίστροφον ἐκείνῳ, καθάπερ δὲ μετὰ τὸ πέμπτον τὸ ἕκτον ἀντίστροφον ὃν τοῦ
πέμπτου — καὶ γὰρ τὰ πλεῖστα τῶν ἀντιστρεφόντων ἔπεται τοῖς προηγούμενοις
καὶ ἐπ' αὐτοῖς ἀμέσως δείκνυται — λεκτέον ὅτι τοῦ μὲν ἐβδόμου τὸ ὀγδοὸν
ἐδεῖτο. δείκνυται γὰρ διὰ εἰς ἀδύνατον ἀναγωγῆς. τὸ δὲ ἀδύνατον, ὅτι τοιοῦτόν
ἐστὶν, ἀπὸ τοῦ ἐβδόμου γνώριμον γίνεται. τοῦτο δ' αὖ πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν
ἐδεῖτο τοῦ πέμπτου. προεῖληπται τούνυν ἀναγκαίως καὶ τὸ ἕβδομον καὶ τὸ
πέμπτον τοῦ δεικνυμένου νυνὶ θεωρήματος. ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον τῷ
πέμπτῳ ῥάδιον εἶχεν καὶ ἀπὸ τῶν πρώτων τὴν ἀπόδειξιν, εἰκότως εὐθύς μετὰ τὸ
πέμπτον ἐτάχθη διὰ τε τὴν πρὸς ἐκεῖνο συγγένειαν καὶ ὅτι διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον
ἀπαγωγῆς δεικνύμενον ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν ἐλέγχει τὸ ἀδύνατον, καὶ οὐχ
ὡς τὸ ὀγδοὸν ἀπ' ἄλλου θεωρήματος. ἐναργέστερα γὰρ εἰς ἔλεγχον τὰ ταῖς

[FR266]

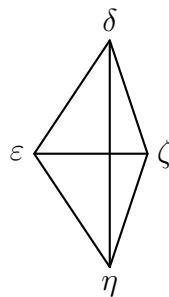
κοιναῖς ἐννοίαις μαχόμενα τῶν τοῖς θεωρήμασιν ἀνιτφασκομένων ταῦτα γὰρ διὰ ἀποδείξεως εἴληπται, ἐκείνων δὲ ἡ γνῶσις κρείττων ἀποδείξεως.

Ὁ μὲν οὖν στοιχειωτῆς διὰ τοῦ προαποδειχθέντος ἐβδόμου θεωρήματος τὸ προκείμενον δείκνυσιν, οἱ δὲ περὶ **Φίλων**α μηδὲν τούτου προσδεηθέντες φασὶν ἀποδείξειν τὸ ὀγδοον. ἐννοήσθω γὰρ, φασίν, δύο τριγώνων ὄντων τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ καὶ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ καὶ ἐχόντων δύο πλευρὰς δυσὶν ἴσας καὶ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ βάσιν τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ ἐφαρμολοζομένην τὴν βάσιν τῇ βάσει καὶ τιθέμενον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρίγωνον τῷ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μὲν ἐπιπέδου, ἵνα μὴ κλίσις ἢ τῶν δύο ἢ βάσις, ἐπὶ θάτερα δὲ τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$ τυχὸν εὐθείας, ὥστε ἀντικειμέναις αὐτῶν εἶναι τὰς κορυφὰς. καὶ ἀντὶ τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$

[FR267]



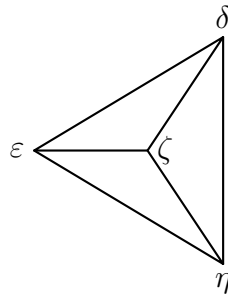
ἔστω τεθὲν οὕτως τὸ $\overline{\epsilon\zeta\eta}$, καὶ ἴση τῇ μὲν $\overline{\delta\epsilon}$ ἢ $\overline{\epsilon\eta}$, τῇ δὲ $\overline{\delta\zeta}$ ἢ $\overline{\zeta\eta}$. ἡ τοίνυν $\overline{\zeta\eta}$ ἢ ἐπ' εὐθείας κείσεται τῇ $\overline{\delta\zeta}$, ἢ οὐκ ἐπ' εὐθείας, καὶ εἰ μὴ ἐπ' εὐθείας, ἡ κατὰ τὸ ἐντὸς ποιήσει γωνίαν πρὸς αὐτὴν ἢ κατὰ τὸ ἐκτὸς. ἔστω πρότερον ἐπ' εὐθείας. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ τῇ $\overline{\epsilon\eta}$ καὶ μία εὐθεῖα ἡ $\overline{\delta\zeta\eta}$ ἰσοσκελὲς τὸ $\overline{\delta\epsilon\eta}$ τρίγωνον καὶ ἴση ἢ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ γωνία τῇ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$. εἰ δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας ἐστίν, ἐντὸς ποιείτω τὴν γωνίαν καὶ ἐπεζεύχτω ἡ $\overline{\delta\eta}$. ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ



$\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\eta}$ καὶ ἡ βάσις ἡ $\overline{\delta\eta}$, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\eta\delta}$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\zeta\eta}$ καὶ βάσις ἡ $\overline{\delta\eta}$, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\eta}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\eta\delta}$. ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\eta\delta}$, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\eta\zeta}$ γωνίᾳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ δὲ τρίτον κατὰ τὸ ἐκτὸς ποιείτω

[FR268]

γωνίαν πρὸς τὴν $\overline{\delta\zeta}$ ἢ $\overline{\zeta\eta}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἐκτὸς ἡ $\overline{\delta\eta}$. ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ



$\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\eta}$ καὶ βάσεις ἡ $\overline{\delta\eta}$, ἴσαι αἱ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\delta\eta\epsilon}$ γωνίαι. πάλιν ἐπεὶ ἴσαι αἱ $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\zeta\eta}$ καὶ βάσεις ἡ $\overline{\delta\eta}$, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\eta}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\eta\delta}$. ἦσαν δὲ καὶ ὅλαι αἱ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\delta\eta\epsilon}$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ $\overline{\zeta\eta\epsilon}$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν καὶ εὗρηται τὸ προτεθέν κατὰ πάσαν θέσιν τῆς $\overline{\zeta\eta}$ εὐθείας ἡμῶν τὸ θεωρήμα ἀποδεδειχότων, καὶ οὐδαμοῦ τῷ ἐβδόμῳ προσεχρησάμεθα.

Μήποτε οὖν, φασί, περιττῶς ἐκεῖνο παρεισχεκύκληται τῷ στοιχειωρῇ; εἰ γὰρ μόνου ὀγδόου ἔνεκα αὐτὸ παρειλήφαμεν, δέδεικται δὲ καὶ ἄνευ ἐκείνου τὸ ὀγδοον, πῶς οὐχὶ παντελῶς ἄχρηστον ἀναφαίνεται τὸ ἔβδομον; πρὸς δὲ ταῦτα λεκτέον ἃ καὶ οἱ πρὸ ἡμῶν, ὅτι τὸ ἔβδομον ἀποδειχθὲν χρησιμώτατόν ἐστι τοῖς τὰ ἀστρονομικὰ δεινοῖς εἰς τὸν περὶ τῶν ἐκλείψεων τόπον. τοῦτῳ γὰρ φασιν χρώμενοι δεικνύναι ὅτι τρεῖς ἐφεξῆς ἐκλείψεις ἴσον ἀπέχουσαι ἀλλήλων οὐκ ἂν γένοιτο, λέγω δὲ ὥστε τοσούτῳ χρόνῳ τὴν δευτέραν διεστάναι τῆς πρώτης, ὅσῳ τὴν τρίτην τῆς δευτέρας· οἷον εἰ μετὰ τὴν πρώτην ἡ δευτέρα γέγονεν ἕξ μηνῶν παρελθόντων καὶ εἴκοσιν ἡμερῶν, οὐκ ἂν γενέσθαι τὴν τρίτην ὕστερον τοσούτῳ χρόνῳ τῆς δευτέρας, ἀλλ' ἤτοι πλέονι ἢ ἐλάσσονι. τοῦτο δὲ οὕτως ἔχον ἀποδείκνυσθαι διὰ τοῦ ἐβδόμου θεωρήματος. καὶ οὐ τοῦτο μόνον τὸν στοιχειωτὴν ὡς πρὸς ἀστρονομίαν ἡμῖν συντελοῦν ὁδοῦ πάρεργον δεικνύναι, ἀλλὰ καὶ ἄλλα θεωρήματα πολλά τε καὶ προβλήματα. τὸ γοῦν τελευταῖον ἐν τῷ τετάρτῳ, καθ' ὃ τὴν τοῦ πεντεκαίδεκαγώνου πλευρὰν ἐγγράφει τῷ κύκλῳ, τίνος ἔνεκα φθσίν τις αὐτὸν προβάλλειν ἢ τῆς πρὸς ἀστρονομίαν τούτου τοῦ προβλήματος ἀναφορᾶς; ἐγγράψαντες γὰρ εἰς τὸν διὰ τῶν πόλων κύκλον τὸ πεντεκαίδεκάγωνον ἔχουσι τὴν ἀπόστασιν τῶν πόλων τοῦ τε ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ζῳδιακοῦ. πεντεκαίδεκαγωνικὴν γὰρ ἀλλήλων πλευρὰν ἀφεστήκασιν. ὅμοιον οὖν ὁ στοιχειωτὴς καὶ πρὸς τὴν ἀστρονομίαν βλέπων πολλὰ προδεικνύναι προευντρεπίζων ἡμᾶς καὶ εἰς ἐκείνην τὴν ἐπιστήμην. συνιδὼν δὲ ὅτι τοῦτο τὸ ἔβδομον δείκνυται ἀπὸ τοῦ πέμπτου καὶ δείκνυσι χωρὶς ἀπάσης ποικιλίας τὸ ὀγδοον ταύτην αὐτῷ τὴν τάξιν δέδωκεν, ἐπεὶ ἡ γε τοῦ **Φίλωνος** ἐπιβολὴ καλὴ μὲν, τῇ δὲ ποικιλίᾳ τῶν πτώσεων πρὸς στοιχείωσιν ἀνεπιτήδειος.

Πρὸς μὲν οὖν τὴν ζήτησιν ταύτην εἰρήσθω τοσαῦτα. εἰ δὲ τις ἀποροίῃ, πῶς

[FR269]

οὐχὶ καὶ ἐπὶ τοῦ ὀγδόου προσέθηκεν, ὅσα ἐπὶ τοῦ τετάρτου, λέγω δὲ τὸ καὶ τὰ τρίγωνα ἴσα εἶναι καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας, ἐποῦμεν ὅτι τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας ἴσης ἀποδειχθείσης εἶπετο καὶ τὸ πάντα εἶναι πᾶσιν ἴσα διὰ τὸ τέταρτον. τοῦτο οὖν ἔδει μόνον καθ' αὐτὸ ἀποδεικνύναι, τὰ δ' ἄλλα ὡς ἐπόμενα λαμβάνειν.

[FR270]

Ἔοικεν δὲ τὴν ἰσότητα τῶν πρὸς ταῖς κορυφαῖς γωνιῶν ἢ τε τῶν περιεχουσῶν πλευρῶν τὰς γωνίας καὶ ἢ τῶν βάσεων ἰσότης ποιεῖν. οὔτε γὰρ ἀνίσων οὐσῶν τῶν βάσεων αἱ αὐταὶ γωνίαι μένουσι τῶν περιεχουσῶν ὑποκειμένων, ἀλλὰ τῆς βάσεως ἐλαττουμένης συνελασσοῦται ἡ γωνία καὶ αὐξομένης συναύζεται, οὔτε τῶν αὐτῶν βάσεων οὐσῶν, τῶν δὲ πλευρῶν ἀνισαζομένων μένει ἡ γωνία, ἀλλ' ἐλασσομένων μὲν αὖξεται, αὐξανομένων δὲ ἐλασσοῦται. πάσχουσι γὰρ ἐναντίον πάνθος αἱ γωνίαι ταῖς περιεχούσαις. καὶ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰ νοήσεαι εἰς τὸ κάτω διελκομένης τὰς πλευράς, αὐτὰς μὲν ἐλαττοῖς, αὖξεις δὲ τὴν γωνίαν τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην καὶ πλείω ποιεῖς αὐτῶν τὴν ἀπ' ἀλλήλων διάστασιν, εἰ δὲ ἀναγομένης καὶ προσθήκην δεχομένης, ἐλαττοῖς τὴν γωνίαν, ἣν περιλαμβάνουσι. συμπίπτουσι γὰρ ἐπὶ πλεον τῆς κορυφῆς αὐτῶν πορρωτέρω γινομένης τῆς βάσεως. ἀσφαλὲς οὖν λέγειν καὶ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν οὔσαν καὶ τὰς πλευράς ἴσας ὑπερχούσας τὴν ἰσότητα τῆς γωνίας ἀφορίζειν.

[FR271]

Prop. VIII, probl. III. Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν δίχα τεμεῖν.

Τοῖς προβλήμασιν ἀναμίγνυσι τὰ θεωρήματα καὶ τοῖς θεωρήμασι συμπλέκει τὰ προβλήματα καὶ δι' ἀμφοτέρων τὴν ὅλην συμπεραίνει στοιχείωσιν τότε μὲν τὰ ὑποκείμενα ποριζόμενος, τότε δὲ τὰ περὶ αὐτὰ συμπτώματα θεωρῶν. δείξας τοίνυν διὰ τῶν πρόσθεν καὶ περὶ ἓν τρίγωνον τῇ ἰσότητι τῶν πλευρῶν ἐπομένην τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν καὶ ἀνάπαλιν, καὶ περὶ δύο τρίγωνα ὡσαύτως, πλὴν ὅτι τῆς ἀντιστροφῆς ὁ τρόπος διαφέρων ἦν ἐπὶ τε τοῦ ἐνὸς τριγώνου καὶ τοῖν δυοῖν, μέτεισιν ἐπὶ τὰ προβλήματα καὶ ἐπιτάττει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν. καὶ δῆλον ὅτι δέδοται μὲν ἐνταῦθα κατὰ τὸ εἶδος ἡ γωνία. εὐθύγραμμος γὰρ εἴρηται καὶ οὐχ ἡ τυχούσα. τὸ γὰρ πᾶσαν γωνίαν δίχα τεμεῖν οὐκ ἔστιν κατὰ στοιχείωσιν, ὅπου καὶ ἀμφισβυτήσιμον, εἰ καὶ δυνατόν πᾶσαν διχοτομῆσαι γωνίαν. τὴν γὰρ κερατοειδῇ γωνίαν εἰ δυνατόν δίχα διελεῖν ἀπορήσειας ἄν.

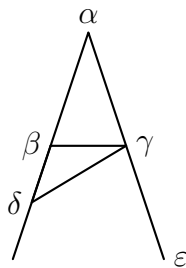
Ἀφώριστά γε μὴν καὶ ὁ λόγος τῆς τομῆς, καὶ τοῦτο πάλιν εἰκότως τὸ γὰρ εἰς τὸν τυχόντα λόγον διελεῖν ἐκβαίνει τὴν παροῦσαν παρασκευήν, οἷον εἰς τρία ἴσα ἢ τέτταρα ἢ πέντε. τὴν μὲν γὰρ ὀρθὴν τρίχα τεμεῖν δυνατόν ὀλίγοις χρησάμενον τῶν ἐξῆς, τὴν δὲ ὀξεῖαν ἀδύνατον μὴ ἐπ' ἄλλας μεταβάντα γραμμάς, αἱ τοῦ μίχτου εἰσιν εἶδους. δηλοῦσι δὲ οἱ πρόθεσιν ποιησάμενοι ταύτην τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τρίχα τεμεῖν. **Νικομήδης** μὲν γὰρ ἐκ τῶν κογχοειδῶν γραμμῶν, ὧν καὶ τὴν γένεσιν καὶ τὴν τάξιν καὶ τὰ συμπτώματα παραδέδωκεν, αὐτὸς εὐρετὴς ὧν τῆς ιδιότητος αὐτῶν, πᾶσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ἐτριχοτόμησεν.

[FR272]

ἕτεροι δὲ ἐκ τῶν Ἰππίου καὶ Νικομήδους τετραγωνιζουσῶν πεποιήκασιν τὸ αὐτό, μικταῖς καὶ οὗτοι χρησάμενοι γραμμαῖς ταῖς τετραγωνιζούσαις. ἄλλοι δὲ ἐκ τῶν Ἀρχιμηδείων ἐλίκων ὀρμηθέντες εἰς τὸν δοθέντα λόγον ἔτεμον τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν· ὦν τὰς ἐπινοίας δυσθεωρήτους οὕσας τοῖς εἰσαγομένοις παραλείπομεν ἐν τῷ παρόντι. μᾶλλον γὰρ ἂν κατὰ καιρὸν ἐξετάσαιμεν ἴσως ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ τοῦ στοιχειωτοῦ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνοντος. καὶ γὰρ ἐκεῖ ὁ αὐτὸς τρόπος τῆς ζητήσεως μὴ δίχα μόνον, ἀλλὰ καὶ τρίχα τεμεῖν, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν αἱ ἐπιβολαὶ τοῖς παλαιοῖς γεγόνασιν τῆς εἰς τρίχα ἴσα πάσης περιφερείας διαιρέσεως. εἰκότως ἄρα καὶ ὁ μεμνημένος [?] εὐθείας καὶ περιφερείας, τὰ δὲ ἐκ τούτων ὑφιστάμενα κατὰ μίξιν εἶδη δυσεξέλικτα ὄντα καὶ δυσαρίθμητα μὴ περιεργαζόμενος πάσας τὰς τοιαύτας ζητήσεις παρήσιν, ὅσαι τῶν μικτῶν προσδέονται γραμμῶν, ἐπὶ τῶν πρωτίστων καὶ ἀπλουστάτων εἰδῶν καὶ τὰ ἐκ τούτων μόνων ἢ πορίζεσθαι δυνάμενα ἢ θεωρεῖσθαι προτιθεῖς εἰς ζήτησιν· ὁμοῖον δὴ καὶ τὸ νῦν προκειμένον ἐστὶ πρόβλημα τὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν δίχα τεμεῖν. χρῆται γὰρ ἐν τούτῳ πρὸς μὲν τὴν κατασκευὴν αἰτήματι ἐνὶ καὶ τῷ πρώτῳ καὶ τρίτῳ θεωρήματι, πρὸς δὲ τὴν ἀπόδειξιν τῷ ὀγδόῳ μόνῳ θεωρήματι. δεῖται γὰρ πάντως ἀποδείξεως καὶ τὰ προβλήματα, ὥς καὶ πρότερον εἵπομεν, καὶ τὸ ἐπιστημονικὸν ἀπὸ ταύτης προσλαμβάνει.

[FR273]

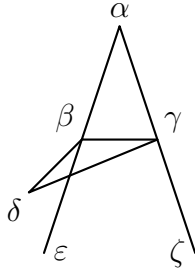
Ἴσως δ' ἂν τινες ἀνσταῖεν τῷ γεωμέτρῃ τὸ συνιστάμενον ἰσόπλευρον ἐπ' αὐτοῦ λέγοντες τὴν κορυθὴν οὐκ ἐντὸς ἔχειν τῶν δύο εὐθειῶν, ἀλλ' ἦτοι ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἢ καὶ ἐκτὸς ἀμφοτέρων, γίνεσθαι δὲ σαφὲς τὸ λεγόμενον διὰ τῶν στοιχείων. ἔστω γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$, ἣν δεῖ διχοτομῆσαι, καὶ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ σημείον τὸ $\overline{\beta}$ καὶ ἴση τῇ $\overline{\beta\alpha}$ ἢ $\overline{\gamma\alpha}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ ἐπὶ ταύτης ἰσοπλευρον τρίγωνον τὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$. τοῦτο δὴ τὸ $\overline{\delta}$ σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ εὐθειῶν



ἢ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἢ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἢ ἐκτὸς ἑκατέρας. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς μεταξὺ ἔλαβεν αὐτό, καὶ διὰ τοῦτο κωλύοντες καὶ τὴν ἀπόδειξιν ἐμποδίζοντές φασιν ἢ ἐπὶ τῆς ἐτέρας αὐτὸ κείσθαι τῶν εὐθειῶν ἢ καὶ ἐκτὸς ἀμφοτέρων. κείσθω τοίνυν ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ τὸ $\overline{\delta}$, ὥστε εἶναι ἰσόπλευρον τὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$. ἴση ἄρα ἡ $\overline{\delta\beta}$ τῇ $\overline{\delta\gamma}$ καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι ἢ ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\delta}$ καὶ ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ μείζων ἄρα ὅλη ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\delta}$ γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ $\overline{\beta\alpha}$ τῇ $\overline{\gamma\alpha}$, ἰσοσκελὲς τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ καὶ ἴσας ἔξει

[FR274]

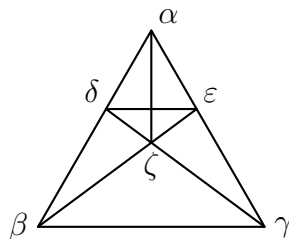
τάς ὑπὸ $\overline{\beta\gamma}$ βάσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\delta}$. ἦν δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδυνατον. οὐκ ἄρα δύναται ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου κορυφή ἐπὶ τῆς εὐθείας εἶναι τῆς $\overline{\alpha\beta\delta}$. ὁμοίως δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma\epsilon}$. κείσθω οὖν ἐκτὸς ἀμφοτέρων, εἰ δυνατόν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\beta\delta}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$, ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$



καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\delta}$. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\epsilon}$. πόλλω ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\zeta}$ τῶς ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\epsilon}$. ἀλλὰ καὶ ἴση, εἰ γὰρ ὑπὸ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ βάσιν τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἰσοσκελοῦς, ὅπερ ἐστὶν ἀδυνατον. οὐκ ἄρα τὸ δ σημεῖον ἔξω κείσεται κατὰ ταῦτα τὰ μέρη τῶν δύο εὐθειῶν. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ κατὰ τὰ ἕτερα. καὶ ὁρᾷς πάλιν ὅτι τὸν ἐλεγχον πεποιήμεθα τῶν ἐνστάσεων προσχρώμενοι τῷ τὰ ἰσοσκελεῖ τρίγωνο τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας ἔχειν. τοῦτο ἐκεῖνο, ὃ καὶ πρότερον ἐλέγομεν ὅτι πολλὰ τῶν τῇ ἐπιστήμῃ μαχομένων σαθρὰ καὶ εὐέλεγκτα διὰ τούτου δείκνυται τοῦ θεωρήματος καὶ ὡς ταύτην ἀποπληροῖ τῷ γεωμέτρῃ τὴν χρείαν.

[FR275]

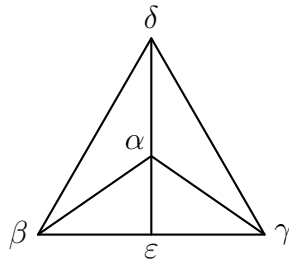
Εἰ δὲ λέγοι τις τόπον μὴ εἰδέναι ὑπὸ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ βάσιν, δέον ἔσται συστήσασθαι τὸ ἰσόπλευρον ἐπὶ τὰ αὐτὰ ταῖς $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$. ἀνάγκη τοίνυν ἢ αὐταῖς ταῖς $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ τὰς συνισταμένας ἐφαρμόζειν, εἴπερ καὶ αὐταὶ ἴσαι τῇ $\overline{\gamma\beta}$, ἢ ἐκτὸς αὐτῶν πίπτειν, εἰ αὐταὶ ἐλάσσους τῆς $\overline{\beta\gamma}$, ἢ ἐντός, εἰ μείζους αἱ $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$. ἐφαρμοζέτωσαν πρῶτον, καὶ ἰσόπλευρον αὐτὸ τὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$, καὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ τὸ δ , καὶ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$ ἴση ἀφηρήσθω ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\overline{\delta\epsilon}$, $\overline{\beta\epsilon}$, $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\alpha\zeta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\alpha\epsilon}$, δύο αἱ $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\epsilon}$ δυσὶν ἴσαι ταῖς



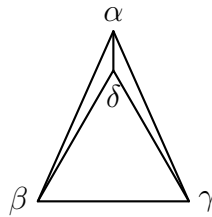
$\overline{\gamma\alpha}$ $\overline{\alpha\delta}$, καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν, ὥστε καὶ πάντα ἴσα πᾶσιν καὶ ἡ ὑπὸ

$\overline{\delta\beta\epsilon}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$, ἴση δὲ καὶ ἡ $\overline{\delta\beta}$ τῇ $\overline{\epsilon\gamma}$ καὶ ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\beta}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\gamma}$, ὑπὸ γὰρ ταύτας αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ διὰ τὸ ἕκτον. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\delta}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\zeta}$ κοινὴ καὶ ἡ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\zeta\epsilon}$ ἴση [?], τέτμηται ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\epsilon}$ γωνία εἰς ἴσα, ὅπεν ἔδει ποιῆσαι. εἰ δὲ ἐκτὸς πίπτοιεν τῶν $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ εὐθειῶν αἱ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευραί, ἔστωσαν αἱ $\overline{\beta\delta}$ $\overline{\delta\gamma}$ καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $\overline{\delta\alpha}$

[FR276]



ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $\overline{\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ $\overline{\beta\delta}$ $\overline{\delta\gamma}$, κοινὴ δὲ ἡ $\overline{\delta\alpha}$, καὶ αἱ $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσαι, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\alpha}$ διὰ τὸ ὅγδοον. πάλιν ἐπεὶ αἱ $\overline{\beta\delta}$ $\overline{\delta\gamma}$ ἴσαι καὶ ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ κοινὴ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ὡς δέδεικται, ἴση καὶ ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\epsilon\gamma}$ βάσει διὰ τὸ τέταρτον. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴση καὶ ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ κοινὴ, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\epsilon}$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. εἰ δὲ ἐντὸς τῶν $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ πίπτοιεν αἱ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευραί, ὡς αἱ $\overline{\beta\delta}$ $\overline{\delta\gamma}$, ἐπεζεύχθω πάλιν ἡ $\overline{\alpha\delta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\overline{\beta\alpha}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ κοινὴ, βάσεις δὲ ἡ $\overline{\beta\delta}$ βάσει τῇ $\overline{\gamma\delta}$



[FR277]

ἴση ἐστίν, καὶ ἡ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\delta}$ ἴση διὰ τὸ ὅγδοον. δίχα ἄρα τέμεται ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ γωνία, ὅπως ἂν συνιστῇται τὸ ἰσόπλευρον.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ταύτας συνεκεφαλαιωσάμεθα, τῶν ἐξῆς ἐχώμεθα θεωρημάτων τοιοῦτον προστιθέντες περὶ τοῦ δεδοσθαι τὴν γωνίαν ὅτι τετραχῶς δύναται δίδοσθαι· καὶ γὰρ θέσει, ὡς ὅταν λέγωμεν πρὸς τῇδε τῇ εὐθείᾳ καὶ τῷδε τῷ σημείῳ κεῖσθαι τὴν γωνίαν καὶ εἶναι δεδομένην αὐτὴν οὕτως — καὶ εἶδει, οἷον ὅταν ὀρθὴν λέγωμεν ἢ ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν ἢ ὅλως εὐθύγραμμον ἢ μικτὴν — καὶ λόγῳ, ὅταν διπλασίαν λέγωμεν τῇσδε καὶ τριπλασίαν ἢ ὅλως μείζονα καὶ

ἐλάσσονα — καὶ μεγέθει, ὥσπερ ὅταν τρίτον ὀρθῆς λέγωμεν. ἡ δὲ νῦν κατὰ τὸ εἶδος δέδοται μόνον.

Prop. X, probl. V. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν πεπερασμένην
δίχα τεμεῖν.

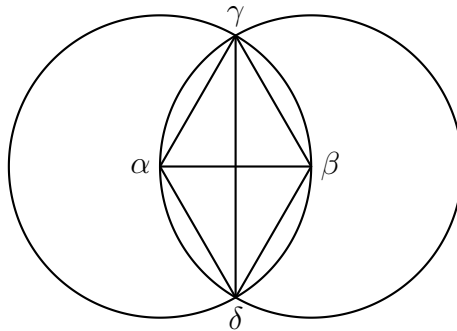
Πρόβλημα καὶ τοῦτο πεπερασμένην μὲν εὐθεΐαν ὑποτιθέμενον, ἐπειδὴ κατ' ἀμφοτέρα ἄπειρον οὐδαμῶς ἐστὶν ὀρίσαι, τῆς δὲ κατὰ θάτερα μόνον ἀπείρου, ὅπουπερ ἂν ληφθῇ σημεῖον, εἰς ἄνισα ἡ τομὴ γίνεται· μείζων γὰρ ἐξ ἀνάγκης ἢ ἐφ' ἧ ἄπειρος τῆς λοιπῆς πεπερασμένης οὕσης. λείπεται οὖν ἐπ' ἄμφω πεπερασμένην λαμβάνειν τὴν δίχα τέμνεσθαι μέλλουσαν. ἴσως δ' ἂν τινες ἐκ τούτου κινούμενοι τοῦ προβλήματος ὑπονοήσειαν ὅτι προείληπται παρὰ τοῖς γεωμέτραις ὡς ὑπόθεσις τὸ μὴ εἶναι τὴν γραμμὴν ἐξ ἡμερῶν. εἰ γὰρ εἴη, ἡ ἐκ περιττῶν ἐστὶν ἡ πεπερασμένη ἢ ἐξ ἀρτίων. ἀλλ' εἰ ἐκ περιττῶν, ἔοικεν καὶ τὸ ἡμερὲς τέμνεσθαι δίχα τῆς εὐθείας τεμνομένης, ἐπεὶ θάτερον αὐτῆς μέρος ἐκ πλειόνων ἡμερῶν ὑπάρχον ἔσται μείζον τοῦ λοιποῦ. οὐκ ἄρα δυνατόν ἔσται τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν δίχα τεμεῖν, εἴπερ ἐξ ἡμερῶν τὸ μέγεθος. εἰ δὲ μὴ ἐξ ἡμερῶν, ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖται. ἔοικεν οὖν, φασίν, ὡμολογῆσθαι τοῦτο καὶ εἶναι ἀρχὴ γεωμετρικὴ τὸ μέγεθος τῶν εἰς ἄπειρον εἶναι διαιρουμένων. ἡμεῖς δὲ γε τὸ τοῦ **Γεμίνου** πρὸς ταῦτα ἐροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν διαιρετὸν εἶναι τὸ συνεχὲς κατὰ κοινὴν ἔννοιαν οἱ γεωμέτραι προλαμβάνουσιν. τοῦτο γὰρ εἶναι φάμεν συνεχὲς τὸ ἐκ μερῶν συνημμένων ὑφεςτώς. πάντως δὲ τοῦτο καὶ διαιρεῖσθαι δυνατόν. ὅτι δὲ καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖται τὸ συνεχὲς οὐ προελήφασιν ἀλλ' ἀποδεικνύουσιν ἐκ τῶν οἰκείων ἀρχῶν. ὅταν γὰρ δεικνύωσιν ὅτι ἔστιν τὸ ἀσύμμετρον ἐν τοῖς μεγέθεσι καὶ οὐ πάντα σύμμετρα ἀλλήλοις, τί ἄλλο δεικνύναι φήσει τις αὐτοὺς ἢ ὅτι πᾶν μέγεθος εἰς αἰεὶ διαιρεῖται καὶ οὐδέποτε ἥξομεν εἰς τὸ ἡμερὲς, ὃ ἐστὶ κοινὸν μέτρον τῶν μεγεθῶν ἐλάχιστον. τοῦτο οὖν ἀποδεικτόν ἐστίν, ἐκεῖνο δὲ ἀξίωμα, ὅτι πᾶν συνεχὲς διαιρετόν, ὥστε καὶ ἡ πεπερασμένη γραμμὴ συνεχῆς διαιρετὴ ἐστίν. καὶ ἀπὸ ταύτης τῆς ἐννοίας ὁ στοιχειωτὴς διχοτομεῖ τὴν πεπερασμένην εὐθεΐαν, ἀλλ' οὐχ ὡς προλαμβάνων ὅτι εἰς ἄπειρον διαιρετὴ ἐστίν. οὐ γὰρ ταύτὸν διαιρετὸν εἶναι τι καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρετόν. ἐλέγχουτο δ' ἂν διὰ τοῦ προβλήματος τούτου καὶ ὁ **Ξενοκράτειος** λόγος ὁ τὰς ἀτόμους εἰσάγων γραμμάς. ὅλως γὰρ εἰ ἔστι γραμμὴ, ἡ εὐθεΐα ἐστὶ καὶ δυνατόν αὐτὴν δίχα τεμεῖν, ἢ περιφερῆς καὶ μείζων ἐστὶν εὐθείας τινός — πᾶσα γὰρ περιφερῆς πάντως ἔχει τινὰ εὐθεΐαν ἐλάσσονα — ἢ μικτὴ καὶ πολλῶ πλεον αὕτη διαιρετὴ ἐστίν, εἴπερ ἐξ ἀπλῶν ἐστὶ διαιρετῶν.

Ἀλλὰ ταῦτα μὲν εἰς ἄλλην ἀναβεβλήσθω θεωρίαν. τέμνει δὲ δίχα τὴν πεπερασμένην εὐθεΐαν ὁ γεωμέτρης εἰς μὲν τὴν κατασκευὴν τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ἐνάτῳ χρώμενος, εἰς δὲ τὴν ἀπόδειξιν τῷ τετάρτῳ μόνῳ. διὰ γὰρ τῶν γωνιῶν δείκνυσιν ἴσας τὰ βάσεις. **Ἀπολλώνιος** δὲ ὁ Περγαῖος τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν πεπερασμένην δίχα τοῦτον τὸν τρόπον. ἔστω, φησίν, ἡ $\overline{αβ}$ εὐθεΐα

[FR278]

[FR279]

πεπερασμένη, ἣν δεῖ δίχα τεμεῖν, καὶ κέντρῳ τῷ $\bar{\alpha}$, διαστήματι δὲ τῷ $\bar{\alpha\beta}$ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ $\bar{\beta}$, διαστήματι δὲ τῷ $\bar{\beta\alpha}$ ἕτερος κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς τῶν κύκλων ἡ $\bar{\gamma\delta}$. αὕτη δίχα τέμνει τὴν $\bar{\alpha\beta}$ εὐθεΐαν. ἐπεχεύχθωσαν γὰρ αἱ $\bar{\gamma\alpha}$ $\bar{\gamma\beta}$ — ἑκατέρα γὰρ ἴση τῇ $\bar{\alpha\beta}$, κοινὴ δὲ



[FR280]

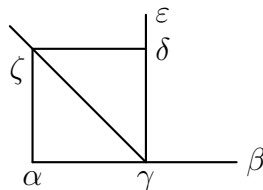
ἡ $\bar{\gamma\delta}$, καὶ ἡ $\bar{\delta\alpha}$ τῇ $\bar{\delta\beta}$ ἴση διὰ τὰ αὐτά· ἡ ἄρα ὑπὸ $\bar{\alpha\gamma\delta}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\bar{\beta\gamma\delta}$, ὥστε δίχα τέτμηται ὁ $\bar{\alpha\beta}$ διὰ τὸ τέταρτον. τοιαύτη τίς ἐστὶν καὶ ἡ κατὰ **Ἀπολλώνιον** τοῦ προκειμένου προβλήματος ἀπόδειξις, ἀπὸ μὲν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ αὕτη ληφθεῖσα, ἀντὶ δὲ τοῦ λαβεῖν δίχα τεμνομένην τὴν πρὸς τῷ γ γωνίαν δεικνύουσα ὅτι δίχα τέτμηται διὰ τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων. πολλῶν δὲ οὖν κρείττων ἡ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις καὶ ἀπλουστέρα καὶ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν.

Prop. XI, probl. VI. Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπο τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἴτε πεπερασμένην κατ' ἀμφοτέρας τὴν εὐθεΐαν λάβοιμεν, εἴτε κατ' ἀμφοτέρας ἄπειρον, εἴτε ὠδὶ μὲν ἄπειρον, ὠδὶ δὲ πεπερασμένην καὶ τὸ σημεῖον ἐπ' αὐτῆς, τοῦ γεωμέτρου προχωρεῖ ἡ κατασκευὴ τοῦ προκειμένου προβλήματος. καὶ γὰρ ἐπ' ἄκρας τῆς εὐθείας ἢ τὸ δοθὲν σημεῖον, προσεκβάλλοντες τὴν εὐθεΐαν τὰ αὐτὰ ποιήσομεν. δῆλον δὲ ὅτι τὸ μὲν σημεῖον ἐνταῦθα τῇ θέσει δέδοται ἐπὶ τῆς εὐθείας κείμενον μοναχῶς κατὰ τὴν θέσιν, ἡ δὲ εὐθεΐα κατὰ τὸ εἶδος δέδοται· μέγεθος γὰρ αὐτῆς ἢ λόγος ἢ θέσις οὐκ ἀφώρισται. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτῆς τῷ πρώτῳ χρησάμενος θεωρήματι καὶ τῷ τρίτῳ καὶ ἐνὶ τῶν αἰτημάτων καὶ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ὁψδόμῳ πρὸς τούτοις θεωρήματι καὶ τῷ ὅρῳ τῆς πρὸς ὀρθὰς δείκνυσι τὸ προκείμενον. εἰ δέ τινες τὸ σημεῖον ἐπ' ἄκρας τῆς εὐθείας τιθέντες ἀξιοῖεν μὴ προσεκβάλλοντας ἡμᾶς ἄγειν ἀπὸ τούτου τὴν πρὸς ὀρθὰς, δυνατόν καὶ τοῦτο δείξομεν. ἔστω γὰρ $\bar{\alpha\beta}$ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον $\bar{\alpha}$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $\bar{\alpha\beta}$ τυχὸν τὸ $\bar{\gamma}$ σημεῖον καὶ ἀπὸ τούτου τῇ $\bar{\alpha\beta}$ πρὸς ὀρθὰς, ὡς ἐν τῷ στοιχείῳ

[FR281]

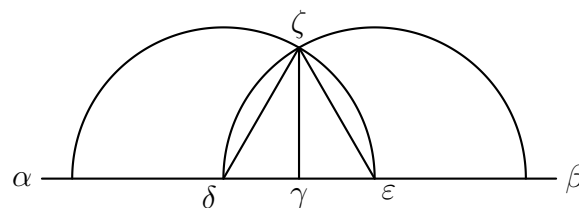
μεμαυθήκαμεν ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$. καὶ ἴση ἀπὸ τῆς $\overline{\gamma\epsilon}$ ἀφηρήσθω τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἡ $\overline{\delta\gamma}$ καὶ τετμήσθω
 διχα ἡ πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ γωνία ὑπὸ τῆς $\overline{\gamma\zeta}$ καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\delta}$ τῇ $\overline{\epsilon\gamma}$ πρὸς ἀρθὰς ἀχθεῖσα
 συμπιπτέτω [ἡ $\overline{\delta\zeta}$] τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ κατὰ τὸ $\overline{\zeta}$, καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\zeta}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\alpha}$ ἐπεζεύχθω ἡ
 $\overline{\zeta\alpha}$. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ γωνία. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\overline{\delta\gamma}$ τῇ $\overline{\gamma\alpha}$ ἴση,



κοινή δὲ ἡ $\overline{\gamma\zeta}$ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν — δίχα γὰρ τέτμηται ἡ πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ γωνία —, καὶ ἡ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\zeta\alpha}$ ἴση, καὶ πάντα ὁμοίως πᾶσιν διὰ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ τῇ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$. δέδεικται μὲν οὖν τὸ προβληθέν· ὁ δὲ στοιχειωτὴς οὐδὲν δεῖται τῆς ἐπιστοίας ταύτης. ἐπέταξεν γὰρ πρὸς ὀρθὰς γωνίας ἀγαγεῖν γραμμὴν, ἀλλ' οὐ πρὸς μίαν ὀρθήν· δεῖ οὖν μὴ ἐπ' ἄκρας τῆς εὐθείας λαμβάνειν τὸ σημεῖον, ἵνα ἡ ἀγομένη εὐθεῖα γωνίας ποιῇ πρὸς τὴν ὑποκειμένην εὐθεΐαν, ἀλλὰ μὴ μίαν γωνίαν.

[FR282]

Ἀπολλώνιος δὲ τὴν πρὸς ὀρθὰς ἄγει τὸν τρόπον τοῦτον. ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ τυχὸν τὸ $\overline{\delta}$, καὶ ἀπὸ τῆς $\overline{\gamma\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\gamma\delta}$ ἢ $\overline{\gamma\epsilon}$, καὶ κέντρῳ τῷ $\overline{\delta}$, τῷ δὲ $\overline{\epsilon\delta}$ διαστήματι γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ $\overline{\epsilon}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\delta\epsilon}$ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\zeta}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\gamma}$ ἤχθῳ [ἢ $\overline{\zeta\gamma}$], λέγω ὅτι αὕτη ἐστὶν ἡ πρὸς ὀρθὰς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ $\overline{\zeta\delta}$ $\overline{\zeta\epsilon}$, ἴσαι ἔσσονται· ἴσαι δὲ καὶ αἱ



$\overline{\delta\gamma} \quad \overline{\gamma\epsilon}$ καὶ κοινὴ ἢ $\overline{\zeta\gamma}$, ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ γωνίαι ἴσαι διὰ τὸ ὀγδοόν.
ὁρθαὶ ἄρα εἰσίν.

Πάλιν οὖν ὁρᾷς ὅτι ποικιλωτέρα ἢ ἀποδείξεις αὕτη τῆς παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ἢ καὶ προσδεηθεῖσα τῆς τῶν κύκλων γραφῆς, ἐξδὸν αὐτόθεν ἐπὶ τῆς $\overline{\delta\epsilon}$ γράφαι τὸ ἰσοπλευρον τρίγωνον καὶ δεῖξαι τὸ προκείμενον. πάντα γὰρ τὰ ἄλλα κοινὰ ταῖς ἀποδείξεσιν ἐστίν. τὴν δὲ διὰ τοῦ ἡμικυκλίου δεῖξιν οὐδὲ λέγειν ἄξιον. πολλὰ γὰρ προλαμβάνει τῶν ὕστερον καὶ τῆς ἐν τῇ στοιχειώσει τάξεως ἀποπίπτει παντελῶς.

[FR283]

Prop. XII, probl. VII. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Τοῦτο τὸ πρόβλημα πρῶτον **Οἰνοπίδης** ἐζήτησεν χρήσιμον αὐτὸ πρὸς ἀστρολογίαν οἰόμενος. ὀνομάζει δὲ τὴν κάθετον ἀρχαίκῳ κατὰ γνώμονα, διότι καὶ ὁ γνώμων πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ὀρίζοντι. τῆς δὲ πρὸς ὀρθὰς ἡ κάθετός ἐστὶν αὕτη διαφέρουσα τῇ σχέσει μόνον, κατὰ τὸ ὑποκείμενον ἀδιάφορος οὔσα, ὥσπερ φασὶ καὶ ἡ κάθετος. διττὴ δ' αὖ κάθετός ἐστὶν, ἡ μὲν ἐπίπεδος, ἡ δὲ στερεά. καὶ ὅταν μὲν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ᾗ τὸ σημεῖον, ἐφ' οὗ ἡ κάθετος, καὶ ἡ εὐθεῖα, ἐπίπεδος λέγεται κάθετος, ὅταν δὲ μετέωρον τὸ σημεῖον καὶ ἔξω τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, στερεά. καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος πρὸς εὐθεῖαν ἄγεται, ἡ δὲ στερεὰ πρὸς ἐπίπεδον. διὸ καὶ ἀναγκαῖον ἐκείνην οὐ πρὸς μίαν εὐθεῖαν ποιεῖν γωνίας ὀρθὰς, ἀλλὰ πρὸς πάσας τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. πρὸς γὰρ τὸ ἐπίπεδον ᾗν ἡγμένη κάθετος. ἐν τούτῳ τοίνυν ἡ στοιχειωτὴς τῷ προβλήματι κάθετον ἄγειν ἐπίπεδον προτίθεται πρὸς τε γὰρ εὐθεῖαν ἡ ἀγωγή προτίθεται καὶ ὥς ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ πάντων ὑποκειμένων ὁ λόγος πρόεισιν.

[FR284]

Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς πρὸς ὀρθὰς, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ἐπ' αὐτῆς εἴληπτο τῆς εὐθείας, οὐδὲν ἐδεόμεθα τῆς ἀπειρίας, ἐπὶ δὲ τῆς καθέτου τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον ὑποτίθεται, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον, ἐφ' οὗ κάθετος ἀχθήσεται ἔχω που κεῖται τῆς εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ ᾗν ἄπειρος, ἐξῆν οὕτω τὸ σημεῖον λαβεῖν, ὥστε ἔξω μὴ εἶναι τῆς δοθείσης, ἐπ' εὐθείας δὲ ταύτῃ κείμενον ὡς ἐκβαλλομένην τὴν εὐθεῖαν ἐπ' αὐτὸ πίπτειν, καὶ οὐ προεχώρει τὸ πρόβλημα. διὸ ἄπειρον ἔθετο τὴν εὐθεῖαν, ἐὰν ἐφ' ἐκάτερα αὐτῆς μόνως λαμβάνηται τὸ σημεῖον, μηδαμοῦ χώρας ὑπολειπομένης αὐτῷ, καθ' ἣν ἐπ' εὐθείας ἔσται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, εἰ μὴ μέλλοι πρὸς αὐτῇ κείσεσθαι καὶ οὐκ ἔξω αὐτῆς.

Ἄπειρος μὲν οὖν ἡ εὐθεῖα δέδοται διὰ τοῦτο, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος ἀχθήσεται· πῶς δὲ ὅλως ὑπόστασιν ἔχει τὸ ἄπειρον, ἄξιον θεωρῆσαι. δῆλον γὰρ ὅτι εὐθείας ἀπείρου οὔσης ἔσται καὶ ἐπίπεδον ἄπειρον, καὶ ταῦτα κατ' ἐνέργειαν, εἴπερ ἔσται τὸ προβληθέν. ὅτι μὲν οὖν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς οὐδὲν ἐστὶ μέγεθος ἄπειρον κατ' οὐδεμίαν διάστασιν, ἱκανῶς ὃ τε δαιμόνιος **Ἀριστοτέλης** καὶ οἱ ἀπ' αὐτοῦ παραδεξάμενοι τὴν φιλοσοφίαν δεικνύουσιν. οὔτε γὰρ τὸ κύκλῳ κινούμενον ἄπειρον εἶναι ἐνδέχεται οὔτε ἄλλων σωμάτων τῶν ἀπλῶν οὐδέν. ἔστι γὰρ ἐκάστου τόπος ὠρισμένος. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ἐν τοῖς χωριστοῖς καὶ ἀμερέσι λόγοις εἶναι τὸ τοιοῦτον ἄπειρον δυνατόν. εἰ γὰρ μὴδὲ διάστασίς ἐστὶν ἐν ἐκείνοις μήτε μέγεθος σχολή, εἰ ἄπειρον εἴη μέγεθος. λείπεται δὴ οὖν ἐν τῇ φαντασίᾳ τὸ ἄπειρον ὑφίστασθαι μόνον οὐ νοούσης τὸ ἄπειρον τῆς φαντασίας. ἅμα γὰρ νοεῖ καὶ μορφήν ἐπάγει τῷ νοουμένῳ καὶ πέρας, καὶ τῇ νοήσει τὴν τοῦ φαντάσματος ἴσῃσι διέξοδον, καὶ διέξεισιν αὐτὸ καὶ περιλαμβάνει. οὐ νοούσης τοίνυν ἐστὶν τὸ ἄπειρον ἀλλ' ἀορισταινούσης περὶ τὸ νοούμενον καὶ μὴ νοούσης μᾶλλον καί, ὅσον ἀκαταμέτρητον ἀφίησι καὶ ἀπερίληπτον νοήσει, τοῦτο ἄπειρον λεγούσης.

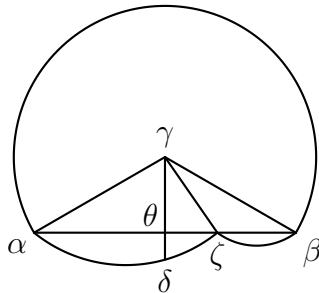
[FR285]

ὥσπερ γὰρ τὸ σκότος τῷ μὴ ὄρῳ ἢ ὄψις γινώσκει, οὕτως ἡ φαντασία τὸ ἄπειρον τῷ μὴ νοεῖν. γεννᾷ μὲν οὖν αὐτὸ τῷ δύναιμι ἔχειν ἀμερῇ προϊέναι δυναμένην ἀκαταλήκτως, νοεῖ δὲ ὡς ὑποστὰν ὅτι μὴ νοεῖ τὸ ἄπειρον. ὁ γὰρ ἀφῆκεν ὡς ἀδιεξίτητον, τοῦτο ἄπειρον λέγει, ὥστε τὴν ἄπειρον γραμμὴν τὴν δοθεῖσαν ἐν τῇ φαντασίᾳ θέμενοι, καθάπερ δὴ καὶ τὰ ἄλλα πάντα γεωμετρίας εἶδη, τὰ τρίγωνα, τοὺς κύκλους, τὰς γωνίας, τὰς γραμμάς, οὐ θαυμασόμεθα, πῶς κατ' ἐνέργειαν ἄπειρός ἐστι γραμμὴ καὶ προστίθῃσιν ἀορισταίνουσα ταῖς ὠρισμέναις νοήσεσιν. ἡ δὲ διάνοια, παρ' ἧς οἱ λόγοι καὶ αἱ ἀποδείξεις, οὐ πρὸς τὴν ἐπιστήμην χρῆται τῷ ἀπείρῳ — τὸ γὰρ ἄπειρον ὅλως ἐπιστήμη περιληπτὸν οὐκ ἔστιν — ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως παραλαβοῦσα τῷ πεπερασμένῳ μόνῳ χρῆται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν, καὶ οὐ τοῦ ἀπείρου ἕνεκα τὸ ἄπειρον ἀλλὰ τοῦ πεπερασμένου λαμβάνει, ἐπεὶ εἴ γε δοίης αὐτῇ, μήτε ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι τῇ πεπερασμένῃ τὸ δοθὲν σημεῖον, μήτε οὕτως ἀφεστάναι τῆς εὐθείας, ὥστε μηδὲν μέρος αὐτῆς ὑποκεῖσθαι τῷ σημείῳ, οὐδὲν ἔτι τοῦ ἀπείρου δεήσεται. ἔν' οὖν τῇ πεπερασμένῃ χρωμένῃ [DRW—iota subscript missing?] ἀναλέγκτως χρήσεται καὶ ἀναμφισβητήτως, εἶναι τὸ ἄπειρον ὑποτίθεται τῇ τῆς φαντασίας ἀοριστίᾳ τῆς τοῦ ἀπείρου γενέσεως ὑποβάθρᾳ χρωμένῃ.

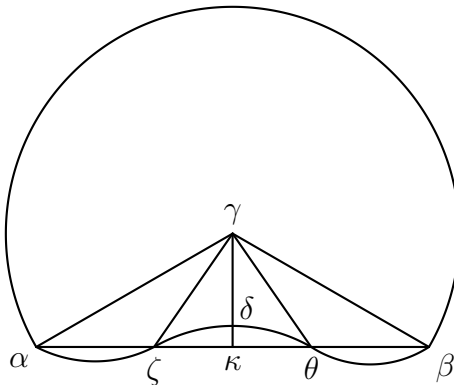
[FR286]

Περὶ μὲν οὖν τῆς ὑποθέσεως τοῦ ἀπείρου τοσαῦτα πρὸς τὸ παρὸν ἀρκέσει. μετὰ δὲ ταῦτα χωρῶμεν ἐπὶ τὰς ἐνστάσεις τὰς πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦδε τοῦ προβλήματος. εἰλήφθω γάρ, φασίν, εὐθείας οὔσης ἀπείρου τῆς $\overline{\alpha\beta}$ καὶ σημείου δοθέντος, ἀφ' οὗ δεῖ τὴν κάθετον ἀγαγεῖν, τοῦ $\overline{\gamma}$ ἐπὶ θάτερα σημεῖον τὸ $\overline{\delta}$ καθά φησιν ὁ γεωμέτρης, ἀλλ' ὁ κύκλος ὁ τέμνων τὴν $\overline{\alpha\beta}$ εὐθεῖαν κατὰ τε τὸ $\overline{\alpha}$ καὶ τὸ $\overline{\beta}$ καὶ τὸ $\overline{\zeta}$ θέσιν ἐχέτω τὴν ὑπογεγραμμένην. πρὸς δὲ τοῦτον τὸν λόγον ἐροῦμεν ὅτι ἀδύνατα λέγει. τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ κατὰ τὸ $\overline{\theta}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\gamma\theta}$ καὶ ἐκβεβλήσθω μέχρι τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\gamma\alpha}$ $\overline{\gamma\beta}$. ἐπεὶ οὖν αὗται ἐκ κέντρου, καὶ ἡ $\overline{\alpha\theta}$ τῇ $\overline{\theta\beta}$ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ $\overline{\gamma\theta}$,

[FR287]

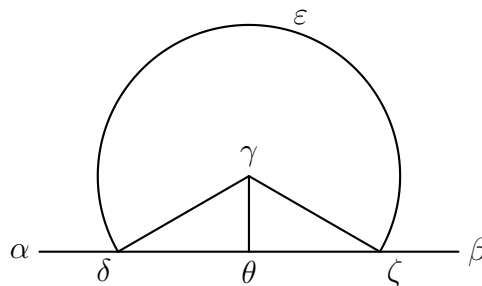


πάντα ἴσα παῖσιν. ὀρθὰς ἄρα ποιεῖ πρὸς τῷ $\overline{\theta}$ γωνίας ἡ $\overline{\gamma\theta}$. πάλιν ἐπεὶ ἡ $\overline{\gamma\alpha}$ $\overline{\gamma\beta}$ ἴσαι, γωνίας ἴσας ποιούσι πρὸς τοῖς $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ σημείοις. ἀλλὰ ἡ $\overline{\gamma\alpha}$ τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\zeta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\alpha}$, καὶ ἡ $\overline{\gamma\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ ἴση, ὥστε καὶ ἡ



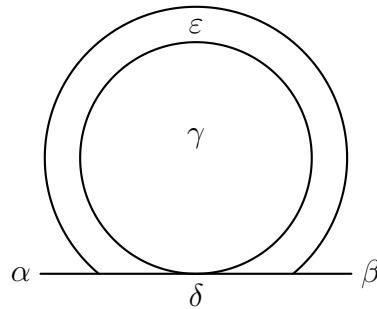
ἐνστάσις, ἀλλ' ἡ μὲν τὸ αὐτὸ δείκνυσιν ἄλλως, ἡ δὲ εἰς ἀτοπίαν ἐπάγει τὸ ἐνιστάμενον. οἱ δὲ ἐξηγηταὶ μὴ διακρίνοντες ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων, πάντα φέρουσιν εἰς ταῦτ' καὶ εἰσιν ἄδελφοι, πότερον πτώσεις ἡμῖν ἢ ἐνστάσεις ἐπαγγέλλονται γράφειν. ἡμεῖς οὖν διελόμενοι χωρὶς μετὰ τὰς ἐνστάσεις τὰς πτώσεις συνάγομεν. ἔστω οὖν εὐθεῖα ἀπειρος ἡ $\alpha\beta$, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ γ . λέγει οὖν τις ὅτι οὐκ ἔστιν τόπος ἐπὶ θάτερα τῆς εὐθείας, ἀλλ' ἐφ' ἧς κεῖται τὸ γ . λαβόντες οὖν ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖον τὸ δ κέντρῳ τῷ γ καὶ διαστήματι τῷ $\gamma\delta$ κύκλου περιφέρειαν γράφομεν τὴν $\delta\epsilon\zeta$ καὶ τεμόντες δίχα κατὰ τὸ θ τὴν $\delta\zeta$ ἐπιζεύζομεν τὰς $\gamma\delta$ $\gamma\theta$ $\gamma\zeta$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\delta\theta$ τῇ $\theta\zeta$, κοινὴ δὲ ἡ $\gamma\theta$

[FR290]



καὶ ἡ $\gamma\delta$ τῇ $\gamma\zeta$ ἴση — ἐκ κέντρου γὰρ —, αἱ πρὸς τῷ θ ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἐφεξῆς, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν· κάθετος ἄρα ἡ $\gamma\delta$ ἐπὶ τὴν $\delta\zeta$. καὶ μὴν καὶ εἴ τις λέγοι τὸν γραφόμενον κύκλον μὴ τέμνειν τὴν $\alpha\beta$ εὐθεῖαν, ἀλλ' ἐφάπτεσθαι ὡς τὸν $\delta\epsilon$, λαβόντες ἐξωτέρῳ σημεῖον τὸ ϵ κέντρῳ τῷ γ χρώμενοι καὶ διαστήματι τῷ $\gamma\epsilon$ ὥσπερ ἐπὶ τοῦ λεχθέντος ἔξομεν τὸ ζητούμενον.

Τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν τοῦ προβλήματος πτώσεων εἰρήσθω γυμνασίας ἕνεκα τῶν ἐντυγχανόντων· εἰ δὲ δεῖ καὶ θεωρίαν προσθεῖναι τοῖς δύο τούτοις προβλήμασιν, ὅμοιον ἢ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀναγομένη μιμεῖσθαι ζωὴν αἰρομένην εἰς ὕψος ἀπὸ τῶν κοιλοτέρων καὶ ἀχράντως ἀνιούσαν καὶ μένουσαν ἀκλιτον πρὸς τὰ



χείρονα, ἡ δὲ κάθετος ζωῆς μὲν εἰκὼν εἶναι κατιούσης τὴν κάθετον καὶ τῆς κατὰ γένεσιν ἀοριστίας οὐκ ἀναπιμπλαμένης. ἡ γὰρ ὀρθὴ γωνία τῆς ἀκλινοῦς ἐστὶ καὶ τῇ ἰσότητι καὶ τῷ ὄρω καὶ τῷ πέρατι συνεχομένης ἐνεργείας σύμβολον, ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος τὸν θατέρου κύκλον τὸν τοὺς λόγους ἔχοντα τῶν αἰσθητῶν ἐπὶ τῆς θείας ψυχῆς ὀρθὸν προσείρηκεν. ἐπὶ γὰρ τῶν ἡμετέρων κλᾶται παντοίας κλάσεις καὶ διαστροφὰς ὑπομένει ποικίλας ἀπὸ τῆς γενέσεως, ἐπὶ δὲ τῶν ὅλων ἄχραντος καὶ ἀρρεπῆς ἵδρυται πρὸ τῶν αἰσθητῶν. εἰ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπειρος σύμβολόν ἐστιν τῆς γενέσεως ὅλης τᾶ ἀπείρους καὶ ἀορίστως κινουμένης καὶ αὐτῆς τῆς ὕλης τῆς μηδὲν ὅρον μηδὲ μορφὴν λαχούσης, τὸ δὲ ἔξω κείμενον σημεῖον τῆς ἀμεροῦς οὐσίας καὶ τῶν ἐνύλων ἐξηρημαμένης εἰκόνα φέροι, πάντως που καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπομιμοῖτο ἂν τὴν ἐκ τοῦ ἐνὸς καὶ ἀμερίστου προῖοῦσαν ζωὴν ἀχράντως εἰς τὴν γένεσιν. εἰ δὲ καὶ οὐκ ἄλλως δείκνυται οὕσα ἡ κάθετος ἢ ἀπὸ τῶν κύκλων, ἔχει ἂν ἐνδειξιν καὶ τοῦτο τῆς διὰ τὸν νοῦν ταῖς ζωαῖς ὑπαρχούσης ἀππεψίας. αὕτη μὲν οὖν καθ' ἑαυτὴν ἡ ζωὴ ἄτε κίνησις οὕσα ἀόριστός ἐστιν, ὀρίζεται δὲ καὶ ἀχράντου πληροῦται δυνάμεως νοῦ μετασχοῦσα καὶ νῶ συμπροῖοῦσα.

[FR291]

Prop. XIII, theor. VI. Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἥτοι δύο ὀρθὰς ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Πάλιν ἐπὶ τὰ θεωρήματα μεταβέβηκεν ἐπόμενος τοῖς διὰ τῶν προβλημάτων δεδειγμένοις. ἐπεὶ γὰρ ἤχεται κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν καὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπόμενον ἦν ζητῆσαι, εἰ μὴ κάθετος εἴη, τίνας ποιήσῃ γωνίας καὶ πῶς ἐχούσας πρὸς τῇ εὐθείᾳ ἢ ἐπ' αὐτῆς σταθεῖσα. τοῦτο τοίνυν καθόλου δείκνυσιν, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας τινὸς σταθεῖσα καὶ ποιοῦσα γωνίας ἢ δύο ποιεῖ ὀρθάς, εἰ ἀναρέγκλιτος αὐτῆς ἢ στάσις εἴη καὶ ἀρρεπῆς ἐφ' ἑκάτερα, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας, εἰ τῇ μὲν ἐπικλίνοιτο, τῇ δὲ πλέον ἀφεστήκοι τῆς ὑποκειμένης εὐθείας. ὅσον γὰρ ἀφαιρεῖ τῆς μιᾶς ὀρθῆς κατὰ τὴν ἐπὶ θάτερα κλίσιν, τοσοῦτον προστίθῃσι τῇ λοιπῇ κατὰ τὴν ἀπόστασιν.

[FR292]

Δεῖ δὲ ἐφιστάνειν, ὅπως καὶ ταύτῃ τῇ προτάσει τῆς ἀκριβείας ὁ γεωμέτρης ἐφρόντισεν. οὐ γὰρ ἀπλῶς εἶπεν ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταῖσα ἢ δύο ὀρθὰς

ποιεῖ ἢ πᾶσα εὐθεΐα ἐπ' εὐθεΐας στᾶσα ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας, ἀλλὰ ἐὰν γωνίας ποιῇ. τί γάρ, εἰ ἐπ' ἄκρας ἰσταμένη τῆς εὐθεΐας μίαν ποιεῖ γωνίαν, ἐνδέχεται ταύτην ἴσην εἶναι δύο ὀρθαῖς; ἀδύνατον δὴπου. πᾶσα γὰρ εὐθύγραμμος γωνία δύο ὀρθῶν ἐλάσσων ἐστίν, ὥσπερ πᾶσα στερεὰ τεττάρων ὀρθῶν ἐλάσσων. καὶ τὴν ἀμβλυτάτην οὖν δοκοῦσαν εἶναι λαμβάνης, αὐξήσεις καὶ ταύτην ὡς οὕτω τὸ μέτρον ἀπολαβοῦσαν τῶν δύο ὀρθῶν. δεῖ τούνυν οὕτως ἐπιστάναι τὴν εὐθεΐαν, ὥστε γωνίας ποιεῖν.

Τοῦτο μὲν οὖν, ὅπερ ἔφην, τῆς ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας. τί δὲ βουλόμενος προσέθηκεν τὸ ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖν ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας; καὶ γάρ, ὅταν ποιῇ δύο ὀρθὰς, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. ἐαυταῖς γὰρ ἴσαι αἱ ὀρθαί. ἢ τὸ μὲν ἐστὶ κοινὸν καὶ τῶν ἴσων (?) γωνιῶν, τὸ δὲ ἴδιον τῶν ἴσων μόνων; εἰώθαμεν δέ, ὅταν μὲν καὶ τὸ ἴδιον ἀληθεύῃ, καὶ τὸ κοινὸν ἀπὸ τοῦ ἰδίου σημαίνειν ἕκαστον, ὅταν δὲ ἐκείνου μὴ τυγχάνωμεν, ἀρκεῖσθαι τῷ κοινῷ πρὸς τὴν δῆλωσιν τῶν ὑποκειμένων προγμάτων. τὸ μὲν οὖν ἴσας ὀρθαῖς εἶναι τὰς ἐφεξῆς κοινόν ἐστὶ καὶ τῶν ὀρθῶν, ἀλλ' οὐ μόνων αὐτῶν κατηγορεῖται, τὸ δὲ ὀρθὰς εἶναι τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἐξαίρετον ὑπάρχει. μόνον δὲ οὖν ῥηθὲν τὸ ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς τὰς ἀνίσους σημαίνει· ταύταις γὰρ ἐπαληθεύεται μόνον, ταῖς δὲ ἴσαις οὐ. καὶ τοῦτο καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἀντιδιαρεῖται ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς. αὐτὸ γὰρ καθ' ἐαυτὸ τοῦτο λεγόμενον τῶν ἐφ' ἑκάτερα ἀνίσων ἐστὶν σημαντικόν. ἔξεστί γε μὲν καὶ διὰ τούτων συνορᾶν, ὅπως ἡ ἰσότης καὶ τῆς ἀνισότητός ἐστὶ μέτρον καὶ ὅρος. εἰ γὰρ καὶ ἀόριστός ἐστὶ καὶ ἄπειρος ἡ τῆς ἀμβλείας γωνίας καὶ τῆς ὀξείας μείωσίς τε καὶ αὐξήσις, ὅμως περαίνεσθαι καὶ ἀφορίζεσθαι λέγεται παρὰ τῆς ὀρθῆς. καὶ ἑκάτερα μὲν χωρὶς ἀφίσταται (?) καὶ ἀφίσταται τῆς πρὸς ἐκείνην ὁμοιότητος, ἀμφοτέραι δὲ κατὰ μίαν ἔνωσιν ἐπανάγονται πρὸς τὸν ὅρον τὸν ἐκείνης. ἐπειδὴ δὲ πρὸς τὴν ἀπλότητα τῆς ὀρθῆς ἀδυνατοῦσιν ἐξισοῦσθαι, διπλασιαζομένης αὐτῆς τὴν ἰσότητα καταδέχονται. παράδειγμα τῆς ἀπειρίας αὐτῶν ἡ δυὰς ἀόριστος οὕσα καθ' αὐτήν. καὶ τοῦτο ἐναργῆ φέρειν ἔοικεν εἰκόνα τῆς τῶν πρωτουργῶν αἰτίων καὶ καθ' ἓνα ὅρον ἐστώτων ἀεὶ ὡσαύτως περὶ τὴν ἀπειρίαν τῆς γενέσεως προόδου. πῶς γὰρ ἄλλως ἢ γένεσις ἢ τοῦ μᾶλλον μετέχουσα καὶ ἥττον καὶ ἀορίστως φερομένη συναρμόζεται τοῖς νοητοῖς καὶ συνεξισοῦταί πως αὐτοῖς διὰ τῆς μεθέξεως ἢ ταῖς γονίμοις δυνάμεσιν ἐκείνων προϊόντων καὶ ἐαυτὰ πολλαπλασιαζόντων μόνον; τὰ γὰρ ἐν τῇ ἐαυτῶν ἀπλότητι καὶ ἀμερείᾳ παντελῶς ἐξήρηται τῶν γεννητῶν.

Τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος εἰς τὴν τῶν ὅλων γνῶσιν παραληπτέον.

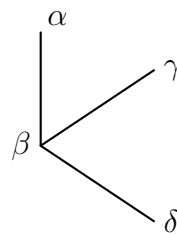
Prop. XIII, theor. VII. Ἐὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεΐαι ἐξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεΐαι.

Τοῦτο τὸ θεώρημα τοῦ ἀποδειχθέντος ἐστὶν ἀντίστροφον. ἔπεται γὰρ αἰεὶ τὰ ἀντίστροφα τοῖς προηγουμένοις θεωρήμασιν. ἐκείνου τοίνυν συστήσαντος εὐθείαν ἐπ' εὐθείας καὶ δείξαντος ὅτι τὰς ἐφεξῆς ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας, τοῦτο λαμβάνει μὲν πρὸς εὐθείᾳ τινὶ δύο γιγνομένας ὀρθὰς, δείκνυσι δὲ ὅτι μία ἐστὶν εὐθεῖα ἢ ταῦτα ποιοῦσα πρὸς τῇ εἰρημένῃ εὐθείᾳ. τὸ τοίνυν ἐν ἐκείνῳ δεδομένον ἐν τούτῳ ζητεῖται καὶ δείκνυται διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. οὕτω γὰρ φιλεῖ τὰ ἀντίστροφα δείκνυσθαι τῶν θεωρημάτων. ἐν δὲ γε τοῖς προβλήμασι καὶ προηγουμένας ἐπιδέχεται κατασκευάς.

[FR295]

Ἐξεστί δὲ καὶ τούτῳ τὴν ἀκροτάτην ἀκρίβειαν καὶ ἀνυπερβλήτον τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρμηνείας ὁρᾶν. πρῶτον μὲν γὰρ εἰπὼν Ἐὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ προστίθῃσιν καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ. τί γάρ, εἰ δύο περάτων ὄντων τῆς εὐθείας ἢ μὲν ἀπὸ τοῦ ἐτέρου ἤχθη, ἢ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, καὶ δύο ἐποιοῦν ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ εὐθείᾳ γωνίας; ἄρα διὰ τοῦτο ἐπ' εὐθείας εἶναι ἠδύναντο; καὶ πῶς αἱ ἀπὸ διαφορῶν τῆς αὐτῆς εὐθείας ἠγμένα σημείων; διὰ δὲ τοῦτο προσέθηκεν τὸ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ ἀμφοτέρας πρὸς ἐνὶ σημείῳ κεῖσθαι βουλόμενος. δεύτερον δέ, ἐπειδὴ καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ τῆς εὐθείας εἶναι σημείῳ τὰς ἀγομένας δυνατόν ἦν καὶ μὴ εἶναι ἐφεξῆς — μυρίας γὰρ εὐθείας πρὸς ἐνὶ σημείῳ λαβεῖν ἐνδέχεται — προσέθηκεν τὸ δύο εὐθεῖαι ἐξῆς. τρίτον δέ, ἐπεὶ τὸ ἐξῆς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐφ' ἐκάτερα θεωρεῖται, τὰς δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κειμένας ἐξῆς ἐπ' εὐθείας ἀλλήλαις ἀδύνατον εἶναι, τοῦτο μὲν ἀπέφησεν, παρέσχεν δὲ ἡμῖν ἐννοεῖν ὅτι ἐφ' ἐκάτερα ληπτέον τῇ θέσει τὰς ἐφεξῆς. αὗται γὰρ δυνήσονται καὶ ἐπ' εὐθείας δείκνυσθαι. ἔστωσαν πρὸς τῇ $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αἱ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\beta\delta}$. αὗται τοίνυν ἐξῆς μὲν εἰσιν ἀλλήλαις· ἄλλη γὰρ αὐτῶν οὐκ

[FR296]

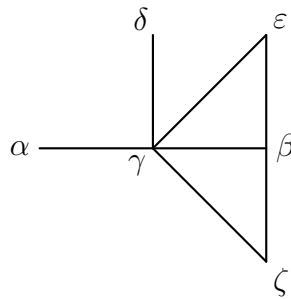


ἐστὶν εὐθεῖα μεταξύ. ταῦτα δὲ ἦν ἐφεξῆς, ὣν μηδὲν ἐστὶν ὅμοιον μεταξύ. καὶ γὰρ κίονας τούτους ἐφεξῆς λέγομεν, ὣν μὴ ἐστὶν ἄλλη κίων ἐν μέσῳ· καίτοι γε ἄῃρ ἐστὶ πάντως μέσος, ἀλλ' οὐδὲν ὁμογενὲς μεταξύ. διὰ δὲ οὖν τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κεῖσθαι τὸ ἐπ' εὐθείας οὐκ ἔχουσιν, εἰ καὶ δύο ποιοῦσι γωνίας ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ $\overline{\alpha\beta}$ γωνίας. καλύπει γὰρ οὐδὲν μᾶς μὲν εἶναι καὶ τρίτου τὴν ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\delta}$, τοῦ δὲ λοιποῦ διμοῖρου τὴν ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$.

Τοσαῦτα περὶ τῆς προτάσεως· ἐν δὲ τῇ κατασκευῇ χρῆται ἐνὶ αἰτήματι τῷ δευτέρῳ τῷ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν αἰτουμένῳ, καθάπερ ἐν τῇ ἀποδείξει τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι, καὶ δυσὶν ἀξιώμασι, τῷ

τε τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα [καὶ ἀλλήλοις ἴσα] καὶ τῶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ λοιπὰ εἶναι ἴσα, πρὸς δὲ τὴν τοῦ ἀδυνάτου συναγωγὴν, ὅτι τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἐστίν. ἦν δὲ καὶ ἴσον μιᾶς τῆς κοινῆς γωνίας ἀφηρημένης, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὅτι δὲ ἄρα δυνατὸν πρὸς τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ καὶ τῶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθείας ἐξῆς κειμένας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέντοι μέρη δύο ποιεῖν ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ μιᾷ εὐθείᾳ γωνίας, δείξομεν οὕτως, ὥσπερ **Πορφύριος**. ἔστω τις εὐθεῖα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ σημείον τὸ τυχὸν ἐπ' αὐτῆς τὸ γ , καὶ τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἤχθω πρὸς ὀρθῆς ἡ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$, καὶ ἀπὸ τοῦ ϵ κάθετος ἡ $\overline{\epsilon\beta}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\epsilon\beta}$, καὶ κείσθω τῇ $\overline{\epsilon\beta}$ ἴση ἡ $\overline{\beta\zeta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\gamma\zeta}$. ἐπεὶ

[FR297]



οὖν ἴση ἡ $\overline{\epsilon\beta}$ τῇ $\overline{\beta\zeta}$, κοινὴ δὲ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν — ὀρθαὶ γάρ εἰσιν —, βάσεις ἄρα ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$ βάσει τῇ $\overline{\gamma\zeta}$ ἴση καὶ πάντα δὴ πᾶσιν. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\beta}$ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\beta}$ · ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\gamma\beta}$ — δίχα γὰρ τέτμηται ὀρθῇ τῇ $\overline{\epsilon\gamma}$ — ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\beta}$ · μιᾶς ἄρα καὶ ἡμίσειας ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\zeta}$ · ἐστὶν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\epsilon}$ ἡμίσεια ὀρθῆς· πρὸς τῇ $\overline{\gamma\delta}$ ἄρα εὐθείᾳ καὶ τῶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῶ γ δύο εὐθεῖαι ἐξῆς κείνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αἱ $\overline{\gamma\epsilon}$ $\overline{\gamma\zeta}$ ποιοῦσαι δύο ὀρθαῖς ἴσας γωνίας, ἡμίσειαν μὲν ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$, μίαν δὲ καὶ ἡμίσειαν ἡ $\overline{\gamma\zeta}$. ἴν' οὖν μὴ ζητῶμεν ἀδύνατα, πῶς αἱ $\overline{\gamma\epsilon}$ $\overline{\gamma\zeta}$, ποιοῦσαι τὰς πρὸς τῇ $\overline{\delta\gamma}$ γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας, ἀλλήλαις εἰσὶν ἐπ' εὐθείας, προσέθηκεν ὁ γεωμέτρης τὸ **μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη**. δεῖ τοίνυν ἐφ' ἑκάτερα τῆς εὐθείας κείσθαι τὰς ποιούσας πρὸς αὐτὴν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας τὰς γωνίας ἀφ' ἑνὸς μὲν ὠρμημένας σημείου, φερομένας δὲ τὴν μὲν ἐπὶ τάδε τὴν δὲ ἐπ' ἐκεῖνα τῆς εὐθείας.

[FR298]

Prop. XV, theor. VIII. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλή-
λας τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσι.

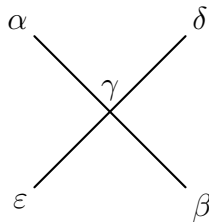
Τὰς ἐφεξῆς γωνίας τῶν κατὰ κορυφὴν διαφέρειν φαμέν· τῶν μὲν γὰρ ἡ γένεσις κατὰ τὴν τομὴν γίνεται τῶν δύο εὐθειῶν, τῶν δὲ τῆς ἐτέρας μόνον περὶ τὴν ἐτέραν διαιρουμένης. ἐὰν γὰρ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ μὲν ἄτμητος, τέμνουσα δὲ τῶ

ἐαυτῆς πέρατι ἐκείνην δύο ποιῇ γωνίας, ταύτας καλοῦμεν ἐφεξῆς, ἐὰν δὲ ὑπ' ἀλλήλων τμηθῶσι δύο εὐθεῖαι κατὰ κορυφὴν ἀποτελοῦνται γωνίαι. καλοῦνται δὲ οὕτως, ὅτι τὰς κορυφὰς εἰς ταὐτὸ συμβαλλούσας ἔχουσι σημεῖον. κορυφαὶ δὲ αὐτῶν τὰ σημεῖα, πρὸς ἃ συναγόμενα τὰ ἐπίπεδα τὰς γωνίας ποιεῖ.

Τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δεῖνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, εὐρημένον μὲν, ὡς φησὶν **Εὐδημος** ὑπὸ **Θαλοῦ** πρώτου, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως ἡξιωμένον παρὰ τῷ στοιχειωτῇ. δείκνυται δὲ οὐκ ἐκ πάντων τῶν κεφαλαίων. ἡ μὲν γὰρ κατασκευὴ ἐκτέλειται ἐνταῦθα, ἡ δὲ ἀπόδειξις, ἣν πάντως ἀναγκαῖον ὑπάρχειν, ἥρτηται τοῦ τρισκαίδεκάτου θεωρήματος, προσχρῆται δὲ καὶ ἀξιώμασι δυοῖν, ὧν τὸ μὲν ἐστὶ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα, τὸ δὲ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ λοιπὰ ἴσα ἐστίν.

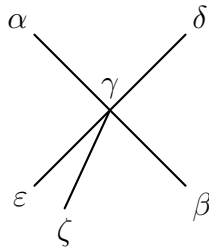
[FR299]

Ἀλλὰ τὸ μὲν **Εὐκλείδιον** θεώρημα φανερόν· ἀντιστρέφει δὲ τῷ θεωρήματι ἄλλο τοιοῦτον· ἐὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ληφθεῖσαι ποιῶσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, ἐπ' εὐθείας ἔσσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ἔστω γὰρ τις εὐθεῖα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον τὸ γ , καὶ πρὸς τῷ γ δύο εὐθεῖαι αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\gamma\epsilon}$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἰληφθώσαν ἴσας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ γωνίας· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας εἰσὶν αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\gamma\epsilon}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ



$\overline{\gamma\delta}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\alpha\beta}$ ἐφέστηκεν, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\alpha}$ $\overline{\delta\gamma\beta}$. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\alpha}$ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\beta}$ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἐπεὶ οὖν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ δύο εὐθεῖαι ἐξῆς αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\gamma\epsilon}$ οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\gamma\epsilon}$. δέδεικται οὖν τὸ ἀντιστροφὸν τῷ προκειμένῳ θεωρήματι· ὅμοιον δὲ ὁ γεωμέτρης αὐτὸ παραλιπεῖν ὡς ῥάδιον κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεικνύναι καὶ τοῦτο, καθ' ἣν τὸ πρὸ αὐτοῦ δεδείχαμεν. τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ $\overline{\gamma\delta}$ τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, εἰληφθῶ τῇ $\overline{\gamma\delta}$ ἐπ' εὐθείας ἡ $\overline{\gamma\zeta}$. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\zeta}$ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ποιοῦσιν ἴσας· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ $\overline{\beta\gamma\zeta}$. ἀλλ' ἦσαν ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\zeta}$, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἐστὶν εὐθεῖα τῇ $\overline{\gamma\delta}$ ἐπ' εὐθείας, αἱ ἄρα $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\gamma\epsilon}$ ἐπ' εὐθείας εἰσὶ τῶν κατὰ

[FR300]



κορυφήν γωνιών ἴσων ὑποκειμένων. τῆς οὖν αὐτῆς ἀποδείξεως οὔσης, ἥτις καὶ ἐπὶ τοῦ τεσσαρεσκαιδεκάτου θεωρήματος προσείληπτο, πῶς οὐ περίεργον ἦν καὶ ταύτην ἐπάγειν τὴν ἀντιστροφὴν; γυμνασίας δὲ ἔνεκα καὶ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς αὐτὸ καὶ διὰ τῆς δεικτικῆς ἐφόδου κατεσκευάσαμεν.

[FR301]

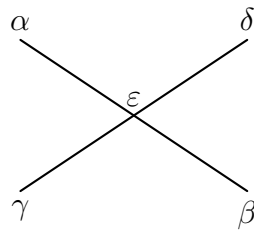
Ἐοικεν δὲ τοῦτο τὸ πεντεκαιδέκατον θεώρημα τῇ ὁμοιομερείᾳ τῶν εὐθειῶν καὶ τῇ ἐπ' ἄκρον τάσει θαρρεῖν, διότι τὰς οὕτως ἐχούσας γραμμὰς καὶ φερομένας δι' ἀλλήλων ἀναγκαῖον ὁμοίας ἔχειν τὰς κλίσεις πρὸς ἀλλήλας ἐφ' ἑκάτερα καὶ τὰς αὐτάς. αἱ γοῦν περιφέρειαι καὶ ὅλως αἱ μὴ εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας οὐ ποιοῦσιν ἐξ ἀνάγκης ἴσας, ἀλλὰ ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους. ἐὰν γὰρ δύο ἴσοι κύκλοι διὰ τῶν κέντρων τέμνωσιν ἀλλήλους ἢ καὶ μὴ διὰ τῶν κέντρων, τὰς μηνοειδεῖς γωνίας ἴσας ποιοῦσι κατὰ κορυφὴν οὔσας, ἀλλ' οὐκέτι τὰς λοιπὰς, τὴν τε ἀμφίκυρτον καὶ τὴν ἀμφίκοιλον, ἀλλὰ μείζω τὴν ἑτέραν. ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν ἢ ἐπ' ἄκρον τάσις ἴσην τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας τμήματα ποιεῖ τὴν ἀπόστασιν.

Porisma. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς τέτταρας γωνίας τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν.

Ἐν τι τῶν γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πόρισμα. τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν· καλοῦσι γὰρ πορίσματα καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, οἷον ἔρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὐρέσεως δὲ χρήζει καὶ οὔτε γενέσεως μόνης οὔτε θεωρίας ἀπλῆς. ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι θεωρῆσαι δεῖ, καὶ ὄντων δὴ τῶν πραγμαμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις. τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποιήσιν τινος ἀπαιτεῖ, τοῦ δὲ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοθέντων συμμετρῶν μεγεθῶν τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιάδε, μεταξύ πῶς ἐστὶ προβλημάτων καὶ θεωρημάτων. οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητούμενων, ἀλλ' εὐρέσεις, οὔτε θεωρία ψιλῇ. δεῖ γὰρ ὑπ' ὅψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὁμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον. τοιαῦτα ἄρα ἐστὶν καὶ ὅσα **Εὐκλείδης** πορίσματα γέγραφε, γ βιβλία πορισμάτων συντάξας.

[FR302]

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων πορισμάτων παρείσθω λέγειν, τὰ δὲ ἐν τῇ στοιχειώσει πορίσματα συναναφαίνεται μὲν ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, αὐτὰ δὲ προηγουμένης οὐ τυγχάνει χητήσεως· οἷον καὶ τὸ νῦν προκείμενον. ἐζητεῖτο μὲν γάρ, εἰ δύο εὐθειῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσί. τούτῳ δὲ δεικνυμένῳ συναποδέδεικται τὸ καὶ τὰς τέτταρας γωνίας εἶναι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας. ὅτε γὰρ ἐλέγομεν· ἔστωσαν εὐθεῖαι δύο αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$ ἐφέστηκεν, ποιεῖ τὰς



ἐφεξῆς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, καὶ πάλιν ἐπεὶ ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$ ἐφέστηκεν, ποιεῖ τὰς ἐφεξῆς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· τότε συναπεδείκνυμεν τῷ ζητουμένῳ ὅτι αἱ περὶ τὸ ε σημεῖον γωνίαι τέτταρας ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

[FR303]

Ἔστιν οὖν τὸ πόρισμα θεωρήμα διὰ τῆς ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἀποδείξεως ἀπραγματεύτως ἀναφαινόμενον. οἷον γὰρ κατὰ τύχην περιπίπτειν εὐόκωμεν τοῖς πορίσμασιν· οὐ γὰρ προθεμένοις οὐδὲ ζητήσασιν ἀπαντᾷ, ὅθεν αὐτὰ καὶ τοῖς ἔρμαίοις εἰκάσαμεν. καὶ ἴσως οἱ δεινοὶ τὰ μαθήματα κατ' αὐτὴν αὐτοῖς ἔθεντο τὴν ἐπωνυμίαν ἐνδεικνύμενοι τοῖς πολλοῖς καὶ περὶ τὸ φαινόμενον κέρδος ἐπτοημένοις ὅτι ἄρα τὰ ἀληθῆ τοῦ θεοῦ δῶρα καὶ τὰ ἔρμαια ταῦτά ἐστιν, οὐχ οἷα ἐκείνοις δοκεῖ. ταῦτα γὰρ ὁ ἐν ἡμῖν πόρος ἀπογεννᾷ καὶ ἡ γόνιμος δύναμις τῆς ἐπιστήμης προσβάλλει ταῖς προηγουμέναις ζητήσεσιν εὐπορίας ἀφθόρους θεωρημάτων ἀναφαίνουσα.

Τὴν μὲν οὖν ιδιότητα τῶν πορισμάτων τοιαύτην εἶναι λεκτέον. διαιρετέον δὲ αὐτὰ πρῶτον μὲν κατὰ τὰς ἐπιστήμας — ἐστὶ γὰρ τὰ μὲν γεωμετρικὰ τὰ δὲ ἀριθμητικὰ τῶν πορισμάτων. τὸ μὲν γὰρ προκείμενον πόρισμα γεωμετρικόν ἐστι, τὸ δὲ ἐπὶ τέλει τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ ζ' βιβλίου τῶν ἀριθμητικῶν — ἔπειτα δὲ κατὰ τὰ προηγουμένα ζητήματα — τὰ μὲν γὰρ προβλήμασιν ἔπεται, τὰ δὲ θεωρήμασι· τοῦτο μὲν γὰρ θεωρήματός ἐστι, τὸ δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ κείμενον πρόβλημα — τρίτον δὲ αὖ κατὰ τὰςδείξεις — τὰ μὲν γὰρ ταῖς δεικτικαῖς ἐφόδοις, τὰ δὲ ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀναγωγαῖς συγκατασκευάζεται· τὸ μὲν προκείμενον τῇ ἐπ' εὐθείᾳ δείξει, τὸ δὲ τῷ πρώτῳ τοῦ τρίτου βιβλίου συναποδεδειγμένον τῇ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ συνανεφάνη. πολλαχῶς δὲ καὶ ἄλλως τὰ πορίσματα διαιρεῖν δυνατόν· ἀλλ' ἡμῖν γε ἀρκέσει καὶ ταῦτα πρὸς τὸ παρόν.

[FR304]

Τοῦτο δὲ τὸ πόρισμα, περὶ οὗ πρόκειται λέγειν, διδάσκον ἡμᾶς ὅτι ὁ περὶ ἐν σημεῖον τόπος εἰς τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας γωνίας διανέμεται, παρέσχεν ἀφορμὴν

κάκεινῳ τῷ παραδόξῳ θεωρήματι τῷ δεικνύντι μόνα τρία ταῦτα πολύγωνα πληροῦν δυνάμενα τὸν περὶ ἓν σημεῖον ὅλον τόπον, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἐξάγωνον τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. ἀλλὰ τὸ μὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐξάκεις παραληφθέν — ἐξ γὰρ δίμοιρα ποιήσῃ τὰς τέσσαρας ὀρθάς — τὸ δὲ ἐξάγωνον τρεῖς γενόμενον — ἐκάστη γὰρ ἐξαγωνικὴ γωνία ἴση ἐστὶ μιᾷ ὀρθῇ καὶ τρίτῳ — τὸ δὲ τετράγωνον τετράκεις — ἐκάστη γὰρ τετραγωνικὴ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἐξ οὖν ἰσόπλευρα τρίγωνα συννεύσαντα κατὰ τὰς γωνίας τὰς τέσσαρας ὀρθὰς συμπληροῖ καὶ τρία ἐξάγωνα καὶ τετράγωνα τέσσαρα. καὶ ἕκαστον δὲ τῶν ἄλλων πολυγώνων ὁμωσοῦν ἐπισυντιθέμενον κατὰ τὰς γωνίας ἢ ἐλλείπει τῶν τεσσάρων ὀρθῶν ἢ πλεονάζει· μόνα δὲ ταῦτα κατὰ τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐξισοῦται ταῖς τέτρασιν ὀρθαῖς. καὶ ἐστὶ τὸ θεωρήμα τοῦτο **Πυθαγόρειον**.

[FR305]

Διὰ τοῦτο δὲ τὸ πόρισμα καὶ πλείους εὐθεῖαι τῶν δυεῖν δι' ἑνὸς σημείου τέμνωσιν ἀλλήλας, οἷον τρεῖς ἢ τέτταρες ἢ ὅποσαι οὖν, αἱ γινόμεναι γωνίαι πᾶσαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι δεικνυνται· μερίζονται γὰρ τὸν τεσσάρων τόπον. δῆλον δὲ ὅτι διπλασίους ἀεὶ γενήσονται τῶν εὐθειῶν αἱ γωνίαι· καὶ οὕτω δύο μὲν εὐθειῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας ἔσονται γωνίαι τέσσαρες ἴσαι τέτρασιν ὀρθαῖς, τριῶν δὲ ἐξ γωνίαι, τεσσάρων δὲ ὀκτώ· καὶ ἐπ' ἄπειρον ὁμοίως. ἀεὶ γὰρ διπλασιάζεται μὲν τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν. αἱ δὲ γωνίαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος αὖξονται, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἐλασσοῦνται, διότι τὸ διαιρούμενον ἀεὶ ταυτόν ἐστιν, αἱ τέσσαρες ὀρθαί.

Prop. XVI, theor. VIII. Παντὸς τριγώνου μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ταύτην τὴν πρότασιν οἱ μὲν ἐλλειπῶς προενεγκάμενοι χωρὶς τοῦ **μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης** ἀφορμὴν παρέσχον ἴσας μὲν καὶ ἄλλοις τισίν, αὐτὰρ καὶ **Πιλίπῳ**, καθάπερ φησὶν ὁ μηχανικὸς **Ἡρων**, διαβολῆς. οὐ γὰρ πάντως, ἢ τριγώνον ἐστίν, καὶ ἐκτὸς ἔχει γωνίαν. ὅσοι δὲ περιγράφειν τὴν αἰτίαν ταύτην ἠθέλησαν, μετὰ τὰς ἐκκειμένης προσθήκης ταύτην παραδεδώκασιν συνήθους οὔσης τῷ γεωμέτρῳ. καὶ γὰρ ἐν τῷ πέμπτῳ θεωρήματι τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἴσας ἀποδείξει βουλόμενος προσέθηκεν ὅτι καὶ προσεκβληθεισῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι εἰσίν. καὶ εἰ παρ' ἄλλοις οὖν ἐλλειπῆς ἦν, ἀλλὰ παρὰ τῷ στοιχειωτῇ τὸ πλήρες ἔχουσα γέγραπται.

[FR306]

Τί δ' οὖν φησὶν ἡ πρότασις ὅτι παντὸς τριγώνου εἰ μίαν τινὰ τῶν πλευρῶν προσεκβάλῃς τὴν ἐκτὸς αὐτοῦ συνισταμένην γωνίαν εὐρήσεις μείζονα τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἑκατέρας; ἀμφοτέραις μὲν γὰρ ἴση δειχθήσεται μικρόν ὑπερὸν, ἑκατέρας δὲ μείζον ἐκ τούτου δείκνυται. καὶ ἀναγκαίως πρὸς τὰς ἀπεναντίον αὐτὴν συνέκρινεν ἄλλ' οὐ πρὸς τὴν ἐφεξῆς. αὕτη μὲν γὰρ καὶ ἴση

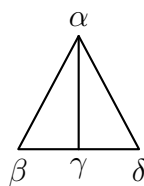
δύναται εἶναι καὶ ἐλάσσων αὐτῆς, ἐκείνων δὲ ἑκατέρας μείζων [ἢ ἐκτός] ἐκ παντός. ἐὰν γοῦν ὀρθογώνιον ᾗ τὸ τρίγωνον καὶ νοήσης ἐκβαλλομένην μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἢ ἐκτός ἴση ἔσται τῇ ἐφεξῆς· ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιον ᾗ, ἔσται δυνατόν τὴν ἐντός μείζονα εἶναι τῆς ἐκτός. ἀλλὰ πρὸς τὰς ἀπεναντίον — τῶν γὰρ ἐντος τοῦ τριγώνου μία μὲν ἐστὶν ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ, δύο δὲ ἀπεναντίον — τούτων οὖν ἑκατέρας μείζων ἢ ἐκτός, ἀλλ' οὐ τῆς ἐφεξῆς αὐτῇ κειμένης.

Ἦρη δέ τινες συνάπτοντες τὰ δύο θεωρήματα τοῦτο τε καὶ τὸ ἐξῆς ἀποδεικνύμενον οὕτω προφέρονται τὴν πρότασιν· Παντὸς τριγώνου μιᾷς πλευρᾷ προσεκβληθείσης ἢ ἐκτός τοῦ τριγώνου γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντός καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί, καὶ δύο ὁποιαοῦν τῶν ἐντός γωνιῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἔχουσι δὲ ἀφορμὴν τῆς συμπλοκῆς τῶν θεωρημάτων, ἐπειδὴ καὶ αὐτὸς ὁ γεωμέτρης ἐξῆς ἐπὶ τῶν ἴσων οὕτως ἐποίησε· Παντὸς τριγώνου ἢ ἐκτός γωνία δύο ταῖς ἐντός καὶ ἀπεναντίον ἴση, καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. κἀνταῦθα τούνυν ἀξιοῦσιν ἐν τοῖς ὁμοίοις συμπλέκειν τὰ ζητούμενα καὶ ποιεῖν τὴν πρότασιν σύνθετον. καὶ δῆλον ὅτι τὸ μὲν προκειμένον εἰς ἀπόδειξιν ἔσται σύνθετον, τὸ δὲ δεδομένον, εἰ μὲν μετὰ τῆς εἰρημένης προσθήκης ἐκφέροίτο, καὶ αὐτὸ σύνθετον — δεῖ γὰρ δύο νοεῖν, τρίγωνον ὑποκείμενον καὶ μίαν πλευρὰν ἐκβεβλημένην — εἰ δὲ ἄνευ ταύτης [?], δυνάμει μὲν σύνθετον, κατ' ἐνέργειαν δὲ ἀπλοῦν. πάντως γάρ, κἂν μὴ προσκείηται, δεῖ συμπαραλαμβάνειν καὶ τοῦτο ὡς δεδομένον. αὐτῷ γὰρ τῷ τὴν ἐκτός ὑποθέσθαι γωνίαν ὡς οὖσαν τὴν πλευρὰν ὡς ἐκβεβλημένην παρείληφεν.

[FR307]

Τοσαῦτα περὶ τούτων· λάβοιμεν δ' ἂν ἀπὸ τοῦ προκειμένου θεωρήματος ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τρεῖς εὐθείας ἴσας ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν προσπίπτειν ἀδύνατον. ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς σφμείου τρεῖς αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{αγ}$ $\overline{αδ}$ ἴσαι ἐπὶ τὴν $\overline{βδ}$ εὐθεῖαν ἡγμέναι. ἐπεὶ οὖν ἴση ἢ $\overline{αβ}$ τῇ $\overline{αγ}$, ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῇ βάσει

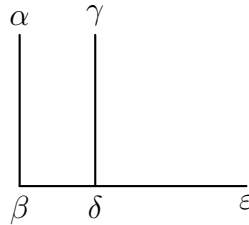
[FR308]



γωνίαι, ἢ ἄρα ὑπὸ $\overline{αβγ}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{αγβ}$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἢ $\overline{αβ}$ τῇ $\overline{αδ}$, ἴση ἢ ὑπὸ $\overline{αβδ}$ τῇ ὑπὸ $\overline{αδβ}$. ἦν δὲ τῇ ὑπὸ $\overline{αβγ}$ ἴση ἢ ὑπὸ $\overline{αγβ}$ γωνία· ἢ ἄρα ὑπὸ $\overline{αγβ}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{αδβ}$, ἢ ἐκτός τῇ ἐντός καὶ ἀπεναντίον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀχθήσονται.

Διὰ τοῦδε δὲ τοῦ θεωρήματος κἀκεῖνο ἀποδείξομεν ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτός γωνίαν ἴσην ποιῇ τῇ ἐντός καὶ ἀπεναντίον, οὐ ποιήσουσι τρίγωνον αἱ εὐθεῖαι οὐδὲ συμπεσοῦνται, ἐπεὶ ἔσται αὐτὴ καὶ μείζων καὶ ἴση ὅπερ ἀδύνατον. οἷον ἔστωσαν αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{γδ}$ εὐθεῖαι καὶ εἰς αὐτὰς ἡ $\overline{βε}$

ἐμπεσοῦσα ποιείτω ἴσας τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\delta}$ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$. οὐ συμπεσοῦνται δὲ αἱ $\overline{\alpha\beta}$



$\overline{\gamma\delta}$. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται μενουσῶν τῶν ἴσων γωνιῶν ἔσται ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$, τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\epsilon}$ ἴση, ἐκτὸς οὕσα καὶ μείζων τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἀνάγκη ἄρα, εἰ συμπίπτουσιν, μηκέτι μένειν ἴσας τὰς γωνίας, ἀλλὰ ἐκ παντὸς αὐξέσθαι τὴν πρὸς τῷ δ . εἴτε γὰρ μενούσης ἀκινήτου τῆς $\overline{\alpha\beta}$ νοήσεως κινουμένην ἐπ' αὐτὴν τὴν $\overline{\gamma\delta}$, ἵνα συμπέσωσι, πλείονα ποιεῖς διάστασιν κατὰ τὴν $\overline{\gamma\delta\epsilon}$ γωνίαν — ὅσῳ γὰρ πρόσεισιν ἡ $\overline{\gamma\delta}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$, τοσούτῳ μᾶλλον ἀφίσταται τῆς $\overline{\delta\epsilon}$ — εἴτε μενούσης τῆς $\overline{\gamma\delta}$ νοήσεως κινουμένην ἐπ' αὐτὴν τὴν $\overline{\alpha\beta}$, ἐλάττονα ποιήσεις τὴν $\overline{\alpha\beta\delta}$ γωνίαν — ἅμα γὰρ ἐπὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$ φέρεται καὶ ἐπὶ τὴν $\overline{\beta\delta}$ — εἴτε καὶ ἄμφω κινουμένας ποιήσεις πρὸς ἀλλήλας, τὴν μὲν $\overline{\alpha\beta}$ εὐρήσεις ὥς ἐπὶ τὴν $\overline{\beta\delta}$ φερομένην καὶ συνάγουσαν τὴν γωνίαν, τὴν δὲ $\overline{\gamma\delta}$ τῆς $\overline{\delta\epsilon}$ ἀφισταμένην διὰ τὴν ἐπὶ τὴν $\overline{\alpha\beta}$ κίνησιν καὶ αὐξοῦσαν τὴν ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$ γωνίαν. ἐξ ἀνάγκης ἄρα εἴ γε τρίγωνον ἔσται καὶ συμπεσοῦνται αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ μείζων ἢ ἐκτὸς ἔσται γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἢ γὰρ τῆς ἐντὸς μενούσης αὐξεται ἢ ἐκτὸς, ἢ τῆς ἐκτὸς μενούσης ἐλασσοῦται ἢ ἐντὸς, ἢ, εἰ (?) καὶ ἡ ἐντὸς συνάγεται, καὶ ἡ ἐκτὸς ἐπὶ πλεον δίσταται. αἰτία δὲ τούτων ἡ κίνησις τῶν εὐθειῶν, τῆς μὲν ἐφ' ἧς ποιεῖ τὴν ἐντὸς γωνίαν κινουμένης ἐπὶ ταῦτα, τῆς δὲ ἐφ' ἧς ποιεῖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἀπὸ τούτων φερομένης. καὶ ἔχεις ἐκ τούτων συλλογίζεσθαι, πῶς αἱ γενέσεις τῶν πραγμάτων ὑπ' ὅψιν ἡμῖν τὰς ἀληθινὰς ἄγουσι τῶν ζητουμένων αἰτίας.

[FR309]

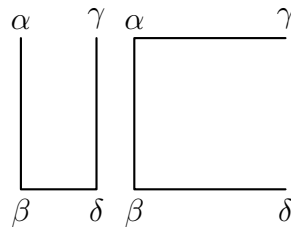
[FR310]

Prop. XVII, theor. X. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Νῦν μὲν ἀορίστως δείκνυται δύο ὁμοιοῦν τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονας· ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς καὶ ἀφορισθήσεται, πόσῳ ἐλάττους, ὅτι τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου γωνίᾳ. αἱ γὰρ τρεῖς ἴσαι ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν, ὥστε αἱ δύο τῇ λοιπῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλαττοῦνται. καὶ ἡ μὲν τοῦ στοιχειωτοῦ δεῖξις φανεράν ἔχει τὴν ὁδόν. χρῆται γὰρ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι. δεῖ δὲ καθάπερ ἐν τῷ πρόσθεν εἰς τὴν γένεσιν ἀπιδόντα τῶν τριγώνων τὴν αἰτίαν εὐρεῖν τοῦ

[FR311]

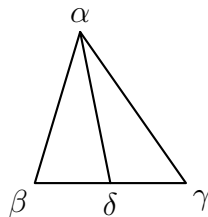
προκειμένου συμπτώματος. ἔστωσαν οὖν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ πάλιν καὶ $\overline{\gamma\delta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$ πρὸς ὀρθάς. εἰ οὖν μέλλοι τρίγωνον ἔσσεσθαι, δεῖ συνεῦσαι τὰς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ πρὸς



ἀλλήλας. ἡ δὲ σύννευσις αὐτῶν ἐλαττοῖ τὰς ἐντὸς γωνίας, ὥστε ἐλάττους γίνονται δυεῖν ὀρθῶν. εἰσὶ γὰρ ὀρθαὶ πρὸ τῆς συνεύσεως. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\beta\delta}$ νοήσωμεν ἐστώσας ὀρθάς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται κατὰ τὴν σύννευσιν τῶν εὐθειῶν καὶ ἔσονται αἱ πρὸς τῇ $\overline{\alpha\beta}$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· καὶ ἐπὶ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς ὡσαύτως.

Τοῦτο οὖν τὸ αἰτιόν ἐστιν, ἀλλ' οὐχὶ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ἐκτὸς ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν. ἐκβεβλήσθαι μὲν γὰρ τὴν πλευρὰν οὖν ἀναγκαῖον. οὐδὲ ἔξω τινὰ συνεστάναι γωνίαν, τῶν δὲ ἐντὸς γωνιῶν $\overline{\beta}$ ὁμοιασοῦν εἶναι [$\overline{\beta}$] ὀρθῶν ἐλάττους ἀναγκαῖον. τὸ δὲ μὴ ἀναγκαῖον τοῦ ἀναγκαίου πῶς ἂν αἷτιον εἴη; ἀλλ' ὅπερ εἶπον τὸ μὲν αἷτιόν ἐστι τὸ ῥηθέν, ἡ σύννευσις τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τὴν βάσιν ἐλαττοῦσα τὰς ὀρθάς. Τοῦ δὲ στοιχειωτοῦ διὰ τῆς ἐκτὸς γωνίας δείξαντος τὸ ζητούμενον φέρε καὶ μὴ προσεκβάλλοντές τινα τῶν πλευρῶν τὸ αὐτὸ κατασκευάσωμεν. ἔστω τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ τὸ $\overline{\delta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\delta}$. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\beta\delta}$ μία

[FR312]

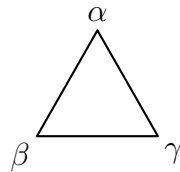


[πλευρὰ] προσεκβέβληται ἡ $\overline{\beta\delta}$, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\delta}$. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ $\overline{\delta\gamma}$, ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\beta}$ μείζων τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$. ἀλλὰ μὴν αἱ περὶ τὴν $\overline{\alpha\delta}$ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι διὰ τὸ τρισκαιδέκατον. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους. ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ $\overline{\beta\gamma\alpha}$ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ σημείου λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ $\overline{\beta}$ [εὐθεΐαν] ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον. καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ δύο

ὀρθῶν ἐλάσσους ἀποφανοῦμεν ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ σημείον λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ $\overline{\gamma}$ εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦτο τὸ σημείον. δέδεικται ἄρα τὸ προκείμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος μὴ προσεκβληθείσης τινὸς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Διὰ τοῦτου τοίνυν δυνατὸν κάκεῖνο δεικνύναι, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν δύο κάθετοι οὐκ ἀχθήσονται. ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha}$ σημείου ἐπὶ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ δύο κάθετοι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$. ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ γωνίαι.

[FR313]



ἀλλ' ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, δύο ὁποιοῦν γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσους εἰσὶν. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσους εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς διὰ τὰς κάθετους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀχθήσονται.

Prop. XVIII, theor. XI. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ὅτι μὲν ἡ τῶν πλευρῶν ἰσότης ἐφ' ἐκάστου τῶν τριγώνων ἴσας ἀποτελεῖ τὰς ὑπὸ τούτων ὑποτετινομένας γωνίας καὶ ἡ τῶν γωνιῶν ἰσότης ὡσαύτως τὰς ὑποτετινούσας αὐτὰς πλευρὰς ἴσας ἀποφαίνει μεμαθήκαμεν διὰ τε τοῦ πέμπτου καὶ ἔκτου θεωρήματος· ὅτι δὲ καὶ ταῖς ἀνισότητι τῶν πλευρῶν ἢ τῶν ὑποτετινομένων γωνιῶν ἀνισότης ἀκολουθεῖ καὶ ἀνάπαλιν διὰ τούτων διδασκόμεθα τῶν θεωρημάτων τοῦ τε ὀκτωκαιδεκάτου λέγω καὶ τοῦ ἑννεακαιδεκάτου. τὸ μὲν γὰρ δείκνυσι τὴν μείζονα πλευρὰν ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, τὸ δὲ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν τὴν μείζονα πλευρὰν, ἀντιστρέφοντα μὲν ἀλλήλοις, ἐπὶ δὲ τῶν ἐναντίων πραγμάτων τὰ αὐτὰ θεωροῦντα συμπτώματα τῷ τε πέμπτῳ καὶ τῷ ἔκτῳ θεωρήματι. φανερόν δὲ ὅτι τὴν μείζονα καὶ τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν ἀνάλογον ληψόμεθα καὶ διαιρήσομεν τὴν μεγίστην καὶ μέσην καὶ ἐλαχίστην, καὶ τὰς γωνίας ὡσαύτως ἐπὶ τῶν σκαληνῶν τριγώνων. ἐπὶ δὲ τῶν ἰσοσκελῶν ἀρκέσει τὸ μείζον ἀπλῶς καὶ ἔλασσον. μία γάρ ἐστιν ἡ ταῖς δυσὶν ἀνισος, ἥτοι μείζων οὔσα ἢ ἐλάττω, ὡς ἐπὶ γε τῶν ἰσοπλεύρων οὐκ ἔχει ταῦτα τὰ θεωρήματα χώραν. καὶ ὁρᾷς ὅπως τὰ μὲν τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν δεικτικὰ τοῖς ἰσοπλεύροις καὶ ἰσοσκελέσιν ἐφήρμοττεν, τὰ δὲ τῆς ἀνισότητος τοῖς σκαληνοῖς καὶ τοῖς ἰσοσκελέσιν. αἴτιον δὲ ὅτι τὰ μὲν τῶν τριγώνων ἰσότητός ἐστι μόνης ἑκγόνα, τὰ δὲ ἀνισότητος μόνης, τὰ δὲ ἀμφοτέρων, ὡδὶ μὲν διὰ τῆς ἰσότητος, ὡδὶ δὲ διὰ τῆς ἀνισότητος ὑφιστάμενα· καὶ τὰ μὲν ὄντα τῷ πέρατι συγγενῇ, τὰ δὲ τῇ ἀπειρίᾳ, τὰ δὲ κατὰ τὴν

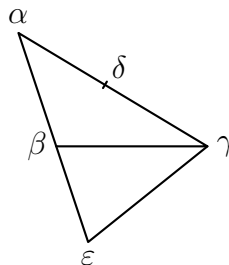
[FR314]

μῖζιν ἀμφοτέρων ἀπογεννώμενα, ὥστε διὰ πάντων ἡ τριάς αὕτη πεφοίτηκεν, οἷον γραμμῶν, γωνιῶν, σχημάτων, καὶ ἐν τοῖς σχήμασι τριπλεύρων, τετραπλεύρων, ἑξῆς ἀπάντων. ἀλλὰ καὶ τὸ πέρας οὐ μὲν διὰ τῆς ὁμοιότητος, οὐ δὲ διὰ τῆς ἰσότητος ἐμφαντάζεται τοῖς γεωμετρικοῖς εἶδεσι, καὶ τὸ ἄπειρον οὐ μὲν διὰ τῆς ἀνομοιότητος, οὐ δὲ διὰ τῆς ἀνισότητος, καὶ τὸ μικτὸν ὅτε μὲν ἐξ ὁμοιοτήτων, ὅτε δὲ ἐξ ἰσοτήτων. αἷτιον δὲ καὶ τούτων ὅτι τὰ εἶδη τὰ γεωμετρικὰ τῷ ποσῷ προσήκει καὶ τῷ ποιῷ. διότι τῶν δύο τούτων ἐπισημαινομένων δῆλον (?) καὶ ὅτι **παντὸς τριγώνου** λέγων ὁ στοιχειωτῆς οὐχὶ καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου λέγει, ἀλλὰ τοῦ ἔχοντος μείζω καὶ ἐλάττω πλευρὰν. δεῖ γὰρ τὸ δεδομένον ἠγούμενον νομίζειν, ἐπόμενον δὲ (?) τὸ ζητούμενον. ὁ δ' ἂν μείζονα πλευρὰν ἔχη καὶ ἐλάσσονα, τοῦτο ὑπὸ τὴν μείζονα πλευρὰν τὴν μείζονα γωνίαν [ἔξει].

[FR315]

Ἐπειδὴ δὲ ὁ γεωμέτρης ἐν τῇ κατασκευῇ λαβὼν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρίγωνον καὶ μείζονα τὴν $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\alpha\beta}$, ἵνα δείξῃ τῆς πρὸς τῷ γ γωνίας τὴν πρὸς τῷ β μείζονα, ἀφείλεν ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἴσην τὴν $\overline{\alpha\delta}$, φαίνει δ' ἂν τις ὅτι πρὸς τῷ γ δεῖ γενέσθαι τὴν ἀφαίρεσιν, φέρεται ἐπὶ ταύτης τῆς ὑποθέσεως δεῖξωμεν τὸ προκείμενον, ὡς **Πορφύριος**. ἔστω γὰρ ἡ $\overline{\delta\gamma}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\varepsilon}$ καὶ κείσθω ἡ $\overline{\beta\varepsilon}$ τῇ $\overline{\delta\alpha}$ ἴση. ὅλη ἄρα ἡ $\overline{\alpha\varepsilon}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\overline{\varepsilon\gamma}$. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\varepsilon}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\varepsilon\gamma}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\varepsilon}$

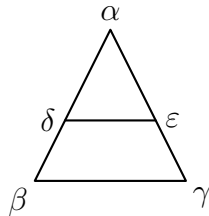
[FR316]



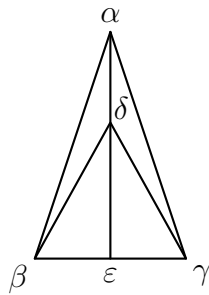
διὰ τὸ πέμπτον. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\varepsilon\gamma}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$. ἐστὶν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\varepsilon\gamma}$. τοῦ γὰρ $\overline{\gamma\beta\varepsilon}$ μία πλευρὰ ἐκβεβλήται ἡ $\overline{\varepsilon\beta}$, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἐκτὸς οὕσα τῆς ἀπεναντίον καὶ ἐντὸς μείζων ἐστί. πολλῶν ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αἱ μὲν οὖν γεωμετρικαὶ δεῖξεις τοιαῦται. δῆλον δὲ ὅτι τὸ αἷτιον τούτου τοῦ συμπτώματός ἐστιν ἡ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τῆς ὑποτεϊνούσης τὴν γωνίαν ὑπεροχὴ κατὰ τὸ μέγεθος ἢ ἐλάττωσις· μείζων μὲν γὰρ οὕσα διΐστησιν ἐπὶ πλέον τὴν γωνίαν, ἐλαττωμένη δὲ συνελαττοῖ καὶ ἐπὶ μείον συνάγει. τοῦτο δὲ διὰ τὴν ἐπ' ἄκρον τάσιν τῆς εὐθείας. ἐπ' ἄκρον γὰρ αὕτη τεταμένη καὶ τῶν γωνιῶν τὰ μεγέθη κατὰ τὴν ἑαυτῆς αὔξησιν καὶ μείωσιν συμμετατίθησιν. καὶ ταῦτα λέγομεν ἐφ' ἑνὸς τριγώνου, ἐπεὶ δυνατόν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὑπὸ μείζονος καὶ ἐλάσσονος εὐθείας ὑποτείνεσθαι καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μείζω καὶ ἐλάττω

γωνίαν ὑποτείνειν. ἔστω γὰρ εἰ τύχοι τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, καὶ εἰλήφθω [FR317]
ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ τὸ $\overline{\delta}$ σημεῖον, καὶ ἴση ἢ $\overline{\alpha\epsilon}$ τῇ $\overline{\alpha\delta}$ [ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$] καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\delta\epsilon}$. τὴν οὖν πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ γωνίαν ὑποτείνουσιν αἱ $\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\beta\gamma}$, ὧν ἡ μὲν μείζων ἡ δὲ



ἐλάσσων, καὶ μυρίας ὅσας λαβεῖν δυνατὸν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὴν $\overline{\alpha}$ γωνίαν
ὑποτεινούσας μείζους καὶ ἐλάσσους εὐθείας. πάλιν ἔστω τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἰσοσκελὲς,
καὶ ἐλάσσων ἡ $\overline{\beta\gamma}$ τῶν $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐπὶ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ τὸ $\overline{\beta\delta\gamma}$,
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\delta}$ καὶ ἐκβεβλήσῃ ἐπὶ τὸ $\overline{\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν τοῦ $\overline{\alpha\beta\delta}$ τριγώνου



ἐκτός ἐστιν ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\epsilon}$ γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$, κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ
ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\delta}$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\gamma}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ καὶ
ὑποτείνει ἀμφοτέρως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα μείζονα καὶ ἐλάσσονα γωνίαν. δέδεικται δὲ
ὅτι τὴν αὐτὴν γωνίαν μείζους εὐθεῖαι καὶ ἐλάσσους ὑποτείνουσιν. ἀλλ' ἐπὶ τοῦ
αὐτοῦ τριγώνου μία εὐθεῖα μίαν ὑποτείνει γωνίαν καὶ ἡ μὲν μείζων τὴν μείζονα
ἐκ παντός, ἡ δὲ ἐλάσσων τὴν ἐλάσσονα καὶ τὸ αἴτιον ἐθεωρήσαμεν. [FR318]

Prop. XIX, theor. XII. Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μεί-
ζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Τοῦτό ἐστι τὸ ἀντίστροφον τῷ εἰρημένῳ θεωρήματι. καὶ ἐστὶν ἀπλοῦν ἐν
ἐκατέρῳ τὸ τε διδόμενον καὶ τὸ ζητούμενον. καὶ τὸ ἐκεῖ συμπέρασμα ὑπόθεσις
ἐστὶν ἐνταῦθα, ἡ δὲ ἐκεῖ ὑπόθεσις τούτου συμπέρασμα. προτέτακται δ' ἐκεῖνο,
διότι δεδομένην ἔχει τὴν ἀνισότητά των πλευρῶν, ἔπεται δὲ τοῦτο τὰς γωνίας
ἀνίσους ὑποθέμενον. δοκοῦσι γὰρ αἱ μὲν πλευραὶ τὰ εὐθύγραμμα περιέχειν, αἱ δὲ

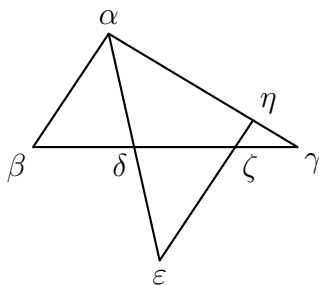
γωνίαι περιέχεσθαι. καὶ ὁ τρόπος δὲ τῆς ἀποδείξεως ἐπ' ἐκείνου μὲν δεικτικός, ἐπὶ δὲ τούτου διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς.

Ὁ μὲν οὖν γεωμέτρης ἐκ διαιρέσεως τὸ ἀδύνατον συλλογίζεται. τῶν γὰρ γωνιῶν οὐσῶν ἀνίσων λέγω, φησίν, ὅτι καὶ αἱ ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἄνισοι, καὶ ἡ μείζων ὑποτείνει τὴν δεδομένην μείζονα γωνίαν. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἡ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνουσα μείζων, ἴση ἔστιν ἢ ἐλάττων. ἀλλ' εἰ μὲν ἴση, καὶ αἱ γωνίαι, ἃς ὑποτείνουσιν, ἴσαι διὰ τὸ $\bar{\epsilon}$, εἰ δὲ ἐλάττων, καὶ ἡ γωνία, ἣν ὑποτείνει, ἐλάττων διὰ τὸ πρὸ τούτου. δέδεικται γὰρ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνουσα καὶ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα ἢ ἡλίσσων. ἔχουσι δὲ ἀνάπαλιν αἱ γωνίαι· μείζων ἄρα ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς. δυνατόν δὲ καὶ ἄνευ ταύτης τῆς διαιρέσεως δεῖξαι τὸ προκείμενον προαποδείξαντες λημμάτιόν τι τοιοῦτον·

[FR319]

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ καὶ ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεῖσα εἰς ἄνισα αὐτὴν διαιρῇ, αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ ἄνισοι ἔσονται, καὶ μείζων μὲν ἢ τῷ μείζονι τμήματι τῆς βάσεως συμπίπτουσα, ἐλάσσων δὲ ἢ ἐλάσσονι.

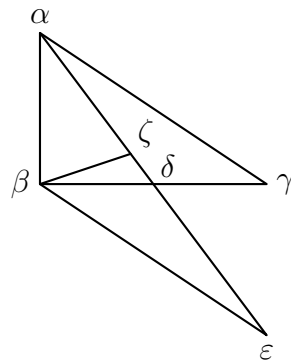
Ἐστω τρίγωνον τὸ $\overline{αβγ}$ καὶ τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ $\overline{α}$ γωνία, καὶ ἡ $\overline{αδ}$ εἰς ἄνισα τεμνέτω τὴν $\overline{βγ}$, καὶ μείζων ἡ $\overline{γδ}$ τῆς $\overline{βδ}$. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ $\overline{αγ}$ τῆς $\overline{αβ}$. ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{αδ}$ καὶ κείσθω ἴση ἡ $\overline{δε}$ τῇ $\overline{αδ}$. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ $\overline{δγ}$ τῆς $\overline{δβ}$, κείσθω ἴση τῇ $\overline{βδ}$ ἡ $\overline{δζ}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{εζ}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ὡς ἐπὶ τὸ $\overline{η}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{αδ}$ τῇ $\overline{δε}$ καὶ ἡ $\overline{βδ}$ τῇ $\overline{δζ}$, δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ



γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς κατὰ κορυφήν· βάσις ἄρα ἡ $\overline{\beta\alpha}$ βάσει τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ ἴση καὶ πάντα $\overline{\pi\alpha\sigma\iota\upsilon\varsigma}$, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\beta}$ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ αὕτη τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\eta}$ ἴση ἐστίν, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $\overline{\alpha\eta}$ τῇ $\overline{\epsilon\eta}$ ἴση διὰ τὸ ἕκτον. μείζων ἄρα ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$. ἡ δὲ $\overline{\epsilon\zeta}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση. μείζων ἄρα ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\alpha\beta}$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[FR320]

Τούτου προληφθέντος δείξομεν ὅτι ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἔστω τρίγωνον τὸ $\overline{αβγ}$ μείζονα ἔχον τὴν πρὸς τῷ $\overline{β}$ γωνίαν τῆς πρὸς τῷ $\overline{γ}$. λέγω ὅτι ἡ $\overline{αγ}$ τῆς $\overline{αβ}$ μείζων ἐστίν. τετμήσθω δίχα ἡ $\overline{βγ}$ κατὰ τὸ $\overline{δ}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{αδ}$, καὶ ἤχθω ἡ $\overline{δε}$ ἴση τῇ $\overline{αδ}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{βε}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{βδ}$ τῇ $\overline{δγ}$ καὶ ἡ $\overline{αδ}$ τῇ $\overline{δε}$, δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ἴσας



κατὰ κορυφὴν περιέχουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ βάσις ἡ $\overline{βε}$ τῇ $\overline{αγ}$, καὶ πάντα πᾶσιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{δβε}$ γωνία ἴση τῇ πρὸς τῇ $\overline{γ}$. ἐλάσσων δὲ [ἡ πρὸς τῷ $\overline{γ}$] τῆς ὑπὸ $\overline{αβδ}$. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{δβε}$ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ $\overline{αβδ}$. τετμήσθω οὖν δίχα ἡ ὑπὸ $\overline{αβε}$ τῇ $\overline{βζ}$ εὐθείᾳ· μείζων ἄρα ἡ $\overline{εζ}$ τῆς $\overline{ζα}$. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $\overline{αβε}$ ἡ πρὸς τῷ $\overline{β}$ γωνία δίχα ἐτμήθη τῇ $\overline{βζ}$ καὶ μείζων ἡ $\overline{εζ}$ τῆς $\overline{αζ}$, διὰ τὸ προδειχθὲν μείζων ἡ $\overline{βε}$ τῆς $\overline{βα}$. ἡ δὲ $\overline{βε}$ τῇ $\overline{αγ}$ δέδεικται ἴση. μείζων ἄρα ἡ $\overline{γα}$ τῆς $\overline{αβ}$. δέδεικται ἄρα τὸ ζητούμενον.

[FR321]

Καὶ φανερόν ὅτι τὴν ποικιλίαν τῆς ἀποδείξεως παραιτούμενος ὁ στοιχειωτὴς τὸν τρόπον τοῦτον ἐφυλάξατο καὶ τῇ ἐκ διαιρέσεως εἰς τὸ ἀδύνατον ἀγούσῃ δείξει προεχρήσατο βουλόμενος τὸ ἀντίστροφον ποιῆσαι τῷ προηγουμένῳ μηδενὸς μεταξὺ παρεμπίπτοντος, ἐπεὶ καὶ τὸ ὄγδοον ἀντιστρέφον πρὸς τὸ τέταρτον πολλὴν ἐνποίησε ταραχὴν δυσεπίγνωστον ποιῆσαν τὴν ἀντιστροφὴν. αἰρετώτερον γὰρ τὸ δι' ἀδυνάτου δείκνυναι τὰ ἀντιστρέφοντα μετὰ τοῦ τὴν συνέχειαν φυλάττειν ἢ τὸ διακόπτειν τὴν συνέχειαν μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως. διὸ δὴ τὰ ἀντίστροφα πάντα σχεδὸν δι' ἀδυνάτου δείκνυσιν.

[FR322]

Prop. XX, theor. XIII. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

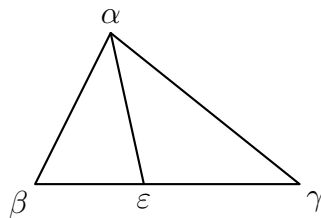
Τοῦτό τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἰώθησιν οἱ Ἑπικούρειοι καὶ ὄνῳ λέγοντες αὐτὸ δῆλον εἶναι καὶ μηδεμιᾶς δεῖσθαι κατασκευῆς· ὁμοίως δ' ἀνεπιστήμονος

ἔργον εἶναι τὰ τε ἐμφανῆ παραμυθίας ἀξιοῦν καὶ τοῖς ἀδήλοις αὐτόθεν πιστεύειν. ὁ γὰρ ταῦτα συγγέων φανερός ἐστι τὸ τε ἀναπόδεικτον καὶ τὸ ἀποδεικτὸν ἀγνοῶν. ὅτι δὲ καὶ ὄνῳ τὸ προκείμενον θεώρημα γνώριμον κατασκευάζουσιν ἐκ τοῦ τεθέντος χόρτου κατὰ τὸ ἕτερον πέρας τῶν πλευρῶν τὸν ὄνον τὴν μίαν ὁδεύειν πλευρὰν ἀλλὰ μὴ τὰς δύο τροφῆς ὁρεγόμενον.

Πρὸς δὲ ταῦτα λεκτέον ὅτι σαφές μὲν κατὰ τὴν αἴσθησιν ἔστω τὸ θεώρημα, οὕτω δὲ σαφές κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον. πολλὰ γὰρ τοῦτο πέπονθε τῶν πραγμάτων, οἷον θερμαίνει τὸ πῦρ· καὶ τοῦτο τῇ αἰσθήσει σαφές ἀλλὰ πῶς θερμαίνει τῆς ἐπιστήμης ἔργον ἐλεῖν, πότερον ἀσωμάτῳ δυνάμει ἢ σωματικαῖς τομαῖς, σφαιρικοῖς μορίοις ἢ πυραμοειδέσι. πάλιν ὅτι κινούμεθα τῇ αἰσθήσει δῆλον, πῶς δὲ κινούμεθα. παραστῆσαι τῷ λόγῳ χαλεπὸν, πότερον κατὰ ἡμέρας, ἢ κατὰ διάστημα· πῶς δὲ ἄπειρα δίψην. εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν πᾶν μέγεθος. ἔστω τοίνυν καὶ τοῦ τριγώνου τὸ μείζους εἶναι τὰς δύο τῆς μιᾶς τῇ αἰσθήσει καταφανές, ἀλλὰ πῶς τοῦτο γίνεται τῆς ἐπιστήμης ἔργον εἰπεῖν.

[FR323]

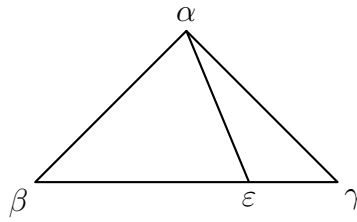
Ἀλλὰ πρὸς μὲν τοὺς Ἐπικουρείους καὶ ταῦτα ἀρχοῦντως ἀντειρήσθω· δεῖ δὲ καὶ τὰς ἄλλας ἀποδείξεις τοῦ προκειμένου θεωρήματος συντόμως ἱστορῆσαι, ὅσας οἱ περὶ **Ἡρώνα** καὶ **Πορφύριον** ἀνέγραψαν τῆς εὐθείας μὴ προσεκβαλλομένης, ὃ πεποίηκεν ὁ στοιχειωτής. ἔστω τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. δεῖ δὲ δεῖξει τὰς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ μείζους. τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ γωνία. ἐπεὶ οὖν



τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\beta\epsilon}$ γωνία ἐκτὸς ἢ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$ · ἀλλ' ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$ ἴση· ἢ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ πλευρὰ τῆς $\overline{\gamma\epsilon}$ μείζων. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\epsilon}$ μείζων. τριγώνου γὰρ τοῦ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$ ἐκτὸς ἢ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\beta}$ καὶ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\epsilon}$, τουτέστιν τῆς ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\beta}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\epsilon}$ μείζων. αἱ ἄρα $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ ὅλης μείζους. ὁμοίως δεῖξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Πάλιν ἔστω τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ · εἰ μὲν οὐκ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, πάντως αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς — τριῶν γὰρ ἴσων δύο ὁμοιοῦν διπλάσια τοῦ ενός — εἰ δὲ ἰσοσκελές, ἥτοι ἐσάσσονα ἔχει τὴν ἴσων ἑκατέρας τὴν βάσιν ἢ μείζονα. εἰ μὲν οὖν ἐλάσσων ἢ βάσις, πάλιν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς· εἰ δὲ μείζων ἢ βάσις, ἔστω ἡ $\overline{\beta\gamma}$ μείζων, καὶ ἀφηρήσθω ἴση ἑκατέρᾳ ἐκείνων ἡ $\overline{\beta\epsilon}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\epsilon\beta}$ ἐκτὸς ἢ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$ γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς

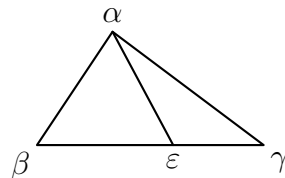
[FR324]



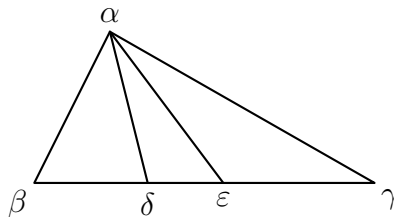
ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\beta}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\epsilon}$ μείζων. αἱ ἄρα περὶ τὴν $\overline{\alpha\epsilon}$ γωνίαι μείζουσιν ὅλης τῆς πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$, ὧν ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\alpha}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$, ἐπεὶ καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\epsilon}$ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\gamma}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\epsilon}$ μείζων, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\gamma\epsilon}$ μείζων. ἦν δὲ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\epsilon}$ ἴση. αἱ ἄρα $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ μείζουσιν τῆς $\overline{\beta\gamma}$. εἰ δὲ σκαληνὸν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ἔστω μέγιστη ἡ $\overline{\alpha\beta}$, μέση ἡ $\overline{\alpha\gamma}$, ἐλάχιστη ἡ $\overline{\beta\gamma}$. ἡ μὲν οὖν μέγιστη μεθ' ἑκατέρας ληφθεῖσα πάντως μείζων τῆς λοιπῆς· καὶ γὰρ καθ' αὐτὴν ἑκατέρας μείζων. εἰ δὲ τὴν $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ $\overline{\beta\gamma}$ δεῖξαι ζητοῖμεν τῆς $\overline{\alpha\beta}$ μεγίστης οὐσης μείζονας, ὥς ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ποιήσομεν ἀπὸ τῆς μεγίστης ἀφελόντες τῇ ἑτέρᾳ ἴσην, καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ $\overline{\gamma}$, καὶ ἀποχρησάμενοι ταῖς ἐκτὸς τῶν τριγώνων γωνίαις.

Πάλιν ἔστω τρίγωνον τυχὸν τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. λέγω ὅτι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ μείζουσιν εἰς τῆς $\overline{\beta\gamma}$. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἐλάσσουσιν, ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἀφηρήσθω τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση ἡ $\overline{\beta\epsilon}$. λοιπὴ ἄρα ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\epsilon}$ ἴση,

[FR325]



γωνίας ἴσας ὑποτείνουσιν. ὁμοίως δὴ καί, ἐπεὶ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$ ἴση, γωνίας ἴσας ὑποτείνουσιν. αἱ ἄρα πρὸς τῷ $\overline{\epsilon}$ γωνίαι ἴσαι καὶ αἱ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$, ὅπερ ἀδύνατον. πάλιν δὴ ἔστωσαν ἐλάσσουσιν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$, καὶ ἀφηρήσθω τῇ μὲν $\overline{\alpha\beta}$ ἴση ἡ $\overline{\beta\delta}$, τῇ δὲ $\overline{\alpha\gamma}$ ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$, ἴση ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$ τῇ ὑπὸ



$\overline{\beta\alpha\delta}$, καὶ ἐπεὶ ἴση $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$, ἴση ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\epsilon\alpha}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$. δύο ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$ $\overline{\gamma\epsilon\alpha}$ ἴσαι δυσὶν ταῖς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ καὶ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$, μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$, καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\gamma}$. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\beta\epsilon}$ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\epsilon\alpha}$, μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$, καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$ μείζων. αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$ $\overline{\gamma\epsilon\alpha}$ μείζους ἐκεῖ δύο τῶν ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$. ἦσαν δὲ ἴσαι αὐταῖς· ὅπερ ἀδύνατον. αἱ ἄρα $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ οὔτε ἴσαι εἰσὶν τῇ $\overline{\beta\gamma}$, οὔτε ἐλάσσους, ἀλλὰ μείζους. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

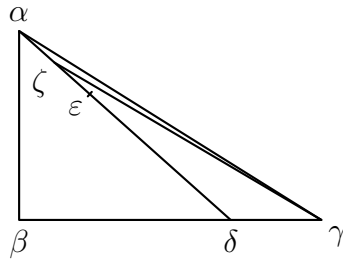
[FR326]

Prop. XXI, theor. XIII. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν δύο εὐθεῖαι συσταθῶσιν ἐντὸς ἀπὸ τῶν περάτων ἀρξάμεναι, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἐλάττους μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

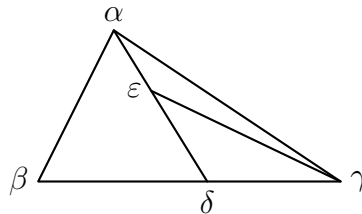
Τό μὲν δηλούμενον ὑπὸ τῆς προτάσεως φανερόν καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ παρὰ τῷ στοιχειωτῇ τὸ ἐναργὲς ἔχει καὶ ταῖς πρώταις ἀρχαῖς ἐπόμενον τὸ θεωρήμα. ἐκ γὰρ δύο θεωρημάτων ἡρτῆται τοῦ τε πρὸ τούτου δειχθέντος καὶ τοῦ ἐκκαιδεκάτου. πρὸς μὲν γὰρ τὸ δεῖξαι τὰς συσταθείσας ἐντὸς ἐλάσσονας τῶν ἐκτὸς ἐκείνου δεῖται τοῦ θεωρήματος, παντὸς τριγώνου αἱ δύο μείζους εἰσὶ τῆς λοιπῆς, πρὸς δὲ τὸ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἀποφῆναι μείζονα τῆς ὑπὸ τῶν ἐκτὸς περιεχομένης, ἐκεῖνο αὐτῷ συντελεῖ, τὸ παντὸς τριγώνου τὴν ἐκτὸς γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. λάβοις δ' ἂν ἅμα τῆς γεωμετρικῆς ἀκριβείας πίστιν καὶ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι παραδόξων ὑπόμνησιν, εἰ δεῖξαιμεν ὅτι δυνατόν ἐντὸς τριγώνου τινὸς ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν οὐχ ὅλης ἀλλὰ μέρους αὐτῆς συστήναι δύο εὐθείας μείζους τῶν ἐκτὸς, καὶ πάλιν μείονα (?) γωνίαν περιεχοῦσας τῆς ὑπὸ τῶν ἐκτὸς περιεχομένης. τούτου γὰρ δειχθέντος ἅμα μὲν δῆλον ὅτι ἀναγκαίως ὁ στοιχειωτὴς προσέειπεν τὸ ἀπὸ τῶν **περάτων** ἀρχεσθαι δεῖν τῆς κοινῆς βάσεως τὰς ἐντὸς συνισταμένας καὶ τὸ ἐπὶ μιᾷ ὅλης συνίστασθαι, ἀλλὰ οὐκ ἐπὶ μέρους τῆς ὅλης. ἅμα δὲ καὶ ὅπερ εἶπομεν ἐν τι τῶν ἐν γεωμετρίας παραδόξων ἀναφανήσεται. πῶς γὰρ οὐ παράδοξον, εἰ αἱ μὲν ἐπὶ τῆς ὅλης συνιστάμεναι τῶν ἐκτὸς ἐλάσσους εἰσὶν, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους μείζονες; ἔστω δὴ οὖν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ $\overline{\beta}$ γωνίαν καὶ εἰλήφῃω σημεῖον τυχὸν τὸ $\overline{\delta}$ ἐπὶ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\delta}$. μείζων ἄρα ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῆς $\overline{\alpha\beta}$. ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\delta}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἡ $\overline{\delta\epsilon}$, καὶ ἡ $\overline{\epsilon\alpha}$ διηρήσθω δίχα κατὰ τὸ $\overline{\zeta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\gamma\zeta}$. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστι τὸ $\overline{\alpha\gamma\zeta}$ αἱ $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\zeta\gamma}$ μείζους εἰσὶ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$. ἀλλ' ἡ $\overline{\alpha\zeta}$ ἴση τῇ $\overline{\zeta\epsilon}$. αἱ ἄρα $\overline{\zeta\epsilon}$ $\overline{\zeta\gamma}$ μείζους τῆς $\overline{\alpha\gamma}$. ἴση δὲ ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ τῇ $\overline{\alpha\beta}$. αἱ ἄρα $\overline{\zeta\gamma}$ $\overline{\zeta\delta}$ μείζους τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ εἰσιν ἐντὸς. πάλιν ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ μείζονα τὴν βάσιν ἔχον τὴν $\overline{\beta\gamma}$ ἑκατέρας τῶν ἴσων,

[FR327]

[FR328]



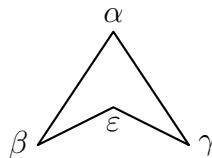
καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\beta\delta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\delta}$, καὶ σημείον ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\delta}$ τυχὸν εἰλήφθω τὸ ϵ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ



$\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$, καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\overline{\epsilon\delta\gamma}$ ἐκτός ἐστιν ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\alpha}$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\gamma}$, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\gamma}$. πολλῶ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\gamma}$. καὶ περιέχεται ἡ μὲν ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ ὑπὸ τῶν ἐκτός, ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\gamma}$ ὑπὸ τῶν ἐντός. συνεστάθησαν ἄρα ἐντός τοῦ τριγώνου αἱ $\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\gamma}$ γωνίαν περιέχουσαι ἐλάσσονα τῶν ἐκτός, καὶ δέδεικται τὸ προκείμενον οὐ προσχρησαμένων ἡμῶν ταῖς παραλλήλοις τῶν ἐξηγητῶν. ἀναγκαῖον ἄρα τὰς συνεσταμένας εὐθείας ἀπὸ τῶν περάτων ἄρχεσθαι τῆς βάσεως. αἱ γὰρ ἐπὶ μέρους αὐτῆς συνιστάμεναι καὶ μείζους δείκνυνται ποτε τῶν ἐκτός καὶ ἐλάσσονα περιέχουσαι γωνίαν.

Οὕτω δὲ καὶ συνισταμένων ἀπὸ τῶν περάτων ἀναφαίνεται καὶ τὸ εἶδος τῶν καλουμένων ἀκιδοειδῶν τριγώνων, ἐν καὶ τοῦτο τῶν ἐν γεωμετρίας παραδόξων τριγώνων τετράπλευρον εὐρεῖν οἷον τὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$. περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τεττάρων πλευρῶν τῶν $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\epsilon}$ $\overline{\epsilon\beta}$, τρεῖς δὲ ἔχει γωνίας, μίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ $\overline{\beta}$,

[FR329]



ἐτέραν δὲ τὴν πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$, λοιπὴν δὲ τὴν πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$. τετράπλευρον ἄρα ἐστὶ τρίγωνον τὸ προκείμενον σχῆμα.

Prop. XXII, probl. VIII. Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν
 τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ἴσαι, τρίγωνον συστήσασθαι.
 δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους εἶναι πάντη μεταλαμ-
 βανομένας.

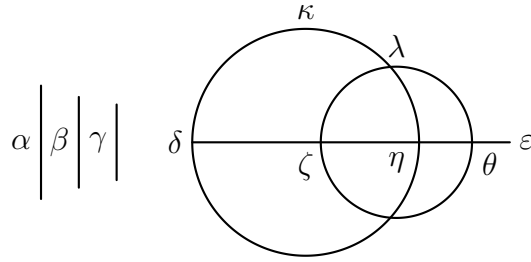
Ἐπὶ τὰ προβλήματα μετεληλύθαμεν αὖθις· καὶ παρακελεύεται τριῶν ἐκκει-
 μένων εὐθειῶν, ὧν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς, σφιστήσασθαι τρίγωνον ἐξ ἴσων
 πλευρῶν ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, πρῶτον μὲν τοῦτο συνιδῶν, ἐξ αὐτῶν ἐκείνων
 θέσιν ἤδη λαβουσῶν εἰρημένην συστήναι τρίγωνον ἀδύνατον, ἀλλ' ἐκ τῶν ἴσων
 αὐταῖς δυνατόν, ἔπειθ' ὅτι δεῖ τὰς εὐθείας τὰς συμπληροῦν μελλούσας τὸ τρί-
 γωνον τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους ἔχειν πάντη μεταλαμβανομένας — παντὸς
 γὰρ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ μείζους εἰσὶ τῆς λοιπῆς, ὥς δέδεικται — καὶ διὰ
 ταύτην τὴν αἰτίαν προσθεῖς, ὥς ἄρα ἀναγκαῖον καὶ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν τὰς
 δύο μείζους εἶναι τῆς λοιπῆς κατὰ πᾶσαν λῆψιν, ἥ οὐκ ἔσται τρίγωνον ἐκ τῶν
 ἴσων αὐταῖς εὐθειῶν, πρὸς δὲ τούτοις καὶ τὰς ἐνστάσεις ἀπάσας ἀνελῶν τὰς
 πρὸς τὴν κατασκευὴν φερομένας, διὰ τῆς προσθήκης ταύτης μόνης κάκεινας
 λύεσθαι δυναμένας.

[FR330]

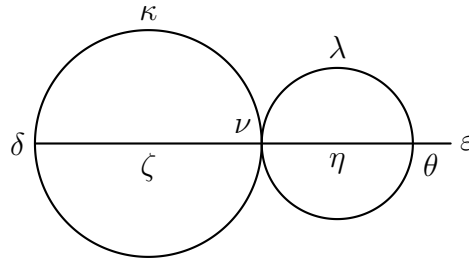
Ἔστιν οὖν τὸ πρόβλημα τῶν διωρισμένων, ἀλλ' οὐ τῶν ἀδιορίστων. καὶ
 γὰρ τῶν προβλημάτων ὥσπερ τῶν θεωρημάτων τὰ μὲν ἔστιν ἀδιόριστα, τὰ δὲ
 διωρισμένα. ἐὰν μὲν γὰρ εἴπωμεν ἀπλῶς οὕτως ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων τρισὶ ταῖς
 δοθείσαις συστήσασθαι τρίγωνον, ἀδιόριστον καὶ ἀδύνατον, ἐὰν δὲ προσθῶμεν,
 ὧν αἱ δύο μείζους εἰσὶ τῆς λοιπῆς πάντη μεταλαμβανόμεναι, διωρισμένον τε καὶ
 δυνατόν. γίνεται γὰρ αὐ καὶ τοῦτο· ὥσπερ τῶν θεωρημάτων κατὰ τὸ ἀληθές
 καὶ ψεῦδος ἢ διαίρεσις, οὕτω καὶ τῶν προβλημάτων κατὰ τὸ δυνατόν ἀποφανθέν
 [καὶ τὸ ἀδύνατον].

Ὅτι δὲ καὶ αἱ πρὸς τὴν κατασκευὴν ἐνστάσεις ἐντεύθεν λύονται, μάθοιμεν
 ἂν σμικρὸν εἰς αὐτὴν ἐπιβλέψαντες. ἐπακολουθήσομεν γὰρ τοῖς τοῦ γεωμέτρου
 ῥήμασιν. ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι $\bar{\alpha}$ $\bar{\beta}$ $\bar{\gamma}$, ὧν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς πάντη
 μεταλαμβανόμεναι, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὸ προσταχθέν. ἐκκείσθω τις εὐθεῖα
 ἢ $\bar{\delta}$ ἐπὶ θάτερα μὲν πεπερασμένη, οἷον κατὰ τὸ $\bar{\delta}$, ἐπὶ θάτερα δὲ ἄπειρος,
 καὶ κείσθω τῇ μὲν $\bar{\alpha}$ ἴση ἢ $\bar{\delta}\zeta$, τῇ δὲ $\bar{\beta}$ ἴση ἢ $\bar{\zeta}\eta$, τῇ δὲ $\bar{\gamma}$ ἴση ἢ $\bar{\eta}\theta$. καὶ
 κέντρῳ τῷ ζ , διαστήματι δὲ τῷ $\bar{\zeta}\delta$ κύκλος γεγράφθω ὁ κ , καὶ πάλιν κέντρῳ
 τῷ η , διαστήματι δὲ τῷ $\bar{\eta}\theta$ κύκλος γεγράφθω ὁ λ , καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους
 οἱ κύκλοι. τοῦτο γὰρ ἔλαβεν ὁ στοιχειωτής. πόθεν οὖν τοῦτο; φησὶν τις.
 μήποτε γὰρ ἢ ἐφάπτονται μόνον ἀλλήλων, ἢ οὐδὲ ἐφάπτονται; τῶν γὰρ τριῶν ἐν
 τι πάσχειν αὐτοῦς ἀναγκαῖον, ἢ τέμνειν ἀλλήλους, ἢ ἐφάπτεσθαι, ἢ διεστάναι
 ἀπ' ἀλλήλων. λέγω δὲ οὖν ὅτι τέμνουσιν ἐξ ἀναγκῆς ἀλλήλους. ἐφαπτέσθωσαν
 γὰρ πρότερον ἀλλήλων. ἐπεὶ τοίνυν τὸ ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ κ κύκλου, ἴση ἐστὶν
 ἢ $\bar{\delta}\zeta$ τῇ $\bar{\zeta}\nu$, καὶ ἐπεὶ τὸ η κέντρον ἐστὶ τοῦ λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ $\bar{\eta}\theta$ τῇ

[FR331]

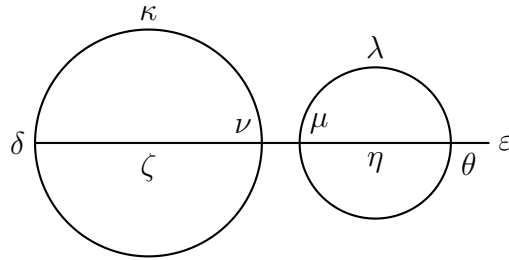


$\overline{\eta\nu}$ · δύο δὲ αἱ $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\eta\theta}$ ἴσαι μιᾷ τῇ $\overline{\zeta\eta}$. ἔκειντο δὲ μείζους αὐτῆς, ὥσπερ καὶ ἡ



$\overline{\alpha}$ μετὰ τῆς $\overline{\gamma}$ τῆς $\overline{\beta}$ μείζων· ἴσαι γὰρ ἐκαίναίς. πάλιν, εἰ δυνατόν, διεστάτωσαν ἀλλήλων αἱ κύκλοι, ὥς οἱ $\overline{\kappa}$ $\overline{\lambda}$. ἐπεὶ οὖν τὸ $\overline{\zeta}$ τοῦ $\overline{\kappa}$ κέντρον, ἴση ἡ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\zeta\nu}$, καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{\eta}$ τοῦ $\overline{\lambda}$ κέντρον ἡ $\overline{\theta\eta}$ ἴση τῇ $\overline{\eta\mu}$. μείζων ἄρα ὅλη ἡ $\overline{\zeta\eta}$ τῶν $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\theta\eta}$. ὑπερέχει γὰρ ἡ $\overline{\zeta\eta}$ τῇ $\overline{\nu\mu}$ τῶν $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\eta\theta}$. ἔκειτο δὲ τὰς $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\theta\eta}$ μείζους

[FR332]



εἶναι τῆς $\overline{\zeta\eta}$, ὥσπερ καὶ τὰς $\overline{\alpha}$ $\overline{\gamma}$ τῆς $\overline{\beta}$. ἴση γὰρ ἡ μὲν $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ $\overline{\zeta\eta}$ τῇ $\overline{\beta}$, ἡ δὲ $\overline{\theta\eta}$ τῇ $\overline{\gamma}$. ἀνάγκη ἄρα τοὺς $\overline{\kappa}$ $\overline{\lambda}$ κύκλους τέμνειν ἀλλήλους, ὥστε ὁ στοιχειωτῆς ὀρθῶς τέμνοντας ἔλαβεν ἀλλήλους τοὺς κύκλους, ἐπειδὴ καὶ τῶν τριῶν εὐθειῶν ἐπέθετο τὰς δύο μείζους τῆς λοιπῆς πάντῃ μεταλαμβανομένας καὶ οὔτε ἴσας οὔτε ἐλάττους τῆς μιᾶς. ἀνάγκη δὲ ἐφαπτομένων μὲν ἴσας εἶναι, διεστώτων δὲ ἐλάσσους τὰς δύο τῆς λοιπῆς.

[FR333]

Prop. XXIII, probl. VIIL. Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ

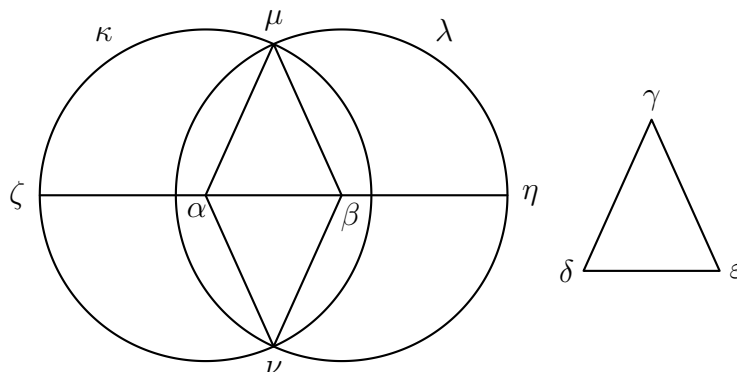
τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνία ἴσην
γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Πρόβλημα καὶ τοῦτο, **Οἰνοπίδου** μὲν εὕρημα μᾶλλον, ὥς φησὶν **Εὐδημος**,
γωνίας δὲ σύστασιν ἀπαιτοῦν ἴσης ἄλλη τῇ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ πρὸς
τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ. τὸ μὲν οὖν τὴν δοθεῖσαν
γωνίαν εὐθύγραμμον ἀναγκαίως εἶναι προσέθηκεν, ἐπειδὴ καὶ ἀδύνατον πάσῃ
γωνία ἴσην γωνίαν πρὸς εὐθείᾳ συστήσασθαι. δέδεικται γὰρ ὅτι τῶν περι-
φερογράμμων γωνιῶν δύο μόνον εἰσὶν εὐθυγράμμοις ἴσαι, ἥ τε τοῦ πελέκεως
πάσῃ εὐθυγράμμῳ ἴση δεικνυμένη καὶ ἡ τοῦ μηνοειδοῦς σχήματος διμοίρῳ ὀρθῆς
ἴση οὔσα. γίνεται δὲ τὸ μηνοειδὲς τοῦτο δύο κύκλων διὰ τῶν κέντρων τεμνόντων
ἀλλήλους. τὸ δὲ πρὸς εὐθείᾳ τινὶ γίνεσθαι τὴν σύστασιν τῆς γωνίας ὠρισμένην
ποιεῖ τὴν συνισταμένην καὶ οὐκ ἀδιάφορον κατὰ τὸ εἶδος, ἀλλ' ἥτοι εὐθύγραμμον
ἢ μιστὴν. οὐδεμιᾶς δὲ μιστῆς ἴσης εἶναι δυναμένης εὐθυγράμμῳ πρόδηλον ὅτι
καὶ αὕτῃ πάντως εὐθύγραμμός ἐστιν.

[FR334]

Ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς ἀπλῶς προσχρησάμενος τῷ πρὸ τούτου προβλήματι
καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων τρισὶ ταῖς δοθείσαις συστήσας τρίγωνον ἐποίησεν τὸ
προσταχθέν, λάβοις δ' ἂν τὴν σύστασιν τοῦ τριγώνου διδασκαλικώτερον τὸν
τρόπον τοῦτον. ἐστω εὐθεῖα ἡ $\overline{\alpha\beta}$, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθέν σημείον τὸ $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ
δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $\gamma\delta\epsilon$. δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ προσταχθέν. ἐπεζεύχθω
ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ $\overline{\alpha\beta}$, ὥς ἐπὶ τὰ ζ ἢ η , καὶ κείσθω τῇ μὲν
 $\overline{\gamma\delta}$ ἴση $\overline{\zeta\alpha}$, τῇ δὲ $\overline{\delta\epsilon}$ ἴση ἡ $\overline{\alpha\beta}$, τῇ δὲ $\overline{\gamma\epsilon}$ ἡ $\overline{\beta\eta}$, καὶ κέντρῳ τῷ $\overline{\alpha}$, διαστήματι
δὲ τῷ $\overline{\zeta\alpha}$ κύκλος γεγράφθω ὁ κ , καὶ πάλιν ὥσπερ ἐπὶ τοῦ πρὸ τούτου κέντρῳ
τῷ $\overline{\beta}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\beta\eta}$ κύκλος γεγράφθω ὁ λ . τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους
οἱ κύκλοι ὥς προδέδεικται. τεμνέτωσαν κατὰ τὰ μ ν σημεία, καὶ ἀπὸ τοῦ μ
ἐπιζεύχωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα, καὶ ἀπὸ τοῦ ν ὡσαύτως. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\zeta\alpha}$ τῇ

[FR335]

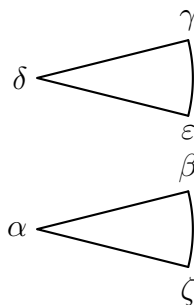


$\overline{\alpha\mu}$ καὶ τῇ $\overline{\alpha\nu}$, ἡ δὲ $\overline{\zeta\alpha}$ ἴση τῇ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἡ $\overline{\alpha\nu}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἴσαι τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$. πάλιν ἐπεὶ

ἴση ἢ $\overline{\eta\beta}$ τῇ $\overline{\beta\mu}$ καὶ τῇ $\overline{\beta\nu}$, ἡ δὲ $\overline{\eta\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$, ἡ ἄρα $\overline{\beta\mu}$ καὶ ἡ $\overline{\beta\nu}$ ἴσαι τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$. ἀλλὰ καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\delta\epsilon}$. δύο ἄρα αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\mu}$ ἴσαι ταῖς $\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\delta\gamma}$ καὶ βάσις ἡ $\overline{\beta\mu}$ ἴση τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\mu\alpha\beta}$ ἴση τῇ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$. καὶ πάλιν δύο αἱ $\overline{\nu\alpha}$ $\overline{\alpha\beta}$ ἴσαι δυσὶν ταῖς $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\delta\epsilon}$, καὶ βάσις ἡ $\overline{\nu\beta}$ βάσει τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$ ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\nu\alpha\beta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$. καὶ γέγονεν τὸ προσταχθὲν διπλασίως. οὐ γὰρ μίαν μόνον, ἀλλὰ δύο συνεστησάμεθα γωνίας ἴσας τῇ δοθείσῃ ἐφ' ἐκάτερα τῆς $\overline{\alpha\beta}$ εὐθείας, ἵνα καὶ ἐν τοῖς ἐξῆς, ἐφ' ὁπότερα ἂν βουλώμεθα ποιεῖσθαι τὴν σύστασιν, ἀναμφισβήτητον εἶη καὶ μὴ τις ἀντιλέγη.

Ταῦτα μὲν οὖν πρὸς τὴν τοῦ στοιχειωτοῦ κατασκευὴν συμβαλλόμεθα, τὴν δὲ **Ἀπολλωνίου** δεῖξιν οὐκ ἐπαινοῦμεν, ὡς δεομένην τῶν ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ δεικνυμένων. λαβὼν γὰρ ἐκεῖνος γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ $\overline{\gamma\delta\epsilon}$ καὶ εὐθεῖαν τὴν $\overline{\alpha\beta}$ κέντρῳ τῷ $\overline{\delta}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\gamma\delta}$ γράφει τὴν $\overline{\gamma\epsilon}$ περιφέρειαν, καὶ ὡσαύτως κέντρῳ τῷ $\overline{\alpha}$, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\alpha\beta}$ τὴν $\overline{\zeta\beta}$, καὶ ἀπολαβὼν τῇ $\overline{\gamma\epsilon}$ ἴσην τὴν $\overline{\zeta\beta}$ ἐπιζεύγνυσι τὴν $\overline{\alpha\zeta}$. καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυίας τὰς $\overline{\alpha}$ $\overline{\delta}$ γωνίας ἴσας ἀποφαίνει. δεῖ δὲ προλαβεῖν καὶ ὅτι ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\gamma\delta}$, ἵνα καὶ οἱ

[FR336]



κύκλοι ἴσοι ᾧσι. τὴν οὖν τοιαύτην κατασκευὴν ὡς τοῖς ὕστερον προσχρωμένῃ ἀλλοτρίαν εἶναι τῆς στοιχειώσεως νομίζομεν, τὴν δὲ τοῦ γεωμέτρου προτίθεμεν ὡς ταῖς ἀρχαῖς ἐπομένην.

Prop. XXIII, theor. XV. Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

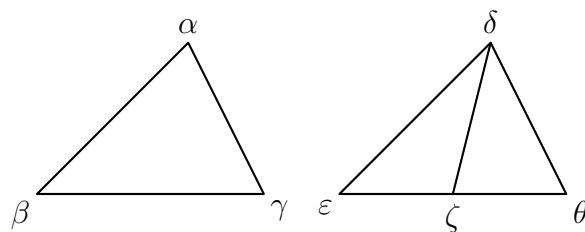
Πάλιν ἐπὶ τὰ θεωρήματα μεταβέβηκε καὶ τοὺς ὁμοίους ἀποδίδωσι περὶ τῆς ἀνισότητος λόγους ἐπὶ δύο τριγώνων, οὓς καὶ ἐπὶ τῆς ισότητος. δύο γὰρ ὑποθέμενος τρίγωνα δύο πλευρὰς ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν ὅτε μὲν ἴσην ἐν ἐμφοτέροις τίθεται, ὅτε δὲ ἀνισον, καὶ τῇ

μὲν ἰσότητι ταύτης ἐπομένην ἔδειξεν τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων καὶ τῇ τούτων ἰσότητι δείκνυσιν ἐπακολουθοῦσαν τὴν τῶν γωνιῶν τῶν πρὸς ταῖς κορυφαῖς ἰσότητα, καὶ τῇ ἀνισότητι τὴν ἀνισότητα. τοῦτο τοίνυν τὸ θεωρήμα τὸ νῦν προτεινόμενον ἐντίκειται μὲν τῷ τετάρτῳ — ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἴσας ὑπέθετο τὰς πρὸς ταῖς κορυφαῖς τῶν τριγώνων γωνίας, τοῦτο δὲ ἀνίσους. καὶ ἐκεῖνο μὲν ἴσας αὐτῶν ἀπεδείκνυ τὰς βάσεις τοῦτο δὲ ὡσαύτως ταῖς γωνίαις ἀνίσους — προηγεῖται δὲ τοῦ ἐφεξῆς θεωρήματος. ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἀπὸ τῶν βάσεων ἐπὶ τὰς γωνίας, καθ' ὅς ὑποτείνουσιν αἱ βάσεις, μετὰγει τὸν τῆς ἀνισότητος λόγον, τοῦτο δὲ ἀνάπαλιν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις τὰς ὑπ' αὐτάς. ὥσπερ αὖ τὸ ἐφεξῆς ἀντίστροφον μὲν ἐστὶ πρὸς τοῦτο κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον, ἀντικείμενον δὲ τῷ ὁψδῶ θεωρήματι. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς ἰσότητος τῶν βάσεων ἴσας ἀποδείκνυσι τὰς πρὸς ταῖς κορυφαῖς γωνίας, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἀνισότητος τῶν βάσεων καὶ ἐκείνας ἀνίσους ἀποφαίνει. κοινὸν δὲ τοῖς τέτρασιν, ὧν δύο μὲν περὶ τὸ ἴσον στρέφεται, τὸ δ καὶ τὸ η , δύο δὲ περὶ τὸ ἄνισον, τοῦτό τε καὶ τὸ ἐξῆς, καὶ δύο μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἄρχεται, τὸ τέταρτον καὶ ὁ νυνὶ προεθέμεθα ζητεῖν, δύο δὲ ἀπὸ τῶν βάσεων, τό τε ὄγδοον καὶ τὸ ἐφεξῆς τεταγμένον — δεῖ (?) οὖν τούτοις τέτρασι τῷ δ καὶ η καὶ $\kappa\delta$ καὶ $\kappa\epsilon$ τοῖς ἅπασιν τὸ τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τούτων γὰρ ἀνίσων οὐσῶν περιττὴ πᾶσα ζητήσις καὶ ἀπάτης οὐκ ἀπηλλαγμένη.

[FR337]

Τοσαῦτα καθόλου περὶ τῶν προκειμένων εἰρήσθω. φέρε δὲ καὶ τὴν τοῦ στοιχειωτοῦ κατασκευὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀνασκευώμεθα, καὶ τὸ ἐλλείπον αὐτῇ προσθῶμεν. λαβὼν γὰρ δύο τρίγωνα τὰ $\alpha\beta\gamma$ $\delta\epsilon\zeta$ ἴσας ἔχοντα τὰς $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$ ταῖς $\delta\epsilon$ $\delta\zeta$ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν πρὸς τῷ α γωνίαν τῆς πρὸς τῷ δ μείζονα, δεῖξαι τε βουλόμενος τὴν $\beta\gamma$ τῆς $\epsilon\zeta$ μείζονα πρὸς τῇ $\epsilon\delta$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ δ συνίστησιν ἴσην γωνίαν τῇ πρὸς τῷ α τὴν ὑπὸ $\epsilon\delta\theta$ — μείζων γὰρ ἢ πρὸς τῷ α τῆς πρὸς τῷ δ — καὶ ἀφείλεν ἴσην τῇ $\alpha\gamma$ τὴν $\delta\theta$. τῆς οὖν $\epsilon\zeta$ εὐθείας ἐκβαλλομένης τὸ θ σημεῖον ἢ ἀνωτέρω πίπτει τῆς εὐθείας, ἢ ἐπ' αὐτῆς, ἢ ὑπ' αὐτήν. ὁ μὲν δὴ στοιχειωτῆς ὡς ἀνωτέρω κείμενον ἔλαβεν. ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας. πάλιν οὖν αὐτόθεν δείζομεν. δύο γὰρ αἱ $\alpha\beta$

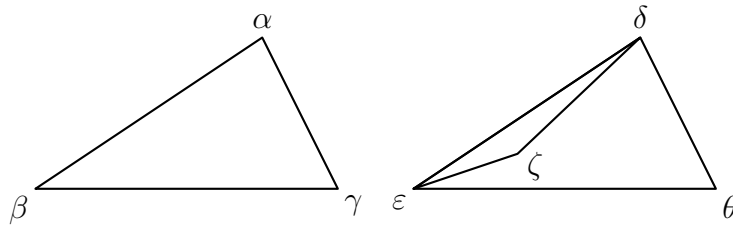
[FR338]



$\alpha\gamma$ δύο ταῖς $\delta\epsilon$ $\delta\theta$ ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. καὶ ἢ $\beta\gamma$ ἄρα βάσις τῇ $\epsilon\theta$ ἴση. ἀλλ' ἢ $\epsilon\theta$ τῆς $\epsilon\zeta$ μείζων ὥστε καὶ ἢ $\beta\gamma$ τῆς $\epsilon\zeta$ μείζων. ἀλλὰ δὴ

[FR339]

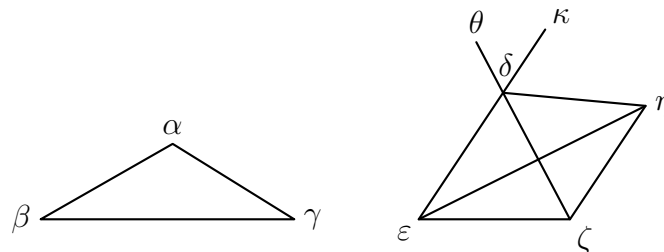
ἔστω τῆς $\overline{εζ}$ κατωτέρω κείμενον. ἐπιζεύξαντες οὖν τὴν $\overline{εθ}$ ἐροῦμεν ὥς, ὅτι αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{αγ}$ ταῖς $\overline{δε}$ $\overline{δθ}$ ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ ἡ $\overline{βγ}$ ἄρα ἴση τῇ $\overline{εθ}$. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $\overline{δεθ}$ ἐντὸς συνέστησαν αἱ $\overline{δζ}$ $\overline{ζε}$ ἐπὶ τῆς $\overline{δε}$,



ἐλάσσους εἰσὶ τῶν ἐκτὸς. ἴση δὲ ἡ $\overline{δθ}$ τῇ $\overline{δζ}$ — καὶ γὰρ τῇ $\overline{αγ}$ — μείζων ἄρα ἡ $\overline{θε}$ τῆς $\overline{εζ}$. ἀλλ' ἡ $\overline{θε}$ τῇ $\overline{βγ}$ ἐστὶν ἴση, μείζων ἄρα ἡ $\overline{βγ}$ τῆς $\overline{εζ}$. κατὰ πᾶσαν ἄρα θέσιν δέδεικται τὸ θεωρήμα.

Διὰ τί δὴ οὖν οὐχ, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ τετάρτου θεωρήματος προσapéδειξεν ὅτι καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ἴσα ἐστίν, οὕτω καὶ ἐν τούτῳ προσέθηκεν, ὅτι πρὸς τῇ ἀνισότητι τῶν βάσεων καὶ τὰ ἐμβαδὰ ἄνισα; πρὸς δὲ ταύτην τὴν ἀπορίαν λεγέσθω ὅτι οὐχὶ ὁ αὐτὸς λόγος ἐπὶ τε τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ βάσεων καὶ τῶν ἀνίσων. ἴσαις μὲν γὰρ οὖσαις ταῖς γωνίαις καὶ ταῖς βάσεσιν ἔπεται καὶ ἡ τῶν τριγώνων ἰσότης. ἀνίσοις δὲ ἄρα οὖσαις οὐκ ἀνάγκη τὴν ἀνισότητα τῶν ἐμβαδῶν ἀκολουθεῖν, ἀλλὰ γὰρ δύναται καὶ ἴσα εἶναι τὰ τρίγωνα καὶ ἄνισα, καὶ μείζον τὸ ἔχον τὴν μείζονα γωνίαν καὶ βάσιν καὶ αὖ ἔλασσον. διὰ τοῦτο οὖν ὁ στοιχειωτὴς παρέλειπεν τὴν τῶν τριγώνων σύγκρισιν, ἅμα δὲ καὶ ὅτι ἡ περὶ τούτων θεωρία τῆς τῶν παραλλήλων δεῖται πραγματείας. εἰ δὲ δεῖ προλαβόντας ἡμᾶς τὰ μέλλοντα δείκνυσθαι καὶ νῦν ποιήσασθαι τὴν τῶν ἐμβαδῶν παράθεσιν, λέγομεν ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν $\overline{α}$ $\overline{δ}$ γωνιῶν — γινέσθω δὲ ὁ λόγος ἐπὶ τῆς ἐν τῷ στοιχείῳ καταγραφῆς — ἴσα δείκνυται τὰ τρίγωνα, μειζόνων δὲ δυεῖν ὀρθῶν ἔλασσον τὸ ἔχον τὴν μείζονα γωνίαν, ἐλασσόνων δὲ οὐσῶν, μείζον. ἔστω γὰρ τὰ ἐν τῷ στοιχείῳ κατασκευασμένα καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $\overline{εδ}$ $\overline{ζδ}$, καὶ ὑποκείσθωσαν αἱ ὑπὸ $\overline{βαγ}$ $\overline{εδζ}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ $\overline{βαγ}$

[FR340]

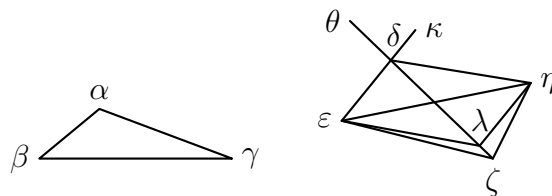


ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{εδη}$, αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{εδη}$ $\overline{εδζ}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ

$\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\kappa\delta\eta}$ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσαι. κοινή ἀφηρήσθω ἡ $\overline{\epsilon\delta\eta}$, λοιπὴ ἄρα ἡ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἴση. ἀλλ' ἡ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ ἴση τῇ $\overline{\theta\delta\kappa}$ — κατὰ κορυφὴν γὰρ — καὶ ἡ $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἄρα. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\overline{\eta\delta\zeta}$ ἐκτός ἐστὶν ἡ $\overline{\epsilon\delta\theta}$, ἴση ἐστὶ ταῖς δύο ἀπεναντίον ταῖς πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ καὶ $\overline{\zeta}$. ἀλλὰ αὐταὶ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ γὰρ ἡ $\overline{\delta\eta}$ τῇ $\overline{\delta\zeta}$ · ἡ ἄρα $\overline{\eta\delta\theta}$ διπλῇ τῆς πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ γωνίας. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ τῇ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\kappa\delta\eta}$, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ τῇ $\overline{\zeta\eta}$. τὰ ἄρα $\overline{\eta\delta\epsilon}$ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$ τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν τῆς $\overline{\delta\epsilon}$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $\overline{\delta\epsilon}$ καὶ $\overline{\eta\zeta}$ · ἴσα ἄρα ἐστίν· ἀλλὰ τὸ $\overline{\eta\delta\epsilon}$ τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἴσον, καὶ τὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ ἄρα τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἴσον. καὶ ὁρᾷς ὅτι τριῶν ἐδεήθημεν θεωρημάτων, ἃ τῆς τῶν παραλλήλων ἐστὶ πραγματείας, ἐνὸς μὲν ὅτι παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτός γωνία δύο ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση, ἐτέρου δὲ ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ ἴσας ποιῇ, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι, τοῦ τρίτου δὲ ὅτι τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τρίγωνα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἐστίν· ἃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς εἰδὼς παρήκεν τὴν τῶν τριγώνων σύγκρισιν. ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν αἱ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ γωνίαι μείζους δυεῖν ὀρθῶν καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτά. ἐπεὶ οὖν αἱ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$, τουτέστιν αἱ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ μείζους δύο ὀρθῶν, αἱ δὲ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἴσαι δύο ὀρθαῖς, κοινῆς ἀφαιρουμένης τῆς $\overline{\epsilon\delta\eta}$, μείζων ἡ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ τῆς $\overline{\eta\delta\kappa}$, τουτέστιν ἡ $\overline{\epsilon\delta\theta}$ μείζων τῆς $\overline{\eta\delta\kappa}$. μείζων ἄρα ἡ διπλῇ [τῆς $\overline{\eta\delta\theta}$, τουτέστι διπλῆς] τῆς πρὸς

[FR341]

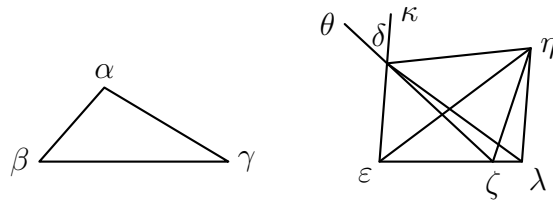
[FR342]



τῷ $\overline{\eta}$ γωνίας. ἡ ἄρα $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ $\overline{\eta}$. κείσθω ἴση τῇ $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἡ $\overline{\delta\eta\lambda}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\overline{\epsilon\lambda}$. παράλληλος ἄρα ἡ $\overline{\eta\lambda}$ τῇ $\overline{\delta\epsilon}$. τὰ ἄρα $\overline{\eta\delta\epsilon}$ $\overline{\lambda\delta\epsilon}$ τρίγωνα ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ $\overline{\lambda\delta\epsilon}$ τοῦ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$ ἐλάσσων· τὸ ἄρα $\overline{\eta\delta\epsilon}$ ἐλάσσων τοῦ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$. ἴσον δὲ τὸ $\overline{\eta\delta\epsilon}$ τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ · τὸ ἄρα $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ἐλάσσων τοῦ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$ τὸ ἔχον τὴν μείζονα [γωνίαν]. τὸ δὴ τρίτον ἔστωσαν ἐλάσσους ὀρθῶν δυεῖν αἱ ἄνισοι γωνίαι, καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτά. ἐπεὶ οὖν αἱ $\overline{\epsilon\delta\eta}$ $\overline{\eta\delta\kappa}$ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρουμένης τῆς $\overline{\epsilon\delta\eta}$ [$\overline{\epsilon\delta\eta}$ ἐλάσσων ἡ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$, τουτέστιν ἡ $\overline{\epsilon\delta\theta}$, τῆς $\overline{\eta\delta\kappa}$. καὶ] ὅλη ἡ $\overline{\epsilon\delta\theta}$ ἐλάσσων ἡ διπλῇ τῆς $\overline{\eta\delta\kappa}$. ἀλλὰ καὶ διπλῇ ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ γωνίας. ἡ ἄρα $\overline{\epsilon\delta\theta}$ $\overline{\eta\delta\kappa}$ μείζων τῆς πρὸς τῷ $\overline{\eta}$. κείσθω τῇ $\overline{\eta\delta\kappa}$ ἴση ἡ $\overline{\delta\eta\lambda}$, καὶ συμπιπτέτω

[FR343]

ἢ $\overline{\eta\lambda}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ κατὰ τὸ $\overline{\lambda}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\delta\lambda}$. παράλληλος ἄρα ἡ $\overline{\eta\lambda}$ τῇ $\overline{\delta\epsilon}$.



ἴσα ἄρα τὰ $\overline{\eta\delta\epsilon}$ $\overline{\delta\lambda\epsilon}$ τρίγωνα ἀλλήλοις. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\lambda\delta\epsilon}$ μείζων τοῦ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$, τὸ δὲ $\overline{\eta\delta\epsilon}$ ἴσον τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. τὸ ἄρα $\overline{\alpha\beta\gamma}$ μείζον τοῦ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$. δέδεικται ἄρα τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τῷ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ καὶ ἴσον καὶ μείζον καὶ ἔλασσον τῶν πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\delta}$ γωνιῶν ἢ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν ἢ μειζόνων δυεῖν ὀρθῶν ἢ ἐλασσόνων. καὶ πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τὸ δυνατόν ἔχουσι. τί γάρ, εἰ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ εἴη μιᾶς ἡμισείας ὀρθῆς, ἡ δὲ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ ἡμισείας; οὐχὶ δυεῖν ὀρθαῖς αἱ δύο ἴσαι; τί δέ, εἰ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ μιᾶς ἡμισείας, ἡ δὲ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ μιᾶς; οὐχὶ μείζους δύο ὀρθῶν; τί δέ, εἰ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ μιᾶς ἡμισείας, ἡ δὲ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ τρίτου; οὐχὶ ἐλάσσους δύο ὀρθῶν; καὶ ἀεὶ ἡ $\overline{\alpha}$ μείζων τῆς πρὸς τῷ $\overline{\delta}$. πᾶσαι οὖν διὰ τῆς τῶν παραλλήλων ἡμῖν γεγόνασι προσχρήσεως. ἀναγκαίως ἄρα παράκεινται τῷ στοιχειωτῇ.

[FR344]

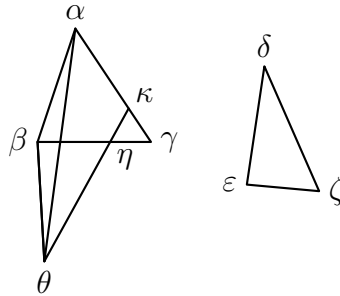
Prop. XXV, theor. XVI. Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκάτερα, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἀντίκειται μὲν τῷ ὀγδόῳ, ἀντιστρέφει δὲ τῷ πρὸ αὐτοῦ. κατὰ συζυγίαν γὰρ ὁ στοιχειωτὴς προήγαγεν τὰ τε ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν καὶ τῶν βάσεων καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἀνισότητος θεωρήματα καθ' ἐκατέραν τῶν συζυγιῶν τὰ μὲν προηγούμενα, τὰ δὲ ἀντίστροφα λαμβάνων καὶ ἐπὶ μὲν τῶν προηγούμενων ταῖς ἐπ' εὐθείας δείξεισι χρώμενος, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντιστρόφων ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαῖς. οὕτω δὲ καὶ ἐφ' ἐνὸς ἐκάστου πεποίηκεν τρίγωνον· τότε μὲν τῇ ἰσότητι τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν δείκνυσι τὴν ἰσότητα τῶν ὑποτεينوμένων γωνιῶν ἀκολουθοῦσαν, τότε δὲ τῇ ἀνισότητι * καὶ αὖ πάλιν ἀντιστρόφως τῇ μὲν ἰσότητι τῶν γωνιῶν τὴν ἰσότητα τῶν ὑποτείνουσῶν πλευρῶν, τῇ δὲ ἀνισότητι τὴν ἀνισότητα ἀποφαίνων ἐπομένην. ἀλλ' ἐπὶ τὸ προκείμενον ἐλθόντες ὅπως μὲν ὁ γεωμέτρης ἔδειξεν τὸ θεώρημα πρόδηλον ὃν παρῶμεν ἐκ τῶν βιβλίων ἀναλέγεσθαι τοῖς φιλομαθέσιν, ἃς δὲ καὶ οἱ ἄλλοι κομίζουσιν ἀποδείξεις τοῦ αὐτοῦ, συντόμως ἱστορήσωμεν, καὶ πρῶτον ἦν **Μενέλαος** ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἀνεῦρεν καὶ παρέδωκεν. ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$, ἴσας ἔχοντα δύο τὰς

[FR345]

$\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ δυοὶ ταῖς $\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\delta\zeta}$ καὶ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ μείζονα τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$. λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ τῆς πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ μείζων. ἀφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ ἴση ἡ $\overline{\beta\eta}$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῷ $\overline{\beta}$ σημείω τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ $\overline{\eta\beta\theta}$, καὶ κείσθω ἴση τῇ $\overline{\delta\epsilon}$ ἡ $\overline{\beta\theta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\eta\theta}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $\overline{\kappa}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\theta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\eta\beta}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\beta\theta}$ τῇ $\overline{\epsilon\delta}$, δύο δυσὶν ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας

[FR346]

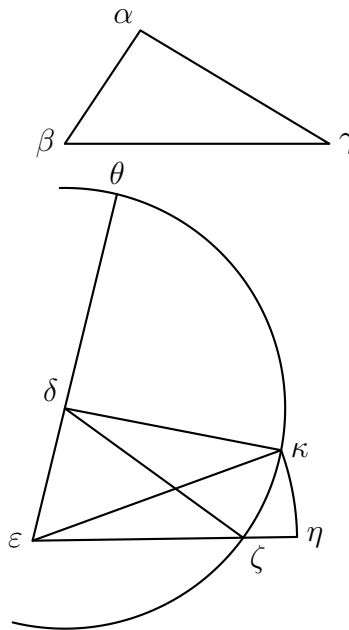


περιέχουσιν. ἡ ἄρα $\overline{\eta\theta}$ ἴση τῇ $\overline{\delta\zeta}$ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\theta\eta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\zeta}$ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἡ $\overline{\eta\theta}$ ἴση τῇ $\overline{\delta\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\delta\zeta}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ ἡ $\overline{\theta\eta}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. μείζων ἡ $\overline{\theta\kappa}$ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$, ὥστε τῆς $\overline{\alpha\kappa}$ πολλῶν μείζων. καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\kappa\alpha\theta}$ ἄρα μείζων τῆς ὑπὸ $\overline{\kappa\theta\alpha}$. πάλιν ἐπεὶ ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἡ $\overline{\beta\theta}$ — καὶ γὰρ τῇ $\overline{\delta\epsilon}$ ἴση ἐστίν — ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\theta\alpha}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\theta}$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $[\overline{\beta\alpha\kappa}]$ μείζων ὅλης τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\theta\kappa}$, ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\theta\kappa}$ ἴση δείκται τῇ πρὸς τῷ $\overline{\delta}$. ἡ ἄρα ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ μείζων τῆς πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ γωνίας.

Τοιαύτη μὲν ἡ ἀπόδειξις ἡ Μενελάου, Ἡρώων δὲ ὁ μηχανικὸς οὕτως οὐ δι' ἀδυνάτου τὸ αὐτὸ δείκνυσιν. ἔστω τρίγωνα τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ καὶ αἱ ὑποθέσεις αἱ αὐταὶ ἔστωσαν. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ $\overline{\beta\gamma}$ τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$, ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\epsilon\zeta}$ καὶ κείσθω τῇ $\overline{\beta\gamma}$ ἴση ἡ $\overline{\epsilon\eta}$. καὶ ὁμοίως ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ καὶ κείσθω τῇ $\overline{\delta\zeta}$ ἴση ἡ $\overline{\delta\theta}$. ὁ δὲ κέντρω τῷ $\overline{\delta}$ διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\delta\zeta}$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ $\overline{\theta}$. γεγράφθω ὡς $\overline{\epsilon\zeta\kappa\theta}$. καὶ ἐπεὶ αἱ $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ μείζους, αὗται δὲ ἴσαι τῇ $\overline{\epsilon\theta}$ καὶ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\eta\epsilon}$, ὁ κέντρω τῷ $\overline{\epsilon}$ γραφόμενος κύκλος, διαστήματι δὲ τῷ $\overline{\epsilon\eta}$, τέμνει τὴν $\overline{\epsilon\theta}$. τεμνέτω ὁ $\overline{\eta\kappa}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς αἱ $\overline{\kappa\delta}$ $\overline{\kappa\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν τὸ $\overline{\delta}$ κέντρον τοῦ $\overline{\theta\kappa\zeta}$, ἴση τῇ $\overline{\theta\delta}$ ἡ $\overline{\delta\kappa}$, τουτέστιν τῇ $\overline{\delta\zeta}$ καὶ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. πάλιν ἐπειδὴ κέντρον τὸ $\overline{\epsilon}$ τοῦ $\overline{\eta\kappa}$, ἴση ἡ $\overline{\epsilon\kappa}$ τῇ $\overline{\epsilon\eta}$ τουτέστι τῇ $\overline{\beta\gamma}$. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\gamma}$ δύο ταῖς $\overline{\delta\epsilon}$ $\overline{\delta\kappa}$ ἴσαι καὶ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\epsilon\kappa}$, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\kappa}$ ἴση. μείζων ἄρα τῆς ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$ ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$.

[FR347]

Prop. XXVI, theor. XVII. Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο γωνίας δύο γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ μίαν



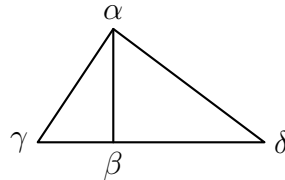
πλευρὰν μιᾶς πλευρᾶς ἴσην, ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων τωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει.

Τὸν τὰ τρίγωνα καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας καὶ τὰ ἐμβαδὰ συγκρίνειν βουλόμενον ἀναγκαῖον ἢ μόνως τὰς πλευρὰς λαβόντα ἴσας ζητεῖν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν, ἢ μόνως τὰς γωνίας ἴσας ζητεῖν τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν, ἢ μίζαντα γωνίας καὶ πλευρὰς μόνως μὲν οὖν γωνίας ἴσας λαβὼν οὐκ ἡδύνατο δεικνύναι καὶ τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων ἴσας. ἐστὶν γὰρ ἰσογώνια τρίγωνα καὶ τὰ σμικρότατα τοῖς μεγίστοις, καὶ ταῖς πλευραῖς καὶ τοῖς περιεχομένοις χωρίοις λειπόμενα τῶν ἐτέρων, τὰς δὲ γωνίας ἔχοντα ἐκείνοις κατὰ μίαν. μόνως δὲ τὰς πλευρὰς ἴσας ὑποθέμενος πάντα ἔδειξεν ἴσα κατὰ τὸ ὀγδοὸν θεώρημα, ἐν ᾧ δύο τρίγωνά ἐστιν ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας δυσὶν ἐκατέραν ἐκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν ἴσην τῇ βάσει. καὶ δείκνυται ἰσογώναι ταῦτα καὶ ἴσων περιληπτικὰ χωρίων. καὶ ὁ στοιχειωτὴς τὴν προσθήκην ταύτην ἀφεῖλεν ὡς ἐπομένην ἐξ ἀνάγκης καὶ ἀποδείξεως οὐ δεομένην, καθάπερ διὰ τὸ τέταρτον. πλευρὰς δὲ καὶ γωνίας λαμβάνων ἢ μίαν πλευρὰν ὥφειλεν λαβεῖν μιᾶ ἴσην καὶ μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία, ἢ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς δύο γωνίας τῶν τριγώνων ἴσας, ἢ ἀνάπαλιν μίαν γωνίαν καὶ δύο πλευρὰς, ἢ μίαν γωνίαν καὶ τρεῖς πλευρὰς, ἢ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας, ἢ καὶ πλείους μιᾶς πλευρὰς λαμβάνειν καὶ πλείους μιᾶς γωνίας. ἀλλὰ μίαν γωνίαν καὶ μίαν πλευρὰν λαβὼν οὐκ ἔδεικνυ τὸ προκείμενον τῶν ἄλλων τὴν ἰσότητα. δυνατόν γοῦν δύο τρίγωνα κατὰ μίαν μόνην πλευρὰν ἴσα ὄντα καὶ μίαν γωνίαν

[FR348]

πᾶσιν ἄνισα τοῖς λοιποῖς ὑπάρχειν. ἔστω γὰρ εὐθεῖα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ ἐστῶσα ὀρθὴ ἐπὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$, μείζων δὲ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ ἢ $\overline{\beta\delta}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$. οὐκοῦν τοῖς

[FR349]

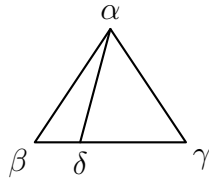


τριγώνοις τούτοις μία μὲν κοινὴ πλευρὰ καὶ μία γωνία μιᾷ ἴση, τὰ δὲ ἄλλα ἄνισα πάντα. μίαν δὲ πλευρὰν καὶ δύο γωνίας λαβεῖν ἐξῆν καὶ δεῖξαι τὰ λοιπὰ ἴσα. καὶ τοῦτο ποιεῖ διὰ τοῦδε τοῦ θεωρήματος, μίαν δὲ πλευρὰν καὶ τρεῖς γωνίας ἴσας ἐτι ὑποτίθεσθαι περιττόν, εἴπερ καὶ δύο μόνων ἴσων οὐσῶν δέδεικται ἡ τῶν λοιπῶν ἰσότης. πάλιν μίαν γωνίαν καὶ δύο πλευρὰς λαβὼν ἔδειξεν τὰ ἄλλα ἴσα ἐν τῷ τετάρτῳ θεωρήματι. μίαν δὲ γωνίαν καὶ τρεῖς πλευρὰς ἴσας λαβεῖν περιέρχον ἦν, καὶ γὰρ αἱ δύο μόνων ἴσαι ληφθεῖσαι συνῆγον τὴν ἰσότητα τῶν ἄλλων. καὶ μὴν καὶ τὸ δύο πλευρὰς καὶ δύο γωνίας ἴσας λαμβάνειν, ἢ δύο πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας ἴσας, ἢ δύο γωνίας καὶ τρεῖς πλευρὰς, πάντα ταῦτα περιττά. τὰ γὰρ ταῖς ἐλάττωσιν ὑποθέσεσιν ἐπόμενα πάντως ἀκολουθεῖ καὶ ταῖς πλείοσι μόνον μετὰ τῶν δεόντων προσδιορισμῶν λαμβανομένων τῶν ὑποθέσεων. τρεῖς οὖν ἡμῖν ἀνεφάνησαν ὑποθέσεις ἀποδείξεως δεόμεναι, ἢ τε μόνας λαμβάνουσα τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ ἢ τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν μίαν γωνίαν καὶ ἢ ἀντίθετος πρὸς ταύτην ἢ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς δύο γωνίας, ἦν νῦν ὁ γεωμέτρης προστίθησιν. καὶ διὰ τοῦτο ταῦτα τρία μόνα θεωρήματα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν τῆς ἐν ταῖς πλευραῖς καὶ ταῖς γωνίαις τῶν ἄλλων πασῶν ὑποθέσεων ἢ ἀδυνάτων οὐσῶν δεῖξαι το ζητούμενον ἢ δυνατῶν μὲν, ἀλλὰ περιττῶν τῷ δι' ἐλλαττόνων ὑποθέσεων τὰ αὐτὰ πεφνηνέαι.

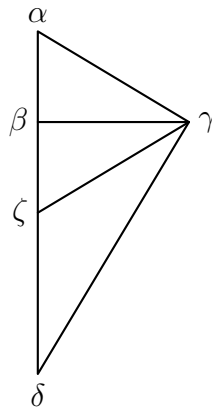
[FR350]

Ὡςπερ οὖν, ὅτε δύο πλευρὰς ἐλάμβανεν ἴσας δυσὶν καὶ γωνία μιᾷ μίαν ἴσην, οὐ τὴν τυχούσαν ἐλάμβανεν γωνίαν, ἀλλ', ὥς αὐτοῦ προσετίθει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην οὕτω καὶ δύο ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, οὕτω καὶ δύο γωνίας δυσὶ λαμβάνων ἴσας καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ, οὐ τὴν τυχούσαν λαμβάνει ταύτην, ἀλλ' ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. οὔτε γὰρ γωνίαν ἐπὶ τοῦ τετάρτου ληφθεῖσαν ἴσην τὴν τυχούσαν οὔτε πλευρὰν ἐπὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος οἷαν ποτὲ δεικνύναι τὰ λοιπὰ ἴσα δυνατόν· λέγω δὲ οἷον ὄντος ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ διηρήσθω ἡ $\overline{\beta\gamma}$ εἰς ἄνισα τῇ $\overline{\alpha\delta}$. γίνεται ἄρα δύο τρίγωνα τὰς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\alpha\delta}$ ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\delta}$ ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ $\overline{\beta}$ τῇ πρὸς τῷ $\overline{\gamma}$ ἴσην· ἀλλ' οὐκέτι τὰ λοιπὰ ἴσα, οἷον ἢ $\overline{\beta\delta}$ τῇ $\overline{\delta\gamma}$ ἄνισοι γάρ· ἀλλ' οὐδὲ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι. τὸ δὲ αἴτιον ὅτι γωνία γωνίαν ἴσην ἐλάβομεν οὐ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην. κατὰ ταῦτά δὴ καὶ τοῦτο τὸ θεωρήμα φανήσεται διαπίπτον, εἰ μὴ λάβοιμεν κατὰ

[FR351]



τὸν εἰρημένον διορισμὸν ἴσην τὴν πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν ἢ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις. ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν καὶ μείζονα τὴν $\overline{\beta\gamma}$ τῆς $\overline{\beta\alpha}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\alpha\beta}$, καὶ συνεστάτω τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ γωνία ἴση πρὸς τῇ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ καὶ συμπιπτεύουσιν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ $\overline{\delta}$. δύο οὖν τρίγωνά ἐστι τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\beta\gamma\delta}$ ἔχοντα μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν $\overline{\beta\gamma}$



καὶ δύο γωνίας ἴσας, τὴν μὲν ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\delta}$ — ὀρθαὶ γάρ — τὴν δὲ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ — οὕτως γὰρ συνέστησαν — ἴσα ἄρα, ὥς ἔοικεν, ἐστὶ τὰ τρίγωνα. καίτοι δείκνυται τὸ $\overline{\beta\delta\gamma}$ μείζον τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. αἴτιον δὲ ὅτι τὴν $\overline{\beta\gamma}$ κοινὴν ἐλάβομεν ἐν μὲν τῷ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ὑποτείνουσαν τὴν μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν πρὸς τῷ α , ἐν δὲ τῷ $\overline{\beta\gamma\delta}$ πρὸς ταῖς ἴσαις οὔσαν γωνίαις. ἔδει δὲ ἄρα ἐν ἀμφοῖν ἢ μίαν ὑποτείνειν τῶν ἴσων γωνιῶν ἢ πρὸς ταῖς ἴσαις κεῖσθαι γωνίαις. τοῦτο δὲ μὴ φυλάττοντες ἴσον ἀποφαίνομεν τὸ τρίγωνον, ὃ ἐστὶ μείζον ἐξ ἀνάγκης. πῶς γὰρ οὐ μείζον τὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$; συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ $\overline{\beta\gamma}$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ ἴση ἢ ὑπὸ $\overline{\zeta\gamma\beta}$ · μείζων γὰρ τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ ἢ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$, ὥσπερ καὶ ἡ πρὸς τῷ α γωνία. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\beta\gamma\zeta}$ δύο γωνίας ἔχοντα τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\beta\gamma\alpha}$ δυσὶν ἴσας ταῖς ὑπὸ $\overline{\gamma\beta\zeta}$ $\overline{\beta\gamma\zeta}$, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $\overline{\beta\gamma}$, ἴσα ἐστὶ τὰ τρίγωνα. μείζον δὲ τὸ $\overline{\beta\gamma\delta}$ τοῦ $\overline{\beta\gamma\zeta}$ · μείζον ἄρα ἐστὶν καὶ τοῦ

[FR352]

αβγ. πρότερον δὲ ἴσον ἐδείκνυτο διὰ τὴν λήψιν τῆς τυχούσης πλευρᾶς.

Τοσαῦτα καὶ πρὸς τὴν τῶν προκειμένων ἀκρίβειαν ὁ **Πορφύριος** ἡμῖν συμβάλλεται, **Εὐδημος** δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς **Θαλῆν** τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα. τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δείκνυναι τούτῳ προσχρῆσθαι φησιν ἀναγκαῖον.

Ἐκ δὲ τῆς προειρημένης διαιρέσεως συνοπτικῶς ληψόμεθα πᾶσαν τὴν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων θεωρίαν, καὶ τῶν παραλειμμένων τὰς αἰτίας ἔξομεν λέγειν ὡς ψευδεῖς τὰς ὑποθέσεις ἢ ὡς περιττὰς ἐλέγχοντες. καὶ μέχρι τούτου πέρας ἔχειν ἠθισόμεθα τῷ στοιχειώτῃ τὸ πρῶτον τμήμα τὰς τε συστάσεις τῶν τριγώνων καὶ τὰς συγκρίσεις κατὰ τὸ ἴσον καὶ τὸ ἄνισον πεποιημένῳ καὶ διὰ μὲν τῆς συστάσεως τὴν οὐσίαν αὐτῶν παραδεδοκότι, διὰ δὲ τῆς [συγκρίσεως τὴν] ἰσότητα [καὶ] τὴν ἑτερότητα. τρία γὰρ τὰ περὶ τὴν ὑπαρξιν, [τὸ ὄν,] τὸ ταῦτόν καὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἐν ποσοῖς καὶ ἐν ποιοῖς κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ὑποκειμένων. δείκνυται οὖν ἐκ τούτων ὡς εἰκόνων ὅτι καὶ ἕκαστον ἑαυτῷ ταῦτόν ἐστι καὶ ἑαυτοῦ ἕτερον διὰ τὸ ἐν αὐτῷ πλῆθος καὶ πάντα ταῦτα ἀλλήλοις καὶ ἕτερα ἀλλήλων. καὶ γὰρ ἐφ' ἐνὸς ἑκάστου τῶν τριγώνων εὔρηται τὸ ἴσον καὶ ἄνισον καὶ ἐπὶ πλείονων ἐνός.

[FR353]

[FR354]

PROPOSITIONUM PARS POSTERIOR.

Περὶ μὲν τῆς τῶν τριγώνων γενέσεώς τε καὶ ἰσότητος ἢ ἀνισότητος ὅσα δυνατόν ὡς ἐν στοιχειώσει λέγειν ἐκ τῶν εἰρημένων μεμαθήκαμεν, περὶ δὲ τῶν τετραπλεύρων ἐφεξῆς ὁ **Εὐκλείδης** διέξεισι προηγουμένως μὲν περὶ τῶν παραλληλογράμμων ἡμᾶς διδάσκων, τῇ δὲ τούτων θεωρίᾳ συνεισφέρων καὶ τὴν περὶ τῶν τραπεζίων διδασκαλίαν. διήρηται γάρ, ὡς πρὶν καὶ πρότερον ἐν ταῖς ὑποθέσεσιν εἴπομεν, τὸ τετράπλευρον εἰς τε τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τραπέζιον, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ἕτερα ἅττα εἶδη καὶ τὸ τραπέζιον ὡσαύτως. ἀλλ' ἐπεὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον διὰ τὴν τῆς ἰσότητος μετουσίαν τεταγμένον ἐστί, τὸ δὲ τραπέζιον οὐ τὴν αὐτὴν οὐδὲ ὁμοίαν ἔχει τὴν τάξιν, προηγουμένως μὲν εἰκότως αὐτῷ [τὰ?] τῶν παραλληλογράμμων ὁ λόγος ἀπεργάζεται, συνθεωρεῖ δὲ τούτοις καὶ τὸ τραπέζιον. ἀναφανήσεται γὰρ ἐκ τῆς τῶν παραλληλογράμμων τομῆς ἢ τῶν τραπεζίων γέννησις, ὡς ἔσται προῖοῦσιν ἡμῖν γνῶριμον.

Ἄλλ' ἐπειδήπερ πάλιν ἀδύνατον εἶπειν τι περὶ τῆς τῶν παραλληλογράμμων ἢ συστάσεως ἢ ἰσότητος ἄνευ τῆς τῶν παραλλήλων θεωρίας — ὡς γὰρ καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος δῆλον, παραλληλόγραμμον ἐστί τὸ ὑπὸ παραλλήλων τῶν ἀπεναντίον κειμένων εὐθειῶν περιγραφόμενον — ἐντεῦθεν ἀναγκαίως ἀπὸ τῶν παραλλήλων ποιεῖται τὴν ἀρχὴν τῆς διδασκαλίας καὶ κατὰ βραχὺ προῖων ἀπὸ τούτων εἰς τὴν τῶν παραλληλογράμμων εἰσβάλλει θεωρίαν ἐνὶ μέσῳ χρησάμενος θεωρήματι τῆς τε τούτων καὶ τῆς ἐκείνων στοιχειώσεως, ὃ δοκεῖ μὲν σύμπτωμά τι ταῖς παραλλήλοις ὑπάρχον θεωρεῖν, γένεσιν δὲ πρώτην παραλληλογράμμου παραδίδωσι.

[FR355]

τοιοῦτον γάρ ἐστι τὸ αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπι-
 ζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἐν γὰρ τούτῳ θεωρεῖται
 μὲν τι ταῖς ἴσαις καὶ παραλλήλοις συμβεβηκός, ἐκ δὲ τῆς ἐπιζεύξεως ἀναφαίνεται
 τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἴσας ἔχον καὶ παραλλήλους τὰς ἀπεναντίον κειμένας
 πλευράς.

Ὅτι μὲν οὖν ἀναγκαίως ὁ περὶ τῶν παραλλήλων λόγος προεῖληπται, δῆλον
 ἐκ τούτων. τρία δέ ἐστιν ἀναλαμβάνειν ταῖς παραλλήλοις ὑπάρχοντα καθ' αὐτό
 καὶ ἢ αὐτὸ χαρακτηριστικά τε αὐτῶν καὶ ἀντιστρέφοντα πρὸς αὐτάς. οὐ μόνον
 τὰ τρία ἅμα, ἀλλὰ καὶ ἕκαστον ἀποδιαληφθὲν τῶν λοιπῶν, ὥν τὸ μὲν ἐστὶν
 εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσας εἶναι τὰς ἐναλλάξ, τὸ δὲ εὐθείας
 τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσας εἶναι τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς, τὸ δὲ λοιπὸν
 εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσην εἶναι τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπε-
 ναντίον. ἕκαστον γὰρ τῶν συμπτωμάτων τούτων ἱκανὸν ἀποδειχθὲν παραλ-
 λήλους ἀποφῆναι τὰς εὐθείας.

[FR356]

Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εἰδῶσι καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ διαλέγεσθαι περὶ
 τῶν γραμμῶν, ἐκάστου εἶδους τὸ σύμπτωμα παραδιδόντες. καὶ γὰρ **Απολλώνιος**
 ἐφ' ἐκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν, τί τὸ σύμπτωμα δείκνυσι, καὶ ὁ **Νικομήδης**
 ἐπὶ τῶν κογχοειδῶν, καὶ ὁ **Ἰππίας** ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν, καὶ ὁ **Περσεύς** ἐπὶ
 τῶν σπειρικῶν. μετὰ γὰρ τὴν γένεσιν τὸ καθ' αὐτό καὶ ἢ αὐτὸ ὑπάρχον ληφθὲν
 ἀφορίζει τὸ συστάν ἡμῖν εἶδος ἀπὸ τῶν ἄλλων ἀπάντων. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν
 καὶ ὁ στοιχειωτὴς τὰ συμπτώματα τῶν παραλλήλων ἀνευρίσκει πρῶτον.

Prop. XXVII, theor. XVIII. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα
 ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, πα-
 ράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

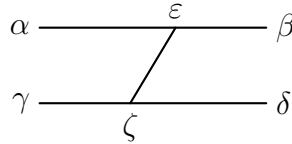
Ἐπὶ τοῦ ὁμολογουμένου προεῖληπται τὸ εἶναι τὰς εὐθείας ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ,
 μᾶλλον δὲ ἐπὶ πάντων τῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ θεωρημάτων. τοῦτο δὲ προσέθεμεν διὸ
 τὸ μὴ πάντως τῶν ἐναλλάξ ἴσων οὐσῶν παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας, εἰ μὴ καὶ
 ἐν τῷ αὐτῷ εἶεν ἐπιπέδῳ. κωλύει γὰρ οὐδὲν οἶον χιαστί τῶν εὐθειῶν κειμένων,
 τῆς μὲν ἐν ἄλλῳ, τῆς δὲ ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, ἐμπίπτουσιν εἰς αὐτάς εὐθεῖαν ἴσας
 ποιεῖν τὰς ἐναλλάξ, ἀλλ' οὐ παράλληλοι αἱ οὕτως κείμεναι. προεῖληπται οὖν
 ὅτι πάντα, ὅσα καταγράφομεν ἐν τῇ ἐπιπέδῳ πραγματεία, περὶ ἐν καὶ ταῦτόν
 ἐπίπεδον φανταζόμεθα. διόπερ οὐκ ἐδεήθη καὶ ταύτης τῆς προσθήκης.

[FR357]

Αὐτὸ δὲ δὴ τὸ ἐναλλάξ ἰστέον ὅτι διχῶς ὁ γεωμέτρης παραλαμβάνει, ποτὲ
 μὲν κατὰ τὴν τοιάνδε θέσιν, ποτὲ δὲ κατὰ τὴν τοιάνδε τῶν λόγων ἀκολουθίαν.
 καὶ κατὰ μὲν τοῦτο τὸ σημαινόμενον ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς
 χρῆται τῷ ἐναλλάξ, κατὰ δὲ τὸ ἕτερον ἔν τε τούτῳ καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις ἅσιν
 βιβλίοις ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς εἰς ταύτας ἐμπίπτουσης. τὰς γὰρ
 γωνίας τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γιγνομένας, μηδὲ ἐφεξῆς ἀλλήλαις κειμένας, ἀλλὰ

διειργόμενας μὲν ὑπὸ τῆς ἐμπιπτούσης, ἐντὸς δὲ ἄμφω τῶν παραλλήλων, διαφερούσας δὲ τῷ τὴν μὲν ἄνω κεῖσθαι, τὴν δὲ κάτω, τὰς ἐναλλάξ προσαγορεύει.

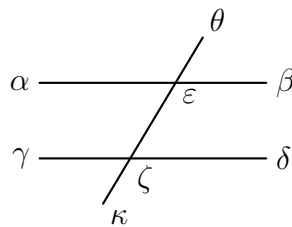
λέγω δὲ οἷον εὐθειῶν οὐσῶν τῶν $\overline{\alpha\beta}$ καὶ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ ἐμπιπτούσης εἰς αὐτὰς τῆς



$\overline{\epsilon\zeta}$ ἐναλλάξ εἶναί φησι τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$ καὶ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\epsilon}$ καὶ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ ὡς ἐνηλλαγμένως ἔχουσας κατὰ τὴν θέσιν.

Δεῖ δὲ εἰδέναι ἐκεῖνο ὅτι τοιαύτης οὔσης θέσεως τῶν εὐθειῶν ἐκ διαιρέσεως ἕξ πάντα γίνεται συμπτώματα, ὧν τὰ τρία μόνον ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν, τρία δὲ παρῆκεν. ἡ γὰρ ἐπὶ ταῦτά μέρη ληψόμεθα τὰς γωνίας ἥ οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτά. καὶ εἰ ἐπὶ τὰ αὐτά μέρη, ἡ ἀμφοτέρας ἐντὸς τῶν εὐθειῶν, ἃς ἀποδείκνυσιν ὁ λόγος παραλλήλους, ἡ ἄμφω ἐκτός, ἡ τὴν μὲν ἐκτός, τὴν δὲ ἐντὸς, καὶ εἰ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, πάλιν ὡσαύτως ἡ ἐκτός ἀμφοτέρας τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ἀνάγκη λαμβάνειν, ἡ ἐντός, ἡ τὴν μὲν ἐντός, τὴν δὲ ἐκτός. γιγνέσθω δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς σαφὲς τὸ λεγόμενον. καὶ ἕστωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ $\overline{\epsilon\zeta}$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ $\overline{\theta}$ $\overline{\kappa}$. εἰ μὲν οὖν ἐπὶ τὰ αὐτά

[FR358]

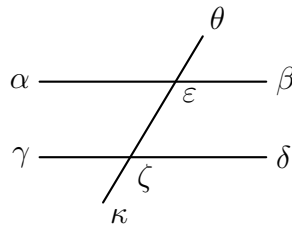


μέρη λάβοις τὰς γωνίας ἡ ἐντὸς ἄμφω θήσεις, ὡς τὰς ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\gamma}$, ἡ ἐκτός ἄμφω, ὡς τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ καὶ $\overline{\delta\zeta\kappa}$ ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\alpha}$ καὶ $\overline{\gamma\zeta\kappa}$, ἡ τὴν μὲν ἐντός, τὴν δὲ ἐκτός, ὡς τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\kappa\zeta\delta}$ καὶ $\overline{\zeta\epsilon\beta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\alpha}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\gamma}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\kappa\zeta\gamma}$ καὶ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$. τετραχῶς γὰρ αὗται ληφθήσονται. εἰ δὲ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά μέρη τὰς γωνίας λαμβάνοις, ἡ ἐντός αὐτὰς θήσεις, ὡς τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$ καὶ ὑπὸ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\epsilon}$ καὶ $\overline{\zeta\epsilon\beta}$, ἢ ἐκτός ἀμφοτέρας, ὡς τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ καὶ $\overline{\delta\zeta\kappa}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ καὶ $\overline{\gamma\zeta\kappa}$, ἡ τὴν μὲν ἐντός, τὴν δὲ ἐκτός, καὶ τοῦτο τετραχῶς πάλιν, ἡ γὰρ τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\gamma}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\kappa\zeta\gamma}$ καὶ $\overline{\zeta\epsilon\beta}$, ἡ τὰς ὑπὸ $\overline{\kappa\zeta\delta}$ καὶ $\overline{\zeta\epsilon\alpha}$ θήσεις. καὶ παρὰ ταύτας ἄλλη λῆψις οὐκ ἔστιν.

[FR359]

Ἐξαχῶς οὖν λαμβανομένων τῶν γωνιῶν ὁ γεωμέτρης τρεῖς μόνους ἐκλέξατο καὶ ταῦτα εἰς τὰ ἐπόμενα συμπτώματα τῶν παραλλήλων ἀπέφηνεν ὄντα χαρακτηριστικά. τούτων δὲ τῶν τριῶν μία μὲν ἐστὶν ἐκ τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐκ μὲν τῶν ἐντὸς ληφθεισῶν μόνον, ἃς καὶ ἐκάλεσεν ἐναλλάξ, ὥς παραλελειφθῆναι τὰς ἐκτὸς οὕσας ἀμφοτέρως καὶ τὴν μὲν ἐκτὸς, τὴν δὲ ἐντὸς, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτά, τῶν δὲ ἐντὸς ἀμφοτέρων, ἃς δυσὶν ὀρθαῖς εἶναι φησιν ἴσας, καὶ ὧν ἡ μὲν ἐστὶν ἐντὸς, ἡ δὲ ἐκτὸς, ἃς εἶπεν ἴσας εἶναι, ὑπολειπομένης δὲ μιᾶς λήψεως τῆς ἐκτὸς ἀμφοτέρως ὑποτιθεμένης.

Ἡμεῖς οὖν φαμεν ὅτι καὶ ταῖς παραληφθείσαις τρισὶν ὑποθέσεσιν τὰ αὐτὰ ἔπεται. ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἄμφω ἐκτὸς αἱ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ $\overline{\delta\zeta\kappa}$. λέγω ὅτι αὗται δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$



τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\kappa}$, εἰ δὲ αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\kappa}$ $\overline{\theta\epsilon\beta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αἱ γωνίαι, ὧν ἡ μὲν ἐντὸς, ἡ δὲ ἐκτὸς, αἱ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$. λέγω ὅτι καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$, αἱ δὲ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$ δύο ὀρθαῖς εἰσιν, καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ καὶ $\overline{\epsilon\zeta\delta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μὲν, ἄμφω δὲ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν, ὥς αἱ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ $\overline{\delta\zeta\kappa}$. λέγω ὅτι αὗται ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ καὶ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\kappa}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$, ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\epsilon\theta}$ ἄρα ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\kappa}$ γωνίᾳ. ἐὰν ἄρα ληφθῇ τὰ ἐπὶ τῶν τριῶν ὑποθέσεων. ἃς ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν, ἐπόμενα ὥς ἀληθῆ πάντα τὰ αὐτὰ ταῖς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν, πλὴν ὅτι, ἐφ' ὧν μὲν ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν, κατὰ δύο μὲν λήψεις ὑπόκεινται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ γωνίαι, κατὰ μίαν δὲ δύο ὀρθαῖς αἱ γωνίαι, ἐπὶ δὲ τούτων ἀνάπαλιν κατὰ δύο μὲν δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ μίαν δὲ ἀλλήλαις. ἔξ γὰρ οὕσων πασῶν τῶν λήψεων εἰ μὲν τῶν τριῶν συμβαίνει δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι τὰς γωνίας, ἐκ δὲ τῶν τριῶν ἴσας ἀλλήλαις, ὥστε εἰκότως αἱ παραλελειμμέναι ταῖς μνήμης ἡξιωμέναις λήψεσιν ἀνάπαλιν ἔχουσιν. ἔοικεν δὲ ὁ γεωμέτρης ταύτας ἐκλέξασθαι τῶν ὑποθέσεων, ὅσαι ἢ καταφατικὸν πλεονάζον ἔχουσιν, ἢ ἀπλούστεραί εἰσιν, καὶ διὰ τοῦτο λαβεῖν ἐκ μὲν τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μόνους τὰς ἐντὸς, ἃς δὴ κέκληκεν ἐναλλάξ, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ [τὰς ἐντὸς καὶ τὴν μὲν ἐντὸς τὴν δὲ] ἐκτὸς, τὰς δὲ ἄλλας δι' ἀποφάσεως μᾶλλον δηλουμένας ἢ ὥς ποικιλωτέρας φυλάξασθαι. ἀλλ' οὖν εἴτε ταύτην, εἴτε ἄλλην αἰτίαν ῥητέον, δῆλον ἐκ τούτων, πόσα ἐστὶ τὰ ἐπόμενα

[FR360]

[FR361]

αὐτοῖς.

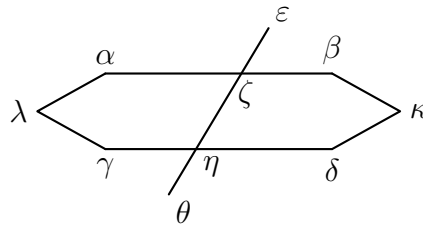
Prop. XXVIII, theor. XVIII. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας
εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπε-
ναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ
τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσσονται εὐθεῖαι.

Τὸ μὲν πρὸ τούτου θεώρημα τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας λαμβάνον,
ἐντὸς δὲ τῶν εὐθειῶν κειμένης, ἴσας ἀλλήλαις ἐδείκνυ παραλλήλους οὖσας τὰς
εὐθείας, τοῦτο δὲ τὰς λοιπὰς δύο ὑποθέσεις προστίθῃσιν, ὧν ἡ μὲν τὰς γωνίας
μερίζει κατὰ τὸ ἐντὸς καὶ ἐκτὸς, ἡ δὲ ἀμφοτέρως ἐντὸς ὑποτίθεται καὶ δείνυσι τὸ
αὐτὸ συμπέρασμα. δόξειεν δ' ἂν ἀτόπως ὁ στοιχειωτὴς τὰ θεωρήματα μερίσαι.
δέον γὰρ ἦν ἢ τὰς τρεῖς ὑποθέσεις διαλαβεῖν καὶ ποιῆσαι τρία θεωρήματα, ἢ εἰς ἓν
συνάγειν πάσας θεώρημα, ὅσπερ ἐποίησεν ὁ Ἱεραπολίτης **Αἰγείας** ὁ τὴν ἐπιτομὴν
γράφας τῶν στοιχείων, ἢ διελεῖν εἰς δύο βουλόμενον εὐταχτον ποιήσασθαι τὴν
διαίρεσιν καὶ χωρὶς μὲν λαβεῖν τὰς ὑποθέσεις, ἐφ' ὧν ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι, χωρὶς δὲ
ἐκείνην, ἐφ' ἧς δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. νῦν δὲ ἐν ἐνὶ μὲν θεωρήματι τὰς ἐναλλάξ
ἴσας ὑπέθετο, ἐν ἐνὶ δὲ τὴν ἐκτὸς [ἴσην τῇ ἐντὸς] καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας. τί οὖν τὸ αἷτιον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως; εἰ οὖν πρὸς τὴν
ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἀπέβλεψεν τὴν πρὸς ἀλλήλας ἢ τὴν πρὸς τὰς δύο ὀρθάς,
οὐδὲ ταύτη διέστησε τὰ προκείμενα θεωρήματα ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ πρὸς ἐκείνο
τὸ τὰς γωνίας ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λαμβάνεσθαι ἢ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά. τὸ μὲν γὰρ πρὸ
τούτου τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ παρελάμβανε — τοιαῦται γὰρ αἱ ἐναλλάξ — τοῦτο
δὲ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτά ὡς καὶ ἐκ τῆς προτάσεως δῆλον.

[FR362]

Ἄλλ' ὅπως μὲν ὁ στοιχειωτὴς δείκνυσιν ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν
ἐντὸς αἱ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, φανερόν ἐκ τῶν γεγραμμένων. **Πτολεμαῖος**
δὲ ἐν οἷς ἀποδείξει προέθετο τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας
συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ῥητῶν ἐλάσσονες, τοῦτο πρὸ πάντων
δεικνὺς τὸ θεώρημα τὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ὑπαρχουσῶν τῶν ἐντὸς παραλλήλους
εἶναι τὰς εὐθείας οὕτω πως δείκνυσιν. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{γδ}$, καὶ
τεμνέτω τις αὐτάς εὐθεῖα ἡ $\overline{εζ}$ $\overline{ηθ}$, ὥστε τὰς ὑπὸ $\overline{βζ}$ $\overline{η}$ καὶ ὑπὸ $\overline{ζη}$ $\overline{δ}$ γωνίας
δύο ὀρθαῖς ποιεῖν. λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι, τουτέστιν ἀσύμπτωτοί
εἰσιν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτεωσαν ἐκβαλλόμεναι αἱ $\overline{βζ}$ $\overline{ηδ}$ κατὰ τὸ $\overline{κ}$. ἐπεὶ
οὖν εὐθεῖα ἡ $\overline{ηζ}$ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν $\overline{αβ}$, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ $\overline{αζ}$ $\overline{η}$
 $\overline{βζ}$ $\overline{η}$ γωνίας. ὁμοίως δέ, ἐπεὶ ἡ $\overline{ηζ}$ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν $\overline{γδ}$, δύο ὀρθαῖς ἴσας
ποιεῖ τὰς ὑπὸ $\overline{γ}$ $\overline{ηζ}$ $\overline{δ}$ $\overline{ηζ}$ γωνίας. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{αζ}$ $\overline{η}$ $\overline{βζ}$ $\overline{η}$ $\overline{γ}$ $\overline{ηζ}$ $\overline{δ}$ $\overline{ηζ}$
τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὧν αἱ δύο αἱ ὑπὸ $\overline{βζ}$ $\overline{η}$ $\overline{ζη}$ $\overline{δ}$ δύο ὀρθαῖς ὑπόκεινται
ἴσαι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{αζ}$ $\overline{η}$ $\overline{γ}$ $\overline{ηζ}$ καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς ἴσαι. εἰ οὖν αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{γδ}$

[FR363]



ἡ δὲ δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς ἐκβαλλόμεναι συνέπεσον κατὰ τὸ $\bar{\kappa}$, καὶ αἱ $\bar{\zeta\alpha}$ $\bar{\eta\gamma}$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. δύο γὰρ ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ $\bar{\alpha\zeta\eta}$ $\bar{\gamma\eta\zeta}$ ἴσαι εἰσιν. ἢ γὰρ κατ' ἀμφοτέρω συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ἢ κατ' οὐδέτερα, εἴπερ καὶ αὗται κάκειναι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. συμπίπτεωσαν οὖν αἱ $\bar{\zeta\alpha}$ $\bar{\eta\gamma}$ κατὰ τὸ $\bar{\lambda}$. αἱ ἄρα $\bar{\lambda\alpha\beta\kappa}$ $\bar{\lambda\gamma\delta\kappa}$ εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστιν δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς συμπίπτειν τὰς εὐθείας. παράλληλοι ἄρα εἰσίν.

[FR364]

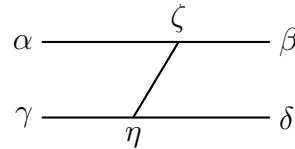
Prop. XXVIII, theor. XX. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς [καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς] καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἀμφοτέροις ἀντιστρέφει τοῖς προειρημένοις θεωρήμασι. τὸ γὰρ ἐν ἑκατέρῳ ζητούμενον ὑπόθεσιν ποιεῖται, τὰ ἐν ἐκείνοις δεδομένα δεικνύναι προτίθεται. καὶ δεῖ μεμνηθῆναι καὶ τῆς τοιαύτης τῶν ἀντιστροφῶν διαφορᾶς, ὅτι πᾶν τὸ ἀντιστρέφον ἢ ἐν ἐπὶ ἀντιστρέφει, ὡς τῷ πέμπτῳ τὸ ἔκτον, ἢ πλείοσιν ἐν, ὡς τὸ νυνὶ προκείμενον τοῖς πρὸ αὐτοῦ. ἐν δὲ τούτῳ τῷ θεωρήματι πρῶτον ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο τούτῳ τῶν αἰτημάτων τῷ **ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπίπτειν τὰς εὐθείας ἐκβαλλομένας, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες**, ὅπερ ἐξηγούμενοι τὰ πρὸ τῶν θεωρημάτων ἐλέγομεν, ὡς οὐ παρὰ πάντων τοῦτο συγκεκριῖται εἶναι ἀναποδείκτως ὁμολογούμενον. καὶ πῶς γὰρ ἂν εἴη τοιοῦτον, οὗ τὸ ἀντίστροφον ὡς ἀποδείκτον ἐν τοῖς θεωρήμασι ἀναγέγραπται; ρὸ γὰρ παντὸς τριγώνου δύο τὰς ἐντὸς γωνίας ὁμοιοῦσιν ἐλάσσους εἶναι δύο ὀρθῶν ἀντίστροφόν ἐστι τῷ αἰτήματι τούτῳ· ἐπεὶ καὶ συνεύειν τὰς εὐθείας αἰεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐκβαλλομένας οὐκ ἔστι τεκμήριον τῆς συμπτώσεως διὰ τὸ καὶ ἄλλας εὐρῆσθαι γραμμὰς συννευούσας μὲν αἰεὶ πλέον καὶ πλέον, συμπιπτούσας δὲ οὐδέποτε, καθὰ καὶ εἴρηται πρότερον.

[FR365]

Ἦδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα προτάξαντες τοῦτο αἶτημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφθηθὲν ἀποδείξεως ἡξίωσαν. δοκεῖ δὲ καὶ ὁ **Πτολεμαῖος** αὐτὸ

δεικνύναι ἐν τῷ περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένης συμπίπτειν, καὶ δείκνυσι πολλὰ προλαβὼν τῶν μέχρι τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων. καὶ ὑποκείσθω πάντα εἶναι ἀληθῆ, ἵνα μὴ καὶ ἡμεῖς ὅχλον ἐπεισάγωμεν ἄλλον, καὶ ὥς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων. ἐν δὲ καὶ τοῦτο τῶν προδεδειγμένων τὸ τὰς ἀπὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλομένης μηδαμῶς συμπίπτειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀληθές, καὶ τὸ παραλλήλων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. ἀνάγκη γάρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλήλους ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους ἢ μείζους. ἔστωσαν οὖν παράλληλοι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἐμπίπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ $\overline{\eta\zeta}$. λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ $\overline{\gamma\eta\zeta}$ δύο ὀρθῶν μείζους, αἱ



[FR366]

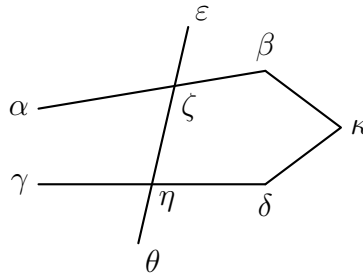
λοιπαὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\zeta\eta}$ $\overline{\delta\eta\zeta}$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους· ἄλλα καὶ δύο ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί — οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\gamma\eta}$ παράλληλοι ἢ αἱ $\overline{\zeta\beta}$ $\overline{\eta\delta}$. ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\gamma\eta}$ δύο ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντὸς, καὶ ἡ εἰς τὰς $\overline{\zeta\beta}$ $\overline{\eta\delta}$ ἐμπίπτουσα δύο ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντὸς — ἀλλ' αἱ αὐταὶ καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους — αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ $\overline{\gamma\eta\zeta}$ $\overline{\beta\zeta\eta}$ $\overline{\delta\eta\zeta}$ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι — ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι εἰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. εἰ δὲ μήτε μείζους μήτε ἐλάσσους ποιεῖ τῶν δύο ὀρθῶν, λείπεται τὴν ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας.

Τούτου δὲ οὖν προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβητήτως ἀποδείκνυται, λέγω γὰρ ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθελαι ἐκβαλλόμεναι, ἐφ' ᾗ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. μὴ γὰρ συμπίπτέωσαν. ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοί εἰσιν, ἐφ' ᾗ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πολλῶ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα, ἐφ' ᾗ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ' ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι. εἰ δὲ τοῦτο, παράλληλοί εἰσιν. ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον.

[FR367]

Ταῦτα προδεδειχώς ὁ **Πτολεμαῖος** καὶ καταντήσας εἰς τὸ προκείμενον ἀκριβέστερόν τι προσθεῖναι βούλεται καὶ δεῖξαι ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθῶν ποιῇ ἐλάσσονας, οὐ

μόνον οὐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, ὥς δέδεικται, ἀλλὰ καὶ ἡ σύμπτωσις αὐτῶν κατ' ἐκεῖνα γίνεται τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, οὐκ ἐφ' ἃ αἱ μείζονες. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ $\overline{\epsilon\zeta\eta\theta}$ ποιείτω τὰς ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ καὶ ὑπὸ $\overline{\gamma\eta\zeta}$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. αἱ λοιπαὶ



ἄρα μείζους δύο ὀρθῶν. ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι δέδεικται. εἰ δὲ συμπίπτουσιν, ἢ ἐπὶ τὰ $\overline{\alpha}$ $\overline{\gamma}$ συμπεσοῦνται. ἢ ἐπὶ τὰ $\overline{\beta}$ $\overline{\delta}$. συμπιπτεύωσαν ἐπὶ τὰ $\overline{\beta}$ $\overline{\delta}$ κατὰ τὸ $\overline{\kappa}$. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ καὶ $\overline{\gamma\eta\zeta}$ δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ $\overline{\beta\zeta\eta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$, ἢ ὑπὸ $\overline{\gamma\eta\zeta}$ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\zeta\eta}$. τριγώνου ἄρα τοῦ $\overline{\kappa\zeta\eta}$ ἢ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. ἀλλὰ μὴν συμπίπτουσι. κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, κατ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες.

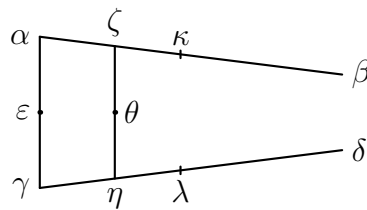
Ταῦτα μὲν οὖν ὁ **Πτολομαῖος**. ἐφιστάνειν δὲ ἄξιον, μὴ ποτε παραλογισμός τις ἔστιν ἐν ταῖς εἰλημμέναις ὑποθέσεσι, λέγω δὲ ἐν ἐκεῖναις, ἐν αἷς ἔλεγεν ὅτι τῆς τεμνούσης εὐθείας τὰς ἀσύμπτωτους τέτταρας ἐντὸς γωνίας ποιούσης αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἢ δύο ὀρθῶν μείζους ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. οὐ γὰρ τελεία ἢ διαίρεσις. κωλύει γὰρ οὐδὲν τὸν ἀσύμπτωτους λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δυεῖν ὀρθῶν ἐκβαλλομένας τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο ὀρθῶν ἐλάσσοντας, καὶ οὐχ ἓνα περὶ τούτων ἀποδέχεσθαι λόγον. ἀτελοῦς δὲ οὗτης τῆς διαιρέσεως οὐκ ἀποδέδεικται τὸ προκείμενον. ἔτι δὲ κάκεῖνο πρὸς τὴν δεῖξιν ῥητέον, ὅτι οὐ κατ' αὐτὸ δείκνυσι τὸ ἀδύνατον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ παραλλήλους τέμνουσά τις εὐθεῖα μείζους ἐποίησεν τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφοτέρα μέρη δύο ὀρθῶν ἢ ἐλάσσους, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ ἄτοπον ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, ἀλλ' ἐπειδὴ τέσσαρες τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἐντὸς τῶν τεμνομένων, διὰ τοῦτο ἀδύνατος ἑκατέρα τῶν ὑποθέσεων τούτων, ἐπεὶ καὶ μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας τὰ αὐτὰ ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων.

Πρὸς μὲν οὖν **Πτολεμαῖον** ταῦτα λέγοντες ἐπιστήσομεν· φανερά γὰρ ἡ τῆς δείξεως ἀσθένεια διὰ τῶν εἰρημένων. φέρε δὲ κάκεῖνους ἐπισκεψώμεθα τοὺς λέγοντας ἀδυνατὸν εἶναι τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμ-

[FR368]

[FR369]

πίπτειν. λαβόντες γὰρ εὐθείας δύο τὰς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ ἐμπίπτουσιν εἰς αὐτὰς τὴν $\overline{\alpha\gamma}$ καὶ ποιοῦσαν τὰς ἐντὸς δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας οἶονται (?) δεικνύναι μὴ συμπιπτούσας τὰς $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$. διηρήσθω γὰρ δίχα ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ κατὰ τὸ ε καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\varepsilon}$ ἢ $\overline{\alpha\zeta}$, ἀπὸ δὲ τῆς $\overline{\gamma\delta}$ ἴση τῇ $\overline{\varepsilon\gamma}$ ἢ $\overline{\gamma\eta}$. δῆλον ἄρα ὅτι αἱ $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\gamma\eta}$ οὐ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ $\overline{\zeta\eta}$. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται, ἔσονται αἱ δύο



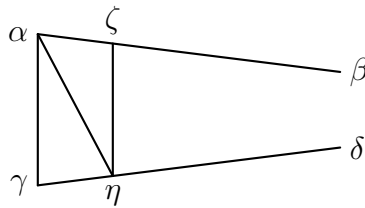
τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσαι ἐν τριγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον. πάλιν ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\zeta\eta}$ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $\overline{\theta}$ καὶ ἴσαι ἀφηρήσθωσαν. οὐδὲ αὖται ἄρα συμπεσοῦνται διὰ τὰ αὐτά. καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον ποιοῦντες, ἐπιζευγνύντες τὰ ἀσύμπτωτα σημεῖα καὶ τὴν ἐπεζευγμένην διχοτομοῦντες καὶ ἴσας ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῖς ταύτης ἡμίσεσιν ἀφαιροῦντες, δεικνύναι φασὶν ὅτι οὐδαμοῦ συμπίπτουσιν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ εὐθεῖαι.

Τούτων δὴ τοιαῦτα λεγόντων ῥητέον ἡμῖν ὅτι λέγουσι μέντοι ἀληθές, οὐ μέντοι ὅσον γε οἶονται. ὅτι μὲν γὰρ ὀρίσαι τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως ἀπλῶς οὕτως οὐκ ἔστιν, ἀληθές. οὐ μέντοι τὸ μηδέ τὸ παράπαν συμπίπτειν αὐτὰς ἀληθές. μὴ συμπιπτέωσαν γὰρ αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ τῆς ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ καὶ ὑπὸ $\overline{\delta\gamma\alpha}$ γωνίας ὠρισμένης κατὰ τὸ $\overline{\zeta}$ καὶ τὸ $\overline{\eta}$ ἀλλ' οὐδὲν καλύονται κατὰ τὰ $\overline{\kappa}$ $\overline{\lambda}$ συμπεσεῖν, κἂν ἴσαι ᾖωιν αἱ $\overline{\zeta\kappa}$ $\overline{\eta\lambda}$ ταῖς $\overline{\zeta\theta}$ $\overline{\theta\eta}$. τῶν γὰρ $\overline{\alpha\kappa}$ $\overline{\gamma\lambda}$ συμπιπτούσων κατὰ τὰ $\overline{\kappa}$ $\overline{\lambda}$ οὐκέτι μένουσιν αἱ ὑπὸ $\overline{\kappa\zeta\theta}$ $\overline{\lambda\eta\theta}$ γωνίαι αἱ αὐταί, καὶ γίνεταί τι τῆς $\overline{\zeta\eta}$ ἐκτὸς τῶν $\overline{\alpha\kappa}$ $\overline{\gamma\lambda}$ εὐθειῶν, καὶ οὕτως αἱ δύο πάλιν αἱ $\overline{\zeta\kappa}$ $\overline{\eta\lambda}$ μείζους τῆς βάσεως ὅσῃν ἀπολαμβάνουσιν ἐντὸς τῆς $\overline{\zeta\eta}$ εὐθείας.

Ἔτι δὲ κάκεῖνο ῥητέον, ἀδιορίστως αὐτῶν λεγόντων τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν, ὅτι ἀναιροῦσιν καὶ ἃ μὴ βούλονται. ἔστω γὰρ ἡ καταγραφὴ ἡ αὐτή. πότερον οὖν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\eta}$ ἐπιζευῆσαι εὐθεῖαν, ἢ οὐ δυνατόν; εἰ μὲν γὰρ ἀδύνατον, τῷ πέμπτῳ αἰτήματι προσαναιροῦσι καὶ τὸ πρῶτον τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου λέγον ἐξεῖναι ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, εἰ δὲ δυνατόν, ἐπεζεύχθω. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ $\overline{\zeta\alpha\gamma}$ $\overline{\eta\gamma\alpha}$ ἐλάσσους εἰσὶ δύο ὀρθῶν, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\eta\alpha\gamma}$ $\overline{\eta\gamma\alpha}$ πολλῷ μᾶλλον ἐλάσσους εἰσὶ τῶν δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα $\overline{\alpha\eta}$ $\overline{\gamma\eta}$ συμπεπτώκασιν κατὰ τὸ $\overline{\eta}$ ἀπ' ἐλασσόνων ἐκβεβλημέναι δύο ὀρθῶν. οὐκ ἄρα δυνατόν λέγειν ἀδιορίστως τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν. ἀλλ' ὅτι μέν τινες

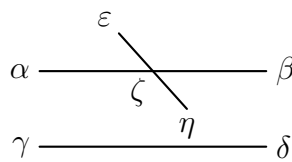
[FR370]

[FR371]

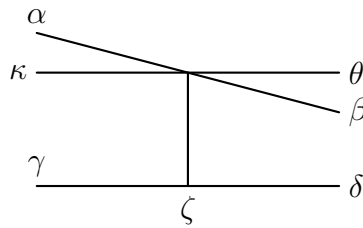


εὐθεῖαι συμπίπτουσιν ἀπ' ἐλάσσονων δυεῖν ὀρθαῖν ἐκβληθεῖσαι δῆλον, εἰ καὶ πάσαις τοῦτο ζητεῖν ἔοικεν ὁ λόγος. εἴποι γὰρ ἂν τις ἀορίστου τῆς ἐλάττωσεως οὔσης τῶν δύο ὀρθῶν κατὰ μὲν τὴν τοσὴνδε ἐλάττωσιν ἀσυμπτῶτους μένειν τὰς εὐθείας, κατὰ δὲ ἄλλην τὴν ταύτης ἐλάσσονα συμπίπτειν. πρὸς δὲ τὸν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἔδειν λεγέσθω παρ' ἡμῶν ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον, ᾧ καὶ **Αριστοτέλης** ἐχρήσατο κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον. ἐὰν ἐφ' ἐνὸς σημείου δύο ἐκβάλλωνται εὐθεῖαι γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ' ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον μέγεθος ὑπερβάλλει ἢ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπείρων οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων ἄπειρον τὸ μεταξὺ. πεπερασμένου γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον, ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους μείζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι. τούτου δὴ προυποτεθέντος λέγω ὅτι, ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τέμνει τις εὐθεῖα τεμεῖ καὶ τὴν λοιπὴν. ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ τεμνέτω τὴν $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\epsilon\zeta\eta}$. λέγω ὅτι τὴν $\overline{\gamma\delta}$ τεμεῖ. ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαι εἰσιν ἀφ' ἐνὸς σημείου τοῦ ζ , εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ $\overline{\beta\zeta}$ $\overline{\zeta\eta}$, παντὸς μεγέθους μείζονα ἔχουσι διάστασιν, ὥστε καὶ τούτου, ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων. ὅταν οὖν μείζον ἀλλήλων διαστῶσιν τῆς

[FR372]



τούτων διαστάσεως τεμεῖ ἢ $\overline{\zeta\eta}$ τὴν $\overline{\gamma\delta}$. ἐὰν ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνη τις εὐθεῖα, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπὴν. τούτου προαποδειχθέντος ἀκολουθῶς δείξομεν τὸ προκείμενον. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἐμπίπτω εἰς αὐτὰς ἢ $\overline{\epsilon\zeta}$ ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$. λέγω ὅτι συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ' ᾗ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσους. ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\epsilon\zeta}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ ἐλάσσους εἰσὶ δύο ὀρθῶν, τῇ ὑπεροζῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἔστω ἴση ἢ ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\beta}$. καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ $\overline{\theta\epsilon}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\chi}$. ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς $\overline{\chi\theta}$ $\overline{\gamma\delta}$ ἐμπέπτωκεν ἢ $\overline{\epsilon\zeta}$ καὶ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\epsilon\zeta}$ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$,



παράλληλοί εισιν αἱ $\overline{\theta\kappa}$ $\overline{\gamma\delta}$ εὐθεῖαι. καὶ τέμνει τὴν $\overline{\kappa\theta}$ ἢ $\overline{\alpha\beta}$. τεμει ἄρα καὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$ διὰ τὸ προοδεδειγμένον. συμπεσοῦνται ἄρα αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ κατὰ τὰ μέρη ἐκεῖνα, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὥστε δέδεικται τὸ προκείμενον.

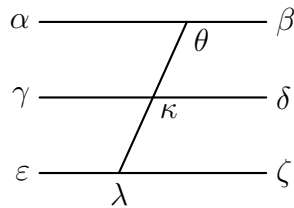
[FR373]

Prop. XXX, theor. XXI. Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Εἴωθεν ὁ γεωμέτρης ἐν τοῖς περὶ τῶν σχέσεων λόγοις δεικνύναι τὴν ταυτότητα διήκουσαν ἐν ἅπασιν τοῖς πρὸς τὸ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχουσι σχέσιν. οὕτω γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἀξιώμασιν ἔλεγεν τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα [καὶ ἀλλήλοις ἴσα] καὶ ἐν τοῖς ἐξῆς ἐπεὶ τὰ τῷ αὐτῷ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ὅμοια ἐστὶ, καὶ οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. κατὰ τοῦτον οὖν τὸν τρόπον καὶ νῦν ἀποδείκνυσιν ὅτι αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. συμβέβηκεν δὲ οὐκ ἐπὶ πασῶν τῶν σχέσεων εἶναι τοῦτο ἀληθές. οὐ γὰρ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια καὶ ἀλλήλων διπλάσια ἐστίν, οὐδὲ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμιόλια καὶ ἀλλήλων ἡμιόλια ἐστίν. ἀλλ' ἔοικεν ἐπ' ἐκείνων μόνων χώραν ἔχειν, ὅσαι ἀντιστρέφουσι συνωνύμως, ἐπὶ τῆς ισότητος, ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος, ἐπὶ τῆς ταυτότητος, ἐπὶ τῆς παραλλήλου θέσεως. ἡ γὰρ παράλληλος παραλλήλῳ παράλληλός ἐστιν, ὡς τὸ ἴσον ἴσῳ ἴσον, καὶ τὸ ὅμοιον ὁμοίῳ ὅμοιον. καὶ γὰρ ἐστὶν ὁμοιότης θέσεως ἢ παραλληλότης, εἰ δυνατόν εἰπεῖν.

Λέγει δ' οὖν καὶ δείκνυσιν ἐν τούτοις ὅτι αἱ τῇ αὐτῇ παράλληλοι πάντως οὕτως ἔχουσιν, ὥστε καὶ ἀλλήλαις εἶναι παράλληλοι. καὶ αὐτὸς μὲν τὰς τῇ αὐτῇ παραλλήλους ἄκρας ἔλαβεν καὶ μέσην, πρὸς ἣν αὐταὶ τὴν ὁμοίαν ἔχουσι σχέσιν, ἵνα καὶ ἀπὸ κοινῆς ἐννοίας ἡμῖν γένηται σαφές τὸ λεγόμενον. εἰ γὰρ αἱ ἐφ' ἐκάτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, πάντως καὶ τῇ μεταξύ κειμένη συμπεσοῦνται καὶ οὐκέτι πρὸς αὐτὴν ἔσονται παράλληλοι. δυνατόν δὲ καὶ ἐναλλάξαντα τὴν θέσιν δεῖξαι ταῖς αὐταῖς ἐφόδοις, αἷς ὁ γεωμέτρης ἐχρήσατο πρὸς τὸ προκείμενον, οἷον πρὸς τὴν $\overline{\alpha\beta}$ καὶ τὴν $\overline{\gamma\delta}$ παράλληλον καὶ τὴν $\overline{\epsilon\zeta}$, ἀμφοτέρων ἀνωτέρω κειμένης ἐκατέρων (?) τῆς $\overline{\alpha\beta}$ καὶ οὐχὶ μέσης. ἐμπίπτουσα γὰρ ἡ $\overline{\theta\kappa\lambda}$ εἰς αὐτὰς ἴσην ποιήσει ἐκατέραν τῶν ὑπὸ $\overline{\theta\kappa\delta}$ $\overline{\kappa\lambda\zeta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\theta\kappa}$, ὅτι (?) ἐναλλάξ, ὥστε καὶ ἀλλήλαις ἴσας ποιήσει τὰς ὑπὸ $\overline{\theta\kappa\delta}$ $\overline{\kappa\lambda\zeta}$. παράλληλοι ἄρα αἱ $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\epsilon\zeta}$. εἰ δὲ λέγοι τις· ἔστωσαν αἱ $\overline{\alpha\theta}$ $\overline{\theta\beta}$ παράλληλοι τῇ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἀλλήλαις ἄρα παράλληλοί

[FR374]



εἰσιν, ἐποῦμεν ὅτι αἱ $\overline{\alpha\theta}$ $\overline{\theta\beta}$ μιᾶς εἰσὶν παραλλήλου μέρη καὶ οὐ δύο. δεῖ γὰρ τὰς παραλλήλους ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένας νοεῖν, ἡ δὲ $\overline{\alpha\theta}$ ἐκβληθεῖσα πίπτει ἐπὶ τὴν $\overline{\theta\beta}$, ἡ αὐτὴ ἄρα ἐστὶν καὶ οὐκ ἄλλη ἐκείνη. πάντα ἄρα τὰ μέρη τῆς παραλλήλου καὶ αὐτὰ παράλληλά ἐστι τῇ εὐθείᾳ ἥ καὶ ὅλη παράλληλος ἦν καὶ τοῖς μέρεσιν αὐτῆς, οἷον καὶ ἡ $\overline{\alpha\theta}$ τῇ $\overline{\kappa\delta}$ καὶ ἡ $\overline{\theta\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\kappa}$. ἐκβαλλόμεναι γὰρ ἐπ' ἄπειρον ἀσήμεπτωτοι μένουσιν.

[FR375]

Τούτοις ἀναγκαίως ἐπεσημηνάμεθα διὰ τὰς σοφιστικὰς ἐνοχλήσεις καὶ τὰς νεαροπρεπεῖς τῶν ἀκουόντων ἕξεις. χαίρουσι γὰρ οἱ πολλοὶ τοῖς τοιούτοις παραλογισμοῖς προστυγχάνοντες καὶ τοῖς ἐπιστήμοσιν ὄχλον περιττὸν ἐπεισάγοντες.

Ἀντιστρέφειν δὲ οὐδὲν δεῖ τὸ θεώρημα καὶ δεικνύναι ὅτι αἱ ἀλλήλαις παράλληλοι καὶ τῇ αὐτῇ παράλληλοί εἰσιν. πάλιν γάρ, ἂν ὑποθώμεθα τὴν ἑτέραν τινὶ παράλληλον, ἐκείνη τε καὶ ἡ λοιπὴ τούτων ἔσσονται τῇ αὐτῇ παράλληλοι, καὶ εἰς ταῦτ' ἐπανήξομεν.

Prop. XXXI, probl. X. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔδει μὴ μόνον ἡμᾶς τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα ταῖς παραλλήλοις μαθεῖν ἐν τοῖς τοῦ στοιχειωτοῦ λόγοις, ἀλλὰ καὶ τὴν γένεσιν ἱστορῆσαι διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων καὶ γινῶναι, πῶς ἂν γένοιτο ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος ἄλλῃ. πολυλαχοῦ γὰρ αἱ γενέσεις τρανεστέραν ἡμῖν ποιοῦσι τῶν ὑποκειμένων τὴν οὐσίαν. τοῦτο δὴ οὖν ὁ στοιχειωτὴς ποιεῖ διὰ τοῦ προκειμένου προβλήματος. σημεῖον γὰρ λαβὼν καὶ εὐθεῖαν ἄγει διὰ τοῦ σημείου τῇ εὐθείᾳ παράλληλον. δεῖ δὲ προειληφέναι ἡμᾶς ὅτι τὸ σημεῖον ἐκτὸς πάντως κεῖσθαι τῆς εὐθείας ἀναγκαῖον. οὐ γάρ, ἐπειδὴ εἴρηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ ἐπ' αὐτῆς αὐτὸ τῆς εὐθείας δώσομεν. οὐ γάρ ἔσται τις ἄλλη παρὰ τὴν εὐθεῖαν ἢ δι' αὐτοῦ φερομένη παράλληλος. μερίσας οὖν τὸ σημεῖον καὶ τὴν εὐθεῖαν ἐδήλωσεν ὅτι τὸ σημεῖον ἐκτὸς λαμβάνειν χρὴ τῆς εὐθείας· ὅπερ ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ διὰ τοῦ προσθεῖναι σαφὲς ἐποίησεν, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον ἀγαγεῖν. ἐν μὲν οὖν κοινὸν τούτοις ἀμφοτέροις τοῖς προβλήμασιν, ἕτερον δὲ ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο κάθετοι οὐκ ἄγονται ἐπὶ τὴν αὐτὴν, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο παράλληλοι οὐκ ἄγονται τῇ αὐτῇ,

[FR376]

δι' ὃ καὶ ὁ στοιχειωτής οὕτως εἶπεν ἐνικῶς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ἐκεῖ κάθετον, ἐνταῦθα δὲ παράλληλον. ἀλλ' ἐκεῖνο μὲν δέδεικται, τοῦτο δὲ φανερόν ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος. εἰ γὰρ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῇ αὐτῇ δύο παράλληλοι ἀχθεῖεν, ἔσονται καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι συμπίπτουσαι κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Δεῖ δὴ καὶ ταῖς διαφοραῖς προσέχειν τῶν προτάσεων, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου. ὅπου μὲν γὰρ τὸ σημεῖον ἀρχὴ ἐστὶ τῆς ἀγομένης, καὶ διὰ τοῦτο ἀπ' αὐτοῦ ἡ ἀγωγή, ὅπου δὲ ἐπ' αὐτῆς ἐστὶ τῆς ἀγομένης, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀγωγή δι' αὐτοῦ. οὐ γὰρ ὡς τεμνούσης εὐθείας τὸ δοθὲν σημεῖον εἴρηται τὸ δι' αὐτοῦ ἀλλ' ὡς συμπιπτούσης αὐτῷ καὶ ὀριζούσης τὸ ἑαυτῆς ἀπόστημα πρὸς τὴν ἐκείνην εὐθεῖαν τῇ διαστάσει τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας. ὅσον γὰρ τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας ἀφέστηκεν, τοσοῦτον ταὶ ἡ παράλληλος ἔχει τὸ μεταξὺ ἑαυτῆς τε καὶ ἐκείνης.

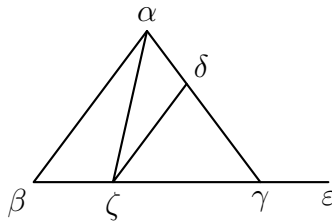
[FR377]

Prop. XXXII, theor. XXII. Παντὸς τριγώνου μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία δύο ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐστὶν ἴση καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὅσον ἐνέλειπεν ἐν τῷ $\overline{ιϛ}$ καὶ $\overline{ιζ}$ θεωρήματι, τοσοῦτον προστίθησιν ἐν τούτῳ. οὐ γὰρ μόνον ὅτι ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων διὰ τούτου μανθάνομεν, ἀλλὰ καὶ ὅσω μείζων. ἴση γὰρ ἀμφοτέραις οὔσα μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῇ λοιπῇ, οὐδὲ ὅτι δύο τοῦ τριγώνου ὁμοιοῦν ἐλάσσους εἰσὶ δυεῖν ὀρθαῖν ἐκ τούτων γινώσκομεν, ἀλλὰ καὶ πόσω ἐλάσσους. τῇ γὰρ λοιπῇ τῶν τριῶν. ἐκεῖνα μὲν οὖν ἀοριστότερα πῶς ἦν τὰ θεωρήματα, τοῦτο δὲ τὸν τῆς ἐπιστήμης ὅρον ἀμφοτέροις ἐπήγαμεν. καὶ οὐ διὰ τοῦτο περιττὰ ἂν εἴποιμεν ἐκεῖνα. καὶ γὰρ συνετέλεσεν ἡμῖν εἰς πολλὰς ἀποδείξεις, ἀφ' ὧν καὶ τοῦτο δεῖξομεν. καὶ ἀναγκαῖον τὴν γνῶσιν ἡμῶν ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς ἐπὶ τὸ τέλειον προῖοῦσαν ἐκ τῶν ἀορίστων ἐπιβολῶν ἐπὶ τοὺς ὀρισμένους καὶ ἀνελέγκτους λόγους μεταβαίνειν.

[FR378]

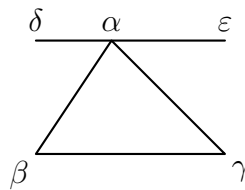
Ἄλλ' ὁ μὲν στοιχειωτής ἔξω τὴν παράλληλον ἄγων ἔδειξεν ἑκάτερον τῶν ζητουμένων. ἐστὶ δὲ καὶ μὴ ἔξω ἄγοντα τὰ αὐτὰ δεικνύναι, τὴν τάξιν μόνην ἐναλλάξαντα τῶν δεικνυμένων. ὁ μὲν γὰρ πρότερον ἔδειξεν τὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἀπὸ τούτου τὸ λοιπὸν κατεσκευάσασεν, ἡμεῖς δὲ ἀνάπαλιν ποιήσωμεν. ἔστω δὴ οὖν τὸ $\overline{αβγ}$ τρίγωνον καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{βγ}$ ἐπὶ τὸ $\overline{ε}$, καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς $\overline{βγ}$ τὸ $\overline{ζ}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\overline{αζ}$, καὶ διὰ τοῦ $\overline{ζ}$ παράλληλος ἤχθω τῇ $\overline{αβ}$ ἡ $\overline{ζδ}$. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ἡ $\overline{ζδ}$ τῇ $\overline{αβ}$ καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπεπτωκεν ἡ τε $\overline{αζ}$ καὶ ἡ $\overline{βγ}$, αἱ τε ἐναλλάξ ἴσαι καὶ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{αζγ}$ ἴση ταῖς ὑπὸ $\overline{ζαβ}$ $\overline{αβζ}$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν



παράλληλον ἀγαγόντες ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\beta}$ ἴση ταῖς ὑπὸ $\overline{\zeta\alpha\gamma}$ $\overline{\alpha\gamma\zeta}$. δύο ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\beta}$ $\overline{\alpha\zeta\gamma}$ ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριγώνου. αἱ ἄρα τρεῖς δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\beta}$ $\overline{\alpha\zeta\gamma}$. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\zeta}$ $\overline{\alpha\gamma\epsilon}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\zeta}$. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐκτὸς ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐστὶν ἴση.

Τοῦτο μὲν δὴ τὸν εἰρημένον ἀποδείκνυται τρόπον· **Εὐδῆμος** δὲ ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς **Πυθαγορείους** ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὔρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας. καὶ δεικνύναι φησὶν αὐτοὺς οὕτως τὸ προκείμενον. ἐστω τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $\overline{\alpha}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ παράλληλος ἡ $\overline{\delta\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon}$, καὶ αἱ ἐναλλάξ

[FR379]

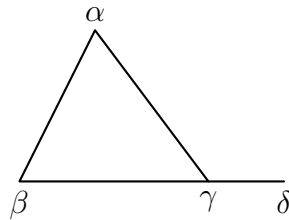


ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\beta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{\epsilon\alpha\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ $\overline{\beta\alpha\gamma}$. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\beta}$ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\alpha\epsilon}$, τουτέστιν αἱ ὑπὸ $\overline{\delta\alpha\beta}$ $\overline{\beta\alpha\epsilon}$, τουτέστιν αἱ δύο ὀρθαὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριγώνου τρισὶ γωνίαις. αἱ ἄρα τρεῖς τοῦ τριγώνου δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι.

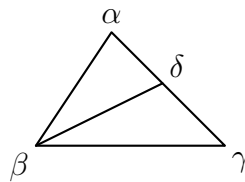
Τοιαύτη μὲν οὖν καὶ ἡ τῶν **Πυθαγορείων** ἀπόδειξις· δεῖ δὲ καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα τῷ θεωρήματι τοῦ στοιχειωτοῦ προσιστορῆσαι. ἀντιστρέφει δὲ дуεῖν πρὸς ἓν, ἐπειδὴ τοῦτο σύνθετόν ἐστι κατὰ τε τὸ ζητούμενον καὶ κατὰ τὸ δεδομένον. καὶ γὰρ τοῦτο διπλοῦν ἐστι· τρίγωνον γὰρ καὶ μία τῶν πλευρῶν ἐκβεβλημένη. καθεῖνο ὡσαύτως. ἔν μὲν γάρ ἐστι τὸ τὴν ἐκτὸς ἴσην εἶναι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἕτερον δὲ τὸ τὰς ἐντὸς τρεῖς γωνίας δύο ὀρθαῖς εἶναι ἴσας. ἐὰν οὖν ὑποθώμεθα καὶ τὴν ἐκτὸς εἶναι ταῖς ἐντὸς ἴσην καὶ ἀπεναντίον, δείκνυμεν ἐκβεβλημένην πλευρὰν καὶ ἐπ' εὐθείας οὖσαν τῇ μιᾷ τῶν τριγώνου πλευρῶν τὴν ἐκτὸς — ἐὰν δὲ τὰς τρεῖς γωνίας τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας, δείκνυμεν ὅτι τὸ σχῆμα τρίγωνόν ἐστι. καὶ οὕτως ὅλον ἔσται τὸ ζητούμενον πρὸς ὅλον ἀντιστρέφον τὸ δεδομένον. ἐστω τοίνυν τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ καὶ ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ ἴση ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. λέγω ὅτι ἡ $\overline{\beta\gamma}$ ἐστὶν ἡ προσεκβεβλημένη

[FR380]

ἕως τοῦ δ , καὶ μία εὐθεΐα ἐστὶν ἡ $\overline{\beta\gamma\delta}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ ἴση ταῖς ἐντὸς



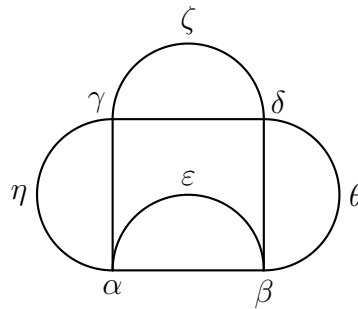
καὶ ἀπεναντίον, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τοῦ τριγώνου. ἀλλ' αἱ τρεῖς τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριγώνου δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. ἐὰν δὲ πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεΐαι ἐξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ εὐθεΐαι. ἡ ἄρα $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$ ἐπ' εὐθείας ἐστίν. πάλιν ἔστω τις σχῆμα τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τρεῖς ἔχον γωνίας μόνας δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$. λέγω ὅτι τρίγωνόν ἐστι καὶ μία εὐθεΐα ἐστὶν ἡ $\overline{\alpha\gamma}$. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $\overline{\beta\delta}$. ἐπεὶ οὖν ἐκατέρου τῶν



$\overline{\alpha\beta\delta}$ $\overline{\delta\beta\gamma}$ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι, ὧν αἱ τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\beta}$ $\overline{\gamma\delta\beta}$ δύο εἰσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. καὶ εἰσὶν πρὸς τῇ $\overline{\beta\delta}$ εὐθείᾳ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\overline{\delta\gamma}$ τῇ $\overline{\delta\alpha}$. ἐὰν οὖν εὐθύγραμμον ᾗ τὸ σχῆμα τοῦ ἔχον τὰς ἐντὸς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας, ἐκ παντὸς τρίγωνόν ἐστίν. οὐ μὴν ἐὰν ἔχη τι τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας, ἐκ παντὸς τρίγωνόν ἐστι. καὶ γὰρ περιφερόγραμμον εὐροῖς ἂν ἔχον τὰς ἐντὸς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ἔστω γὰρ τετράγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ ἐπὶ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἐντὸς ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ $\overline{\alpha\epsilon\beta}$, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων ἐκτὸς τὰ $\overline{\eta}$ $\overline{\zeta}$ $\overline{\theta}$. δύο δὲ γωνίας ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενον τὰς ὑπὸ $\overline{\eta\alpha\epsilon}$ $\overline{\epsilon\beta\theta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσας ταῖς ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\beta}$ $\overline{\delta\beta\alpha}$ — δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς αἰτήμασι — καὶ μόναι αὗται γωνίαι εἰσὶν ἐν τῷ σχήματι τούτῳ. ἐστὶν ἄρα τι σχῆμα μὴ τρίγωνον τὰς ἐντὸς ἔχον γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας.

[FR381]

Ταῦτα καὶ περὶ τῶν ἀντιστρόφων· ἐπεὶ δὲ ἔχομεν ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, δεῖ μέθοδον λαβεῖν, καθ' ἣν καὶ τῶν ἄλλων πάντων πολυγώνων εὐθυγράμμων τὰς γωνίας εὐρήσομεν ὁπόσαις ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, οἷον τετραγώνου, πενταγώνου καὶ τῶν ἐξῆς ἀπάντων πολυπλεύρων.



χρή τοίνυν εἰδέναι πρῶτον ὅτι πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα ἀναλύεται. πάντων γὰρ ἀρχὴ τῆς συστάσεως τρίγωνον, ὃ καὶ ὁ Πλάτων ἔφη διδάσκων ὅτι ἡ ὀρθή (?) τῆς ἐπιπέδου βάσεως ἐκ τριγώνων συνέστηκεν. ἕκαστον δὲ ἀναλύεται εἰς δυάδι ἐλάσσονα τρίγωνα τῶν οἰκείων πλευρῶν, εἰ τετράπλευρόν ἐστιν, εἰς δύο, εἰ πεντάπλευρον, εἰς τρία, εἰ ἑξαπλευρον, εἰς τέσσαρα. δύο γὰρ τρίγωνα συντεθέντα τετράπλευρον ἐποίησε εὐθύς· ὥ δὲ τῶν συνθέτων τριγώνων ἀριθμῷ τὸ πρῶτον συστὰν διήνεγκεν τῶν ἑαυτοῦ πλευρῶν, τούτῳ καὶ τὰ ἐξῆς πάντα διαφέρει. δυάδι ἄρα πᾶν πολύπλευρον πλείους ἔχει πλευρὰς τῶν τριγώνων, εἰς ἃ διαλύεται. ἀλλὰ μὴν ἅπαν γε τρίγωνον δέδεικται δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχον τὰς γωνίας. διπλάσιος ἄρα ὁ τῶν γωνιῶν (?) ἀριθμὸς αὐτῶν τῶν συντεθέντων τριγώνων γενόμενος παρέξεται τὸ πλῆθος τῶν ὀρθῶν, ὅσαις ἕκαστον πολύγωνον ἴσας ἔχει γωνίας. διὸ πᾶν μὲν τετράπλευρον τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει γωνίας· ἐκ δυεῖν γὰρ συνέκειται τριγώνων· πᾶν δὲ πεντάπλευρον ἕξ, καὶ τοῦτο ἐξῆς ὁμοίως.

[FR382]

Ἐν μὲν οὖν τοῦτο ληπτέον ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου περὶ πάντων τῶν πολυγώνων ἅμα καὶ εὐθυγράμμων· ἕτερον δὲ ἐπόμενον τούτῳ συνέλωμεν, ὅτι πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον ἐκάστης τῶν πλευρῶν ἅπαξ ἐκβληθείσης τὰς ἐκτὸς συνισταμένας γωνίας ἴσας ἔχει τέτρασιν ὀρθαῖς. διπλάσιος μὲν γὰρ εἶναι δεῖ τὰς ἐφ' ἐκάτερα γωνίας ὀρθὰς τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν, ἐπειδὴ πρὸς ἐκάστη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι συνίστανται. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων ταῖς ἐντὸς ὀρθῶν αἱ λοιπαὶ γίνονται αἱ ἐκτὸς τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι. οἷον εἰ τὸ σχῆμα τρίγωνον, ἐκάστης αὐτοῦ πλευρᾶς ἅπαξ ἐκβαλλομένης ἕξ ὀρθαῖς ἴσαι συνίστανται γωνίαι αἱ τε ἐντὸς καὶ ἐκτός, ὧν αἱ ἐντὸς ἴσαι δυσὶν, αἱ λοιπαὶ ἄρα αἱ ἐκτὸς τέτρασιν, — εἰ δὲ τετράπλευρον, ὀκτὼ αἱ πᾶσαι· διπλάσιαι γὰρ τῶν πλευρῶν· ὧν ἐντὸς τέτρασιν, καὶ ἐκτὸς ἄρα ἄλλαις τοσαύταις ἴσαι, — εἰ δὲ πεντάπλευρον, δέκα μὲν αἱ πᾶσαι, ἕξ δὲ ἐντὸς, τέτρασι δὲ ταῖς λοιπαῖς αἱ ἐκτός· καὶ ἐπ' ἅπειρον ὁμοίως ἢ αὐτῇ μέθοδος.

[FR383]

Ἐπὶ δὴ τούτοις κάκεῖνα συναγάγωμεν ὅτι διὰ τοῦτο τὸ θεωρήμα τ'ο μὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκάστην ἔχει γωνίαν διμοίρου ὀρθῆς, τὸ δὲ ἰσοσκελές, ὅταν ἔχη τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ ὀρθήν, τὰς λοιπὰς ἡμισείας ὀρθῆς ἔχει, οἷον τὸ ἡμιτετράγωνον, τὸ δὲ σκαληνὸν τὸ ἡμιτρίγωνον, ὃ γίνεται ἐν ἰσοπλεύρῳ

τριγώνῳ καθέτου ἀχθείσης ἀφ' οἷας τινὸς γωνίας ὑπὸ τὴν ὑποτείνουσιν αὐτὴν πλευράν, τὴν μὲν ἔχει ὀρθήν, τὴν δὲ διμοίρου οὔσαν, ἥτις ἦν καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὴν δὲ λοιπὴν ἄρα τρίτου. δεῖ γὰρ εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας τὰς τρεῖς. ταῦτα δὲ οὐ παρέργως ἐπισημαίνομαι, ἀλλὰ ὥς προπαρασκευάζοντα ἡμᾶς πρὸς τὴν τοῦ Τιμαίου διδασκαλίαν.

[FR384]

Καὶ μὴν κάκεῖνο ῥητέον, ὅτι τὸ τὰς ἐντὸς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν καθ' αὐτὸ καὶ ἢ αὐτὸ ὑπάρχει τῷ τριγώνῳ· δι' ὃ καὶ Ἀριστοτέλης πρόχειρον ἔχει τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς πραγματείαις τὸ ἢ αὐτὸ θεωρῶν. ὥς οὖν παντὶ σχήματι τὸ πεπερατῶσθαι καθ' αὐτὸ ὑπάρχει καὶ πρώτως, οὕτω τῷ τριγώνῳ τῷ εὐθυγράμμῳ παντί, εἰ καὶ μὴ σχήματι παντί, τὸ τὰς ἐντὸς γωνίας δυεῖν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν. καὶ ἔοικεν καὶ κατὰ τὰς κοινὰς ἐννοίας προσπίπτειν ἡμῖν ἢ τοῦ θεωρήματος ἀλήθεια. ἐὰν γὰρ νοήσωμεν εὐθεῖαν καὶ ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς τινὰς πρὸς ὀρθὰς ἐστώσας, εἴτα συνιούσας εἰς τριγώνου γένεσιν, ὁρῶμεν ὅτι, καθόσον συνεύουσιν, κατὰ τοσοῦτον ἐλαττοῦσι τὰς ὀρθὰς, ἃς ἐποιοῦν πρὸς τῇ εὐθείᾳ, ὥστε ὅσον ἐκείνων (?) ἀφείλον, τοσοῦτον προσλαβοῦσαι κατὰ τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ σύνευσιν ἐξ ἀνάγκης τὰς τρεῖς ποιοῦσιν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

[FR385]

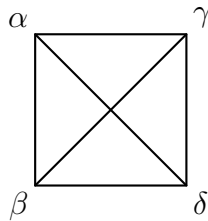
Prop. XXXIII, theor. XXIII. Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ὥσπερ μεθόριον ἐλέγομεν εἶναι τῆς τε περὶ τῶν παραλλήλων καὶ τῆς τῶν παραλληλογράμμων ζητήσεως. καὶ γὰρ τῶν ἴσων τε καὶ παραλλήλων εὐθειῶν δοκεῖ τι σύμπτωμα λέγειν καὶ γένεσιν παραλληλογράμμων λεληθυῖαν παραδίδωσι. γίνεται γὰρ παραλληλόγραμμον ἐκ τε τῶν ἐξ ἀρχῆς ἴσων καὶ παραλλήλων καὶ ἐκ τῶν ταύτας ἐπιζευγνυουσῶν καὶ δεικνυμένων ὡσαύτως ἴσων τε καὶ παραλλήλων. διὸ καὶ τὸ μετὰ τοῦτο εὐθύς ὥς ἂν ὑποστάντος ἤδη τοῦ παραλληλογράμμου τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα τοῖς τοιοῦτοις χωρίοις θεωρεῖ.

Ταῦτα μὲν οὖν σαφῆ· δεῖ δὲ καὶ τὴν ἀκρίβειαν τὴν ἐν τῇ προτάσει διασκέψασθαι. πρῶτον μὲν οὖν ὅτι οὐκ ἤρκεσθη τῷ ἴσας εἶναι τὰς ἐπιζευγνυμένας. οὐ γὰρ πάντως αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἴσας ἴσαι εἰσίν, εἰ μὴ καὶ παράλληλοι εἶεν. τριγώνου γὰρ ὄντος ἰσοσκελοῦς καὶ σημείου ληφθέντος ἐπὶ μιᾷ τῶν ἴσων καὶ ἀχθείσης διὰ τοῦδε τῇ βάσει παραλλήλου ἴσας μὲν ἐπιζευγνύουσιν ἢ τε παράλληλος τῇ βάσει καὶ αὐτὴ ἡ βάσις· οὐ μέντοι καὶ ἴσαι εἰσίν. οὐ γὰρ ἦσαν ἐκεῖναι παράλληλοι αἱ συμπίπτουσαι κατὰ τὴν τοῦ τριγώνου κορυφήν. δεύτερον δὲ ὅτι οὐδὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ὑποκειμένας εὐθείας, μὴ ἴσας δέ, τὰς ἐπιζευγνυούσας παραλλήλους ποιήσειν ὑπέλαβεν. ἐπὶ γὰρ τῆς εἰρημένης κατασκευῆς τῆς κατὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ τοῦτο φανερόν. ἢ γὰρ ἀχθεῖσα καὶ ἡ βάσις παράλληλοί εἰσιν· ἀλλ' αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτάς οὐ παράλληλοι.

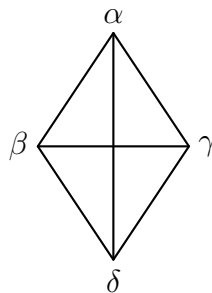
[FR386]

μέρη γάρ εἰσι τῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς πλευρῶν. δεῖ δὴ οὖν πρὸς μὲν τὴν ἰσότητα τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τῆς τῶν ἐπιζευγνυμένων παραλλήλου θέσεως, πρὸς δὲ τὴν τῶν παραλλήλων θέσιν τῆς ἐκεῖνων ἰσότητος. διόπερ ὁ στοιχειωτῆς ἄμφω παρέλαβεν ἐπὶ τῶν ἐπιζευγνυμένων, ἵνα ἄμφω δείξῃ καὶ περὶ τὰς ἐπιζευγνυούσας εὐθείας, τό τε ἴσας ἀλλήλαις εἶναι καὶ τὸ παραλλήλους. τρίτον δὲ λεγέσθω πρὸς τούτοις ὅτι καὶ ἴσων ὑποκειμένων εὐθειῶν καὶ παραλλήλων οὐ πάντως αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰ γὰρ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐπιζεύξεις ποιησόμεθα, παραλλήλους μὲν αὐτὰς ἀδύνατον εἶναι — τέμνονται γὰρ ὑπ' ἀλλήλων — ἴσας δὲ ποτὲ μὲν δυνατόν, ποτὲ δὲ ἀδύνατον. εἰ μὲν γὰρ λάβοις ἢ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες χωρίον ὡς τὸ $\overline{αβγδ}$ καὶ ἐπιζεύξαις τὰς $\overline{αδ}$ $\overline{βγ}$, αἱ διάμετροι ἴσαι μὲν, οὐ παράλληλοι δέ. καίτοι ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ



παραλλήλους τὰς καταντικρὺ πλευρὰς τῶν εἰρημένων χωρίων. εἰ δὲ ῥόμβον ἢ ῥομβοειδές, αἱ διάμετροι τούτων πρὸς τῷ μὴ παράλληλοι εἶναι οὐδὲ ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ $\overline{αβ}$ τῇ $\overline{γδ}$, κοινὴ δὲ ἡ $\overline{αγ}$, καὶ γωνία ἄνισος ἡ ὑπὸ $\overline{βαγ}$ τῇ ὑπὸ $\overline{αγδ}$, καὶ αἱ βάσεις ἄνισοί εἰσιν. εἰκότως οὖν ὁ στοιχειωτῆς ἀξιοῖ

[FR387]



τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ποιεῖσθαι τὴν ἐπίζευξιν, ἵνα τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων ὑποκειμένων τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{βδ}$ μὴ τὰς $\overline{αδ}$ καὶ $\overline{βγ}$ λαβῶμεν τὰς ἐπιζευγνυούσας, ἀλλὰ τὰς $\overline{αβ}$ καὶ $\overline{γδ}$. ταύτας γὰρ ἂν καὶ δείξαιμεν ἴσας καὶ παραλλήλους, ἐκεῖνας δὲ παραλλήλους μὲν οὐδέποτε, ἴσας δὲ ἐπὶ μὲν τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ἑτερομήκους δείξαιμεν ἂν, ἐπὶ δὲ τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς οὐκ ἂν ποτε δείξαιμεν, τὸ γὰρ ἀντικείμενον δέδεικται, ὅτι ἄνισοί εἰσι διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν.

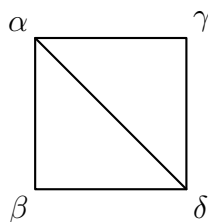
Prop. XXXIII, theor. XXIII. Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἐκ τοῦ προειρημένου θεωρήματος ὑποστὰν ἤδη τὸ παραλληλόγραμμον λαβὼν θεωρεῖ τὰ μερὶ αὐτὸ πρῶτως ὑπάρχοντα καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἰδίας αὐτοῦ συστάσεως. ἔστιν δὲ ταῦτα· τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας εἶναι καὶ τὰς γωνίας τὰς ἀπεναντίον ἴσας, καὶ τὸ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς διαμέτρου τὰ χωρία. περὶ γὰρ τούτων εἴρηται τὸ καὶ ἡ **διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει**, ὡς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ διχοτομούμενον ὅλον, ἀλλὰ μὴ τὰς γωνίας, δι' ὧν ἡ διάμετρος ἔρχεται. ταῦτα οὖν καθ' αὐτὸ τοῖς παραλληλογράμμοις ὑπάρχει τὰ τρία· ἡ τῶν ἀπεναντίον [γωνιῶν ἰσότης, ἡ τῶν ἀπεναντίον] πλευρῶν ἰσότης, ἡ τῶν χωρίων κατὰ τὰς διαμέτρους διχοτομία. καὶ ὁρᾷς ὅπως ἀπὸ πάντων ἐθήρασε τὰς ιδιότητας αὐτῶν, ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ἀπὸ τῶν γωνιῶν. ἀπὸ τῶν ἐμβαδῶν. τεττάρων δὲ ὄντων παραλληλογράμμων, ἃ καὶ ἐν ταῖς ὑποθέσεσιν ὠρίσατο, τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἑτερομήκους, τοῦ ῥόμβου, τοῦ ῥομβοειδοῦς, ἄξιον ἐπισημῆνασθαι τοσοῦτον, ὅτι, εἰ μὲν τὰ τέσσαρα διαροῦμεν κατὰ τὰ ὀρθογώνια, εὐρήσομεν οὐ μόνον τὰ χωρία διχοτομούσας τὰς διαμέτρους αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ αὐτὰς ἴσας τὰς διαμέτρους ἐπὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν — ἐπὶ δὲ τῶν μὴ τοιούτων ἀνίσους, καὶ εἴρηται ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι — εἰ δὲ κατὰ τὰ ἰσόπλευρα, πάλιν εὐρήσομεν ἐν τοῖς ἰσοπλεύροις οὐ μόνον τὰ χωρία δίχα τεμνόμενα ὑπὸ τῶν διαμέτρων, ἀλλὰ καὶ τὰς γωνίας, δι' ὧν αὐταὶ φέρονται. καὶ γὰρ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου τὰς γωνίας αἱ διαμέτροι διχοτομοῦσιν, οὐ τὰ χωρία μόνον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτερομήκους καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς τὰ χωρία μόνον.

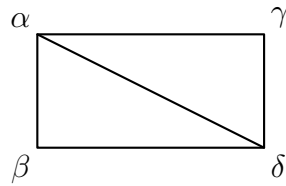
[FR388]

Ἐστω γὰρ τετράγωνον ἢ ῥόμβος τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ διάμετρος ἡ $\overline{\alpha\delta}$. ἐπεὶ οὖν

[FR389]



αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\delta}$ ἴσαι ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ — ἰσόπλευρα γάρ — καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\delta}$ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ ἴσαι — ἀπεναντίον γάρ — καὶ ἡ βάσις κοινή, πάντα ἴσα πᾶσιν, ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\alpha\beta}$ γωνίαι δίχα τέμνεται. πάλιν ἔστω τὸ αὐτὸ ἑτερόμηκες ἢ ῥομβοειδής. εἰ οὖν δίχα τέμνεται ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\beta}$, ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\delta}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\beta}$, ἴση ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\beta}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$. ἀλλ' εἰσὶν ἄνισοι. ὡς οὖν συλλήβδην εἰπεῖν, ἐπὶ μὲν τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διαμέτροι ἴσαι διὰ τὴν ὀρθότητα τῶν γωνιῶν καὶ αἱ γωνίαι δίχα τέμνονται ὑπὸ τῶν διαμέτρων διὰ τὴν



ισότητα τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἰς ἴσα διαιρεῖται κατὰ τὴν διαγώνιον διὰ τὴν κοινὴν ιδιότητα τῶν παραλληλογράμμων. ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτερομήκους αἱ μὲν διαμέτροι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι οὐ τέμνονται δίχα ὑπὸ τῶν διαμέτρων, ἡ δὲ τῶν χωρίων εἰς ἴσα διαίρεσις ὑπάρχει, καὶ τοῦτο καθόσον ἐστὶ παραλληλόγραμμον. ἐπὶ δὲ τοῦ ῥόμβου ἄνισοι μὲν αἱ διαμέτροι, διχοτομοῦνται δὲ ὑπὸ τούτων οὐ μόνον τὰ χωρία, διότι παραλληλόγραμμον, ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι, διότι ἰσοπλευρον. ἐπὶ δὲ τοῦ λοιποῦ τοῦ ῥομβοειδοῦς καὶ αἱ διαμέτροι ἄνισοι ὡς μὴ ὀρθογωνίου καὶ αἱ γωνίαι εἰς ἄνισα τέμνονται ὑπὸ τούτων ὡς μὴ ἰσοπλευρου, μόνον δὲ τὰ χωρία ἴσα γίνεται τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν διαγωνίων ὡς παραλληλογράμμου.

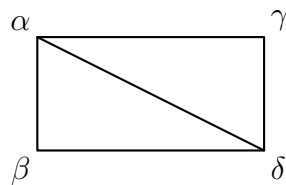
[FR390]

Ταῦτα μὲν οὖν εἴρηται τὴν ἐν ταῖς διαιρέσεσι τῶν παραλληλογράμμων τεττάρων ὄντων ὑποδεικνύοντα διαφορὰν, ἐκεῖνο δὲ ἄξιον μὴ παρελθεῖν ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι τεχνικὸν ἀναφαινόμενον, ὅτι τῶν θεωρημάτων τῶν μὲν ὄντων καθόλου, τῶν δὲ οὐ καθόλου — πῶς δὲ τούτων ἑκάτερον λέγομεν, ἀναμνήσομεν μετέρχεσθαι — ἐν τῷ μεμερίσθαι (?) τὸ ζητούμενον καὶ τὸ μὲν ἔχει καθόλου, τὸ δὲ οὐκέτι τοιοῦτον. καίτοι γε δόξειεν ἂν πᾶν θεώρημα εἶναι καθολικόν, καὶ πᾶν τὸ δεικνύμενον ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ τοιοῦτον ὑπάρχειν. οἷον καὶ ἐνταῦθα οὐ μόνον τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἢ γωνίας ἴσας ἔχειν καθόλου δοκεῖ λέγεσθαι κατὰ πάντων τῶν παραλληλογράμμων, ἀλλὰ καὶ τὸ τὴν διάμετρον διχοτομεῖν ἕκαστον. ἀλλ' ὅμως τὰ μὲν καθόλου δείκνυσθαι λέγομεν, τὰ δ' οὐ. ἄλλως γὰρ εἴωθε προσαγορεύεσθαι καθόλου τὸ ἐπὶ πάντων ἀληθεῦον, ἐφ' ὧν λέγεται, ἄλλως τὸ πάντα περιλαμβάνον, οἷς ὑπάρχει τὸ αὐτὸ σύμπτωμα. καθόλου γὰρ καὶ ὅτι πᾶν ἰσοσκελὲς τὰς τρεῖς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει, ὅτι ἐπὶ πάντων ἀληθὲς τῶν ἰσοσκελῶν· καθόλου δὲ καὶ ὅτι πᾶν τρίγωνον τὰς τρεῖς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχει, ὅτι πάντα περιείλθfen, οἷς τοῦτο καθ' αὐτὸ ὑπέρχει. διὸ καὶ πρῶτως τριγώνῳ φαμὲν δείκνυσθαι τὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν τὰς γωνίας. κατὰ τοῦτο τοίνυν τὸ σημαινόμενον τὰ μὲν καθόλου τῶν θεωρημάτων λέγοντες, τὰ δὲ οὐ καθόλου, τοῦτο τὸ θεώρημά φαμεν τὸ μὲν τῶν ζητουμένων ἔχειν καθόλου, τὸ δὲ οὐ. τὸ μὲν γὰρ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἢ γωνίας ἴσας ἔχειν καθολικόν ἐστὶ — μόνοις γὰρ ὑπάρχει τοῖς παραλληλογράμμοις — τὸ δὲ τὴν διάμετρον δίχα τὸ χωρίον τεμεῖν οὐ καθόλου, διότι μὴ πάντα περιείλθfen, ἐφ' ὅσων θεωρεῖται τὸ σύμπτωμα τοῦτο· καὶ γὰρ τοῖς κύκλοις ὑπάρχει καὶ ταῖς ἐλλείψεσι. καὶ εἰκόασιν αἱ πρῶται τῶν πραγμάτων ἐπιβολαὶ τοιαῦται εἶναι μερικώτεραι, προϊοῦσαι δὲ τὸ ὅλον συλλαμβάνειν. θεωρήσαντες γὰρ οἱ ἀρχαῖοι ὅτι ἡ διάμετρος δίχα τέμνει τὴν ἑλλειψιν καὶ ὅτι τὸν κύκλον καὶ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ κοινὸν ἐν τούτοις

[FR391]

ἐπεθεωρησαν. λανθάνει δέ, φησὶν Ἀριστοτέλης, τὸ μὴ καθόλου δεικνύς τις ὡς καθόλου διὰ τὸ εἶναι ἀνώνυμον τὸ κοινόν, ὥς πρῶτως ὑπάρχει τὸ σύμπτωμα. τί γὰρ κοινὸν ἀριθμοῖς καὶ μεγέθεσι καὶ κινήσεσι καὶ φθόγγοις, οἷς ἅπασιν ὑπάρχει τὸ ἐναλλάξ, οὐκ ἔστιν εἰπεῖν. καὶ τί κοινὸν ἐλλείψει καὶ κύκλῳ καὶ παραλληλογράμμῳ, χαλεπὸν ἀποδοῦναι. τὸ μὲν γὰρ ἐστὶν εὐθύγραμμον, τὸ δὲ περιφερόγραμμον, τὸ δὲ μικτόν. διόπερ οἴομεθα καθόλου δεικνύναι τὸν ἀποδεικνύντα ὅτι πᾶν παραλληλόγραμμον ἢ διάμετρος δίχα τέμναι τῷ μὴ συνορᾶν τὸ κοινόν, δι' ὃ ἀληθές. τοῦτο μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων τὸ τοιοῦτον οὐκ ἔστιν καθόλου διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν, ἐκεῖνο δὲ τὸ πᾶν παραλληλόγραμμον ἴσας ἔχειν τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας. καὶ γὰρ ἐὰν ὑποτεθῇ τι σχῆμα τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχον, δειχθήσεται τοῦτο παραλληλόγραμμον. ἔστω γὰρ τοιοῦτον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ διάμετρος ἡ $\overline{\alpha\delta}$. ἐπεὶ οὖν αἱ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\delta}$ ἴσαι ταῖς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι

[FR392]

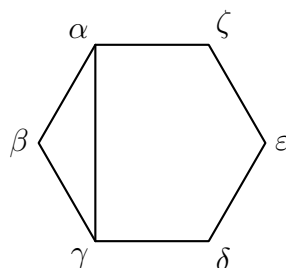


καὶ ἡ βᾶσις κοινή, καὶ πάντα πᾶσιν ἴσα. εἰ ἄρα ἡ ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\delta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\delta\beta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\delta}$, παραλλήλος ἄρα ἡ μὲν $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$, ἡ δὲ $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$, ὥστε παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Τοσαῦτα περὶ τούτων· ἔοικεν δὲ καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα τῶν παραλληλογράμμων ὁ στοιχειωτὴς συνθεῖναι τὴν ἀφορμὴν λαβὼν ἀπὸ τοῦ προειρημένου θεωρήματος. ἐπειδὴ γὰρ ἔδειξεν ὅτι αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσι, δῆλον ὅτι τὰς ἀπεναντίον ἀπέφηνε παραλλήλους, καὶ τὰς ἐπιζευγνυούσας καὶ τὰς ἐπιζευγνυμένας. τὸ δὲ ὑπὸ παραλλήλων περιεχόμενον εἰκότως παραλληλόγραμμον ἐκάλεσεν, ὡς τὸ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενον εὐθύγραμμον προσείρηκεν.

[FR393]

Καὶ ὁ μὲν στοιχειωτὴς δῆλός ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον ὡς ἐν τετραπλεύροις τιθέμενος. ἐπιστῆσαι δὲ ἄξιον, μήποτε καὶ πᾶν εὐθύγραμμον ἀρτιόπλευρον, ὅταν ὁσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ὑπάρχη, παραλληλόγραμμον ῥητέον. ἔχει γὰρ καὶ τοῦτο τὰς ἀπεναντίον πλευράς ἴσας τε καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας ἴσας· οἷον τὸ ἑξάγωνον καὶ τὸ ὀκτάγωνον καὶ τὸ δεκάγωνον. ἐὰν γὰρ νοήσης ἑξάγωνον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$ καὶ ἐπιζεύξης τὴν $\overline{\alpha\gamma}$, δεικνύεις παράλληλον τὴν $\overline{\alpha\zeta}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$. ἐστὶ γὰρ μιᾶς ὀρθῆς καὶ τρίτου ἢ πρὸς τῷ $\overline{\beta}$ καὶ ἐκάστη τῶν τοῦ ἑξάγωνου, ὅταν ἰσογώνιον ᾖ, καὶ ἴση ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ — κεῖται γὰρ ἰσόπλευρον — ἐκατέρω ἄρα τῶν ὑπὸ $\overline{\beta\alpha\gamma}$ $\overline{\beta\gamma\alpha}$ τρίτου ἐστίν, αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{\zeta\alpha\gamma}$



$\overline{\alpha\gamma\delta}$ ὀρθαί εἰσιν, ὥστε παράλληλος ἡ $\overline{\alpha\zeta}$ τῇ $\overline{\gamma\delta}$. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς ἄλλας τὰς ἀπεναντίον δείξομεν παραλλήλους, καὶ ἐπὶ τοῦ ὀκταγώνου ὡσαύτως καὶ τῶν λοιπῶν. εἰ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ὑπὸ παραλλήλων τῶν ἀπεναντίον περιεχόμενον, καὶ ἐν τοῖς μὴ τετραπλεύροις ἔσται παραλληλόγραμμον. πλήν ὅτι κατὰ τὸν στοιχειωτὴν πᾶν παραλληλόγραμμον τετράπλευρόν ἐστι, φανερόν. δηλοῖ δὲ ἐν ἐκείνῳ μάλιστα τῷ θεωρήματι, ἐν ᾧ φησι παραλληλόγραμμον τριγώνῳ τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ὄν διπλάσιον εἶναι τοῦ τριγώνου. τοῦτο γὰρ ἐπὶ μόνων τῶν τετραπλεύρων ἀληθές.

[FR393]

Prop. XXXV, theor. XXV. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ὡσπερ τῶν θεωρημάτων ἐλέγομεν εἶναι τὰ μὲν καθολικά, τὰ δὲ ἐπὶ μέρους, καὶ ὃν τρόπον ταῦτα διαιρούμενοι (?) προσετίθεμεν, καὶ ὅτι τὰ μὲν ἀπλᾶ, τὰ δὲ σύνθετα, καὶ τί τούτων ἐκάτερον ἐπεδείκνυμεν, οὕτω δὴ κατ' ἄλλην διάκρισιν τὰ μὲν εἶναι τοπικά φαμεν, τὰ δὲ οὐ. καλῶ δὲ τοπικά μὲν, ὅσοις ταῦτὸν σύμπτωμα πρὸς ὅλῳ τινὶ τόπῳ συμβέβηκεν, τόπον δὲ γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας θέσιν ποιούσαν ἐν καὶ ταύτῳ σύμπτωμα. τῶν γὰρ τοπικῶν τὰ μὲν ἐστι πρὸς γραμμαῖς συνιστάμενα, τὰ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις. καὶ ἐπειδὴ τῶν γραμμῶν αἱ μὲν εἰσιν ἐπίπεδοι, αἱ δὲ στερεαί, —ἐπίπεδοι μὲν, ὧν ἐν ἐπιπέδῳ ἀπλῇ ἢ νόησις, ὡς τῆς εὐθείας, στερεαὶ δέ, ὧν ἡ γένεσις ἔκ τινος τομῆς ἀναφαίνεται στερεοῦ σχήματος, ὡς τῆς κυλινδρικῆς ἑλικος καὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν — φαίην ἂν καὶ τῶν πρὸς γραμμαῖς τοπικῶν τὰ μὲν ἐπίπεδον ἔχειν τόπον, τὰ δὲ στερεόν.

[FR395]

Τὸ μὲν οὖν προκείμενον θεώρημα καὶ τοπικόν ἐστι καὶ τῶν πρὸς γραμμαῖς τοπικῶν καὶ ἐπίπεδον. τὸ γὰρ μεταξὺ πᾶν τῶν παραλλήλων τόπος ἐστὶ τῶν συνισταμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλογράμμων, ἃ δὴ καὶ δείκνυσιν ὁ στοιχειωτὴς ἴσα ἀλλήλοις. τῶν δὲ στερεῶν λεγομένων τοπικῶν θεωρημάτων παράδειγμα ἔστω τοιοῦτο· τὰ εἰς τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὴν ὑπερβολὴν ἐγγραφόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν. ὅτι γὰρ ἡ ὑπερβολὴ στερεὰ γραμμὴ, ἐστὶ δῆλον. κώνου γὰρ ἐστὶ γραμμὴ.

Τὰ δ' οὖν τοιαῦτα τῶν θεωρημάτων, ὡς φησὶν ὁ Γεμῖνος, ἀπείκαζεν ὁ Χρύσιππος ταῖς ιδέαις. ὡς γὰρ ἐκεῖναι τῶν ἀπείρων ἐν πέρασιν ὠρισμένοις

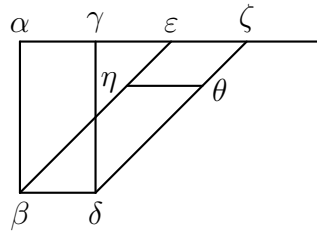
τὴν γένεσιν περιλαμβάνουσιν, οὕτως καὶ ἐν τούτοις τῶν ἀπείρων ἐν ὠρισμένοις τόποις ἢ περίληψις γίνεται. καὶ διὰ τὸν ὅρον τοῦτον ἡ ἰσότης ἀναφαίνεται. τὸ γὰρ ὕψος τῶν παραλλήλων τὸ αὐτὸ μένον ἀπείρων νοουμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλογράμμων πάντα ἴσα ἀλλήλοις ἀποφαίνει.

Τοπικὸν οὖν θεωρημα πρῶτον ὁ στοιχειωτῆς ἀνέγραψεν τὸ προκείμενον καὶ ἔοικεν ὡς ἐν στοιχείῳ κατὰ πάσας τὰς διαιρέσεις τὰ θεωρήματα ποικίλλων μηδὲ τὴν τοιαύτην εἰκότως ἰδέαν αὐτῶν παραλείπειν. ἀλλὰ ἐνταῦθα μὲν, ἐπειδὴ περὶ εὐθυγράμμων ὁ λόγος, τοπικὰ παραδίδωσιν ἐπίπεδα πρὸς εὐθείαις, ἐν τῷ τρίτῳ τὰ περὶ κύκλων καὶ τῶν ἐν τούτοις συμπτωμάτων πραγματενόμενος τὰς περιφερείας ἡμᾶς ἀναδιδάξει τῶν τοπικῶν ἅμα καὶ ἐπιπέδων θεωρημάτων. τοιοῦτον γὰρ ἐν ἐκείνοις **τὸ αἶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαί ἴσαι ἀλλήλαις** καὶ **τὸ αἶ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθαί**. ἀπείρων γὰρ συνισταμένων πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνιῶν τῆς αὐτῆς βάσεως οὔσης πᾶσαι δείκνυνται ἴσαι. καὶ ἐστὶν ἀνάλογον ἐκεῖνα τοῖς τριγώνοις καὶ παραλληλογράμμοις τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως.

[FR396]

Τὸ μὲν δὴ τῶν προσεχῶς ζητηθησομένων θεωρημάτων εἶδος τοιοῦτόν ἐστι, τοπικὸν παρὰ τοῖς παλαιοῖς μαθηματικοῖς ἐπονομαζόμενον. δόξειεν δ' ἂν παντελῶς εἶναι θαυμαστὸν τοῖς ἀπείροις τῆς τοιαύτης θεωρίας, εἰ τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. πῶς γὰρ τοῦ μήκους τῶν συνισταμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως χωρίων ἐπ' ἀπειρον αὐξανομένου — ἐφ' ὅσον γὰρ τὰς παραλλήλους ἐκβάλλομεν, ἐπὶ τοσοῦτον καὶ τὰ μήκη τῶν παραλληλογράμμων αὖξιν δυνάμεθα — πῶς δὲ τούτου γινομένου μένει τῶν χωρίων ἡ ἰσότης, εἰκότως ἂν τις ἐπιζητήσῃ. εἰ γὰρ τὸ μὲν πλάτος ταῦτόν — ἡ γὰρ βάσις μία — τὸ δὲ μήκος μείζον, πῶς οὐχὶ καὶ τὸ χωρίον μείζον; ἐστὶ μὲν οὖν τὸ θεωρημα τοῦτο καὶ τὸ περὶ τῶν τριγώνων ἐξῆς τῶν παραδόξων ἐν τοῖς μαθημασι καλουμένων θεωρημάτων. ἐξεργάσαντο γὰρ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων τὸν παράδοξον λεγόμενον τόπον, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἐπὶ τῶν δειγμάτων, καὶ τίθενται καὶ τοῦτο τὸ θεωρημα τῶν τοιούτων εἶναι. καταπλήττει γοῦν τοὺς πολλοὺς εὐθύς, εἰ τὸ μήκος πολλαπλασιαζόμενον οὐκ ἀναιρεῖ τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως. ὁμοίως δὲ λεκτέον ὅτι μέγιστον ἢ τῶν γωνιῶν ἰσότης δύναται καὶ ἀνισότης πρὸς τὴν αὖξιν τῶν χωρίων ἢ τὴν ἐλάττωσιν. ὅσῳ γὰρ ἀνίσους ποιοῦμεν τὰς γωνίας τόσῳ μᾶλλον ἐλασσοῦμεν τὸ χωρίον, εἰ μένοι τὸ μήκος καὶ τὸ πλάτος ταῦτόν. δεῖ οὖν τοῦ μήκους αὖξήσεως, ἵνα τὴν ἰσότητα φυλάξωμεν. ἔστω γὰρ εἰ τύχοι παραλληλόγραμμον τὰ $\alpha\beta\gamma\delta$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\alpha\gamma$ εἰς ἀπειρον. καὶ ἔστω τυχὸν ὀρθογώνιον τοῦτο, καὶ ἐπὶ τῆς $\beta\delta$ βάσεως ἕτερον συνεστάτω τὸ $\beta\epsilon\zeta\delta$. ὅτι μὲν οὖν τὸ μήκος ἡϋξῆται δῆλον. μείζων γὰρ ἢ $\beta\epsilon$ τῆς $\alpha\beta$ ὀρθῆς οὔσης τῆς πρὸς τῷ α γωνίας. ἀλλὰ τοῦτο ἀναγκαίως γέγονεν. ἄνισοι γὰρ αἱ γωνίαί γεγόνασιν τοῦ $\beta\epsilon\zeta\delta$ παραλληλογράμμου, καὶ αἱ μὲν ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἀμβλεῖαι. τοῦτο δὲ συμβέβηκεν διὰ τὸ τὴν $\beta\epsilon$ πλευρὰν ὥσπερ συμπτύσσεσθαι πρὸς τὴν $\beta\delta$ καὶ

[FR397]



συστέλλειν τὸ χωρίον. εἰλήφθω γὰρ εἰ τύχοι ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\beta\eta}$, καὶ παράλληλος διὰ τοῦ $\overline{\eta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$ ἢ $\overline{\eta\theta}$. ἐστὶν ἄρα καὶ τὸ μήκος τοῦ $\overline{\beta\delta\eta\theta}$ ἴσον τῷ μήκει τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ τὸ πλάτος ταῦτόν, ἀλλὰ τὸ χωρίον ἔλασσον τοῦ χωρίου καὶ γὰρ τοῦ $\overline{\beta\epsilon\zeta\delta}$ ἔλασσόν ἐστιν. ἡ μὲν δὴ τῶν γωνιῶν ἀνισότης τὸ ἐμβαδὸν ἡλάττωσεν, ἡ δὲ τοῦ μήκους αὐξήσις, ὅσον ἀφεῖλεν ἐκείνη, τοσοῦτον προσθεῖσα τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων ἐφύλαξεν. ὅρος δὲ τῆς τοῦ μήκους αὐξήσεως ἐστὶν ὁ τῶν παραλλήλων τόπος. ὀρθογωνίων μὲν γὰρ συναμφοτέρων ὄντων τῶν παραλληλογράμμων δείκνυται τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτερομέκους μεῖζον, ἰσοπλεύρων δὲ ἀμφοτέρων ὄντων τὸ ὀρθογώνιον δείκνυται τοῦ μὴ ὀρθογωνίου μεῖζον. καὶ γὰρ ἡ τῶν γωνιῶν ὀρθότης καὶ ἡ τῶν πλευρῶν ἰσότης τὸ πᾶν δύναται πρὸς τὴν τῶν χωρίων αὐξήσιν. ὅθεν δὴ τὸ μὲν τετράγωνον ἀναφαίνεται τῶν ἰσοπεριμέτρων μεῖζον, τὸ δὲ ῥομβοειδὲς ἀνάπτων ἔλασσον.

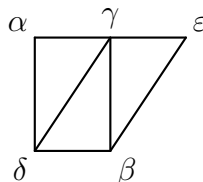
[FR398]

Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἐν ἄλλοις δεῖξομεν· πρεπωδέστερα γὰρ ἐστὶ ταῖς ὑποθέσεσι τοῦ δευτέρου βιβλίου. πρὸς δὲ τὸ προκείμενον θεωρήμα δεῖ γινώσκειν ὅτι τε παραλληλόγραμμα λέγων ἴσα τὰ χωρία λέγει καὶ οὐ τὰς πλευράς, — περὶ τούτων γὰρ ὁ λόγος, περὶ τῶν ἐμβαδῶν — καὶ ὅτι νῦν πρῶτον ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦδε τοῦ θεωρήματος μνήμην ἐποιήσατο τῶν τραπεζίων· ὥ καὶ δῆλον ὅτι εἰκότως ἐν ταῖς ὑποθέσεσι καὶ τοῦτο, ὅτι ποτέ ἐστιν, ἐδίδαξεν, ὅτι τετράπλευρον μὲν τῷ γένει, μὴ παραλληλόγραμμον δέ. τὸ γὰρ μὴ (?) τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχον ἐκβέβληκεν τῆς τῶν παραλληλογράμμων τάξεως.

[FR399]

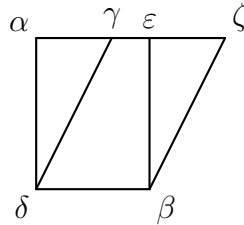
Ὁ μὲν οὖν στοιχειωτῆς ἀπέδειξεν τὸ προκείμενον τὴν χαλεπωτέραν πτῶσιν ἐκλεξάμενος. εἰ δὲ λέγοι τις, ἔστω τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ $\overline{\beta\gamma\delta\epsilon}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $\overline{\delta\beta}$, ὥστε τὴν $\overline{\delta\gamma}$ διάμετρον εἶναι τοῦ $\overline{\alpha\beta}$, δεῖξομεν ὅτι ἴσα ἐτὶν αὐτόθεν.

τὸ γὰρ $\overline{\beta\gamma\delta}$ τρίγωνον ἑκατέρου ἡμισύ ἐστιν, διότι τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ διάμετρος ἡ



$\overline{\gamma\delta}$, τοῦ δὲ $\overline{\delta\epsilon}$ ἢ $\overline{\beta\gamma}$. αἱ δὲ διάμετροι διχοτομοῦσι τὰ παραλληλόγραμμα. ἴσον

ἄρα τὸ $\overline{\alpha\beta}$ τῷ $\overline{\delta\epsilon}$. πάλιν εἴ τις τὴν $\overline{\delta\gamma}$ τέμνουσαν ὑποθόῃτο τὴν τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ παραλληλογράμμου πλευράν, καὶ οὕτως κείμενα τὰ παραλληλόγραμμα ὡς τὰ $\overline{\alpha\beta\delta\epsilon}$ καὶ $\overline{\beta\gamma\delta\zeta}$, δείξομεν ὅτι καὶ ταῦτα ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ $\overline{\alpha\epsilon}$ τῇ



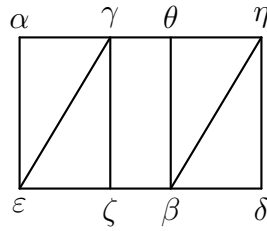
$\overline{\gamma\zeta}$ — ἑκατέρα ἴση τῇ $\overline{\delta\beta}$ ἀπεναντίον οὖσα — κοινὴ ἀφηρησθῶ ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$. ἴση ἄρα ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$. ἀλλὰ καὶ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\epsilon\beta}$ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\alpha\delta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\zeta\epsilon\beta}$ — παράλληλος γὰρ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ τῇ $\overline{\epsilon\beta}$. καὶ βάσεις ἄρα ἡ $\overline{\gamma\delta}$ τῇ $\overline{\zeta\beta}$ βάσει ἴση καὶ ὅλον τὸ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ τρίγωνον τῷ $\overline{\epsilon\beta\zeta}$ τριγώνῳ ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ $\overline{\gamma\beta}$ τραπέζιον. ὅλον ἄρα τὸ $\overline{\alpha\beta}$ ἴσον τῷ $\overline{\delta\zeta}$. καὶ ὁρᾷς ὅτι τρεῖς αὗται μόναι πῶς εἰσιν. ἡ γὰρ $\overline{\delta\gamma}$ ἢ τέμνει τὴν $\overline{\epsilon\beta}$, ὡς ὁ στοιχειωτὴς ἔλαβεν, ἢ ἐπὶ τῷ $\overline{\epsilon}$ πίπτει, ὡς ἐν τῇ πρὸ ταύτης καταγραφῇ, ἢ τέμνει τὴν $\overline{\alpha\epsilon}$, ὡς νῦν ὑπεθέμεθα. καὶ δέδεικται κατὰ πάσας τὰς πτώσεις τὸ θεώρημα ἀληθές. πλὴν ὅτι διττῆς οὕσης τῶν τραπεζίων διαφορᾶς καὶ τῶν μὲν οὐδετέρων τῶν ἀπεναντίον ἐχόντων παράλληλον, τῶν δὲ μιᾷ μίαν, ἐπὶ τῶν παρὰ τῷ γεωμέτρῃ τραπεζίων τὸ ἕτερον ἐστὶν εἶδος καὶ ἐπὶ τῆς καταγραφῆς ταύτης. ἡ γὰρ $\overline{\gamma\epsilon}$ τῇ $\overline{\delta\beta}$ παράλληλος.

[FR400]

Prop. XXXVI, theor. XXVI. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσον βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

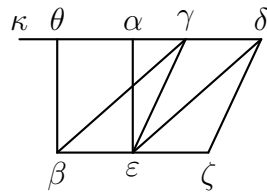
Τό μὲν πρὸ τούτου τὰς βάσεις τὰς αὐτὰς ἐλάμβανεν, τοῦτο δὲ ἴσας μὲν, διαφορούσας δὲ ἀλλήλων. κοινὸν δὲ ἀμφοτέροις τὸ ἐν ταῖς αὐταῖς ὑποτίθεσθαι παραλλήλοις τὰ παραλληλόγραμμα. δεῖ δὴ οὖν αὐτὰ μήτε ἐνδοτέρω πίπτειν τῶν ὑποκειμένων παραλλήλων εὐθειῶν, μήτε ἐξωτέρω. παραλληλόγραμμα γὰρ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι λέγεται παραλλήλοις, ὅταν αἱ τε βάσεις αὐτῶν καὶ αἱ ταύταις ἀπεναντίον κείμεναι ταῖς αὐταῖς ἐφαρμόζωνται παραλλήλοις. ἀλλ' ὁ μὲν στοιχειωτὴς ἔδειξεν τὸ θεώρημα τὰς βάσεις πάντη κεχωρισμένας λαβὼν, κωλύει δὲ οὐδὲν καὶ οὕτως αὐτὰς ὑποκειμένας λαβεῖν, ὡς ἔχειν τι μέρος κοινόν. ἔστω γὰρ τὰ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$ παραλληλόγραμμα ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $\overline{\epsilon\beta}$ $\overline{\zeta\delta}$. λέγω ὅτι ἴσα ἐστίν. ἐπιζεύχθωσαν αἱ $\overline{\epsilon\gamma}$ $\overline{\beta\eta}$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ $\overline{\epsilon\zeta}$ τῇ $\overline{\beta\delta}$ — καὶ γὰρ ἡ $\overline{\epsilon\beta}$ τῇ $\overline{\zeta\delta}$ — ἀλλ' ἡ $\overline{\gamma\zeta}$ τῇ $\overline{\delta\eta}$ ἴση [καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\zeta\gamma}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\eta}$ —

[FR401]



παράλληλος γὰρ ἡ $\overline{\gamma\zeta}$ τῇ $\overline{\delta\eta}$ —] καὶ ἡ $\overline{\gamma\epsilon}$ τῇ $\overline{\beta\eta}$ ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ $\overline{\gamma\beta}$. καὶ ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν ἐκατέρω τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα τὸ $\overline{\alpha\beta}$ τῷ $\overline{\gamma\delta}$. εἰ δὲ τις μήτε κοινὸν μέρος ἐχούσας ὑποθόῃτο τὰς τῶν παραλληλογράμμων βάσεις, μήτε κεχωρισμένας ἀλλήλων ἀλλ', ὅπερ ὑπολείπεται μόνον, συναπτούσας ἀλλήλαις καθ' ἓν σημεῖον, ὡς ἐπὶ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\epsilon\delta}$, ἐροῦμεν ὅτι ἴση ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$ καὶ τῇ $\overline{\gamma\delta}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{\gamma\beta}$ τῇ $\overline{\delta\epsilon}$. αἱ γὰρ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $\overline{\beta\delta}$ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ἐν ταῖς παραλλήλοις ταῖς $\overline{\alpha\delta}$ $\overline{\beta\epsilon}$. ἴσα ἄρα τὰ $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\delta\epsilon}$

[FR402]



παρὰλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἡμεῖς μὲν οὖν κατὰ τὴν πρώτην ἐπιβολὴν τὰς τοῦ θεωρήματος κατασκευὰς διείλομεν, εἰπόντες τὰς βάσεις ἢ κοινὸν ἔχειν μέρος, ἢ ἀπτεσθαι μόνον ἀλλήλων, ἢ διεστάναι ἀπ' ἀλλήλων. δυνατόν δὲ καὶ ἄπτωνται, ὡς αἱ $\overline{\beta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\zeta}$, ἐκτὸς ὅλον τὸ $\overline{\delta\epsilon}$ τῆς $\overline{\alpha\epsilon}$ ὑποτίθεσθαι, ἢ τὴν $\overline{\gamma\epsilon}$ πλευρὰν ἐφαρμόζουσιν τῇ $\overline{\alpha\epsilon}$, ἢ τὴν $\overline{\gamma\epsilon}$ τέμνουσαν τὴν $\overline{\alpha\theta}$, ἢ τὴν $\overline{\gamma\epsilon}$ πίπτουσιν ὡς διάμετρον τῇ $\overline{\theta\epsilon}$ — ὅτε καὶ ἡ $\overline{\delta\zeta}$ ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ $\overline{\alpha\zeta}$ — ἢ τῆς $\overline{\alpha\theta}$ ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ $\overline{\kappa}$ τὴν $\overline{\gamma\epsilon}$ πίπτουσιν ἐκτὸς τοῦ $\overline{\theta}$, καὶ τὴν $\overline{\delta\zeta}$ ἢ τέμνουσαν τὴν $\overline{\alpha\theta}$, ἢ ἐφαρμόζουσιν * * *

[FR403]

[Prop. XXXVII, theor. XXVII. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

* * * ἀποφαίνονται. καὶ γὰρ ἴσων ἐκείνων ἄνισα τὰ χωρία, καὶ ἀνίσων ἴσα δείκνυνται. τοιοῦτον δὲ τι πεπόνθασι οἱ χωρογράφοι τὰ μεγέθη τῶν πόλεων

ἐκ τῶν περιμέτρων συλλογιζόμενοι. ἤδη δέ τινες κοινωνοὶ κτημάτων ἐν τῇ διαιρέσει παρελογίσαντο τοὺς συνδιανεμομένους τῇ ὑπεροχῇ τῆς περιμέτρου παραχρησάμενοι, καὶ πλείονα λαβόντες τῶν ἀπελθόντων — εἰληφότες τὸ (?) ὑπὸ τῆς μείζονος περιμέτρου περιεχόμενον ἐμβαδὸν εἴτα (?) ἀμείψαντες χωρία περιοχῇ ἐλάσσονι (?) χρώμενα — βελτίστων ἀπηνέγκαντο δόξαν. δεῖν γοῦν προκειμένων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ὧν τὸ μὲν ἑκατέραν τῶν ἴσων ἔχει πέντε, τὴν δὲ βάσιν ἕξ τῶν αὐτῶν, τὸ δὲ ἑκατέραν μὲν τῶν ἴσων πέντε, τὴν δὲ βάσιν ὀκτὼ τῶν αὐτῶν, οἷον πήχεων, δακτύλων, κομιδῇ ἀπατᾷ τὸν ἄπειρον τούτων εἰς αἴρεσιν. τοῦτο μὲν γὰρ τὴν περίμετρον ἔχει δέκα καὶ ὀκτὼ, θάτερον δὲ ἕξ καὶ δέκα τῶν αὐτῶν μέτρων. ἀλλ' ὁ γεωμετρικὸς οὐκ ἀγνοήσει ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ χωρία, καὶ αἱ περίμετροι ἄνισοι ὦσιν. δώδεκα γὰρ ἑκατέρον ἐστίν. ἐὰν γὰρ ἀγάγῃς ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετον δίχα μὲν διαιρήσεις τὰς βάσεις καὶ ποιήσεις ἐν θατέρῳ μὲν τριῶν, ἐν δὲ λοιπῷ τεττάρων τὸ ἡμισυτῆς βάσεως, αὐτὴν δὲ τὴν κάθετον ἀνάπαλιν οὐ μὲν τεττάρων, οὐ δὲ τριῶν. δεῖ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς πεντάδος ἴσον [εἶναι] τῷ τε ἀπὸ τῆς καθέτου καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως. ἀλλ' εἰ μὲν αὕτη τριῶν, ἡ κάθετος τεττάρων, [εἰ δ'] αὕτη τεττάρων, ἐκείνη δηλαδὴ τριῶν. ποιήσας οὖν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἡμισυτῆς βάσεως ἕξεις τὸ ἴσον τῷ τριγώνῳ χωρίον. τοῦτο δὲ ταυτόν ἐστιν καθ' ἑκάτερον, εἴτε τὸν τρία ἐπὶ τὸν τέσσαρα, εἴτε τὸν τέσσαρα ἐπὶ τὸν τρία ποιήσεις.

[FR404]

Ταῦτα μὲν οὖν εἴρηται πρὸς ἐνδειξιν τοῦ τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων μὴ πάντως ἐκ τῶν περιμέτρων λαμβάνειν, ἵνα μὴ θαυμάζωμεν, εἰ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τριγώνων ἐπ' ἄπειρον αὖξεσθαι κατὰ τὰς λοιπὰς πλευρὰς δυναμένων ἐντὸς τῶν αὐτῶν παραλλήλων ὅμως ἢ τῶν χωρίων ἰσότης ἀνεξάλλαχτος διαμένει. δεῖ δὲ ἐκεῖνα τῶν τριγώνων ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις λέγειν, ὅσα τὰς βάσεις ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἔχοντα τῶν παραλλήλων ἐπείδει τὰς κορυφὰς ἐπὶ τῆς λοιπῆς, καὶ ὧν ἡ ἐπὶ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνυμένη μία τέ ἐστιν εὐθεῖα καὶ παράλληλος ταῖς βάσεσιν ἐπὶ μιᾷς εὐθείας κειμέναις.

[FR405]

[Prop. XXXVIII, theor. XXVIII. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστι μὲν καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα τοπικὸν ἀνάλογον τοῖς παραλληλογράμμοις καὶ τὴν τῶν τριγώνων θέσιν ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὑποτιθέμενον. δοκεῖ δὲ μοι τῶν τεττάρων τούτων θεωρημάτων, ὧν δύο μὲν ἐστὶν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων δεδειγμένα, δύο δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων, καὶ μὲν τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως, τὰ δὲ ἴσων ὑπαρχουσῶν τῶν βάσεων, μίαν ἀπόδειξιν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα παρέχεσθαι, λαμβάνειν τε τοὺς πολλοὺς τοῦτο ποιῶν. ὅταν γὰρ τούτῳ δεικνύῃ τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος

ἔχοντα πρὸς ἄλληλα τὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις, οὐδὲν ἄλλο ἢ ταῦτα πάντα καθολικώτερον ἀποδείκνυσιν ἐκ τῆς ἀναλογίας. τὸ γὰρ αὐτὸ ὕψος οὐδὲν διαφέρει ἢ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. πάντα γὰρ τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἐστὶν ὕψος καὶ ἀνάπαλιν. ὕψος γὰρ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τῆς ἐτέρας παραλλήλου κάθετος ἐπὶ τὴν λοιπὴν. ἐκεῖ μὲν οὖν δι' ἀναλογίας δέδεικται ὅτι οὕτως ἔχει τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τουτέστιν τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς κείμενα παραλλήλοις, ὥς αἱ βάσεις· καὶ ἴσων οὐσῶν τῶν βάσεων ἴσα τὰ χωρία, καὶ διπλάσια διπλασίων, καὶ ἄλλον λόγον ἔχουσῶν τὸν αὐτὸν ἔξει καὶ τὰ χωρία λόγον πρὸς ἄλληλα. ἐνταῦθα δέ — οὐ γὰρ ἦν ἀναλογία χρῆσθαι μηδέπω διδάξαντα περὶ αὐτῆς — ἀρκεῖται τῇ ἰσότητι μόνῃ, καὶ ταύτην ἐκ τῆς ἰσότητος ἢ ταυτότητος τῶν βάσεων συλλογίζεται. ἐν ἐνὶ δ' οὖν ἐκείνῳ τὰ τέτταρα ταῦτα θεωρήματα περιέχεται, οὐ μόνον ὅτι διὰ μιᾶς ἀποδείξεως δείκνυσιν, ὅσα ἐν τοῖς τέτρασιν περιέχεται τοῦτοις ἀλλ' ὅτι καὶ πλεόν τι προστίθῃσιν τὴν ταυτότητα τῶν λόγων, καὶ ἄνισοι αἱ βάσεις ὦσι.

[FR406]

Ταῦτα περὶ τούτων· ὅτι δὲ καὶ τοῦτο πολύπτωτόν ἐστι τὸ θεωρήμα καὶ δυνατὸν τὰς βάσεις τὰς τῶν τριγώνων ἢ ταῦτὸν μέρος ἐχούσας λαμβάνειν, ὥς ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ μηδενὶ μὲν κοινῷ μέρει χρωμένας, καθ' ἓν δὲ σημεῖον ἀλλήλαις συναπτούσας, ἢ καὶ πάντῃ κεχωρισμένας, ὥστε εἶναι μεταξὺ γραμμῆν, δῆλόν ἐστι τοῖς καὶ μικρὰ συνεῖναι δυναμένοις, καὶ ὅτι κατὰ πάσας τὰς πτώσεις, ὅπως ἂν ἔχη τὰς βάσεις κειμένας ἢ τὰς κορυφάς, ἡ αὐτὴ μέθοδος ἄγειν παραλλήλους ταῖς πλευραῖς καὶ ποιεῖν ἐκάτερον τῶν τριγώνων [παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τούτων τὴν τῶν τριγώνων] ἰσότητα κατασκευάζειν.

[FR407]

[Prop. XXXVIII, theor. XXVIII. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

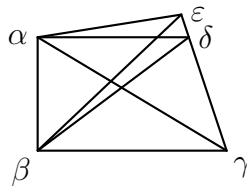
Ὅτε μὲν τὴν ἰσότητα δεικνύναι προὔκειτο, τότε τέτταρα θεωρήματα τὸν ἀριθμὸν ἐποιῶμεν, δύο μὲν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, δύο δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων λαμβάνοντες, ἢ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἢ ἐπὶ ἴσων κείμενα βάσεων. νυνὶ δὲ ἀντιστρέφοντες τὰ μὲν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ἀντιστρέφοντα παρήκαμεν, τὰ δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων μνήμης ἡξιώσαμεν. αἴτιον δὲ ὅτι τρόπος μὲν τῆς ἀποδείξεως ὁ αὐτὸς καὶ ἐπ' ἐκείνων ἀπαραλλάκτως διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀναγωγῆς καὶ τῆς ὁμοίας κατασκευῆς, ἀρκούμεθα δὲ ἐπὶ τῶν ἀπλουστέρων, λέγω δὴ τῶν τριγώνων, ὑποδείξαντες τὴν μέθοδον καταλιπεῖν τοῖς ἀγχινουστέροις καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων τὰ αὐτὰ συλλογίζεσθαι, ἐπεὶ, ὅτι γε ἡ αὐτὴ καὶ ἐπὶ τούτων μέθοδος, ῥᾶδιον συνιδεῖν, λαβόντες γὰρ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἢ καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων, ἐροῦμεν ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. εἰ γὰρ μή, ἢ ἐντὸς πεσεῖται θάτερον τῶν ἐν τῷ ἐτέρῳ παραλλήλων ἐκβαλλομένων, ἢ ἐκτός.

ὅπως δὲ ἂν πίπτῃ, λαβόντες ἐκεῖνο καὶ τὰς ἐν αὐτῷ παραλλήλους ἐδείξαμεν, ἃ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων, ὅτι τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ ἑαυτοῦ μέρει. τοῦτο δὲ ἀδύνατον.

Ὅτι δὲ εἰκότως ὁ στοιχειωτῆς προσέθηκεν τὸ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δῆλόν ἐστι (?). μιᾶς γὰρ βάσεως ἴσα τρίγωνα λαβεῖν δυνατόν, τὸ μὲν ἐπὶ τὰδε τὰ μέρη. τὸ δὲ ἐπὶ θάτερα. ἀλλ' οὐ πάντως ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι ταῦτα παραλλήλοις· οὐδὲ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί.

[FR408]

Τοῦτο μὲν οὖν διὰ τοῦτο προσέθηκεν. διχῶς δὲ δυνατόν ὄν ἄγειν τὴν παράλληλον κατὰ τὴν ἄτοπον ὑπόθεσιν αὐτὸς ἤγαγεν ἐντός ἡμεῖς δὲ ἐκτὸς ἀγαγόντες τὰ αὐτὰ δείξομεν. ἔστω γὰρ τὰ $\alpha\beta\gamma$ $\delta\beta\gamma$ τρίγωνα ἐπὶ μιᾶς βάσεως καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις καὶ ἡ ἐπὶ τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθεῖσα τῇ βάσει παράλληλος ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $\alpha\delta$. εἰ δὲ μὴ ἐστὶν αὐτῇ παράλληλος, ἔστω ἡ ταύτης ἐκτὸς ἡ $\alpha\epsilon$. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\gamma\delta\epsilon$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\epsilon\beta$. ἴσον ἄρα τὸ $\alpha\beta\gamma$ τῷ $\epsilon\beta\gamma$, ἀλλὰ τὸ $\alpha\beta\gamma$ τῷ $\delta\beta\gamma$.



τὸ ἄρα $\epsilon\beta\gamma$ τῷ $\delta\beta\gamma$ ἴσον, τῷ μέρει τὸ ὅλον· ἀλλὰ ἀδυνατόν. οὐκ ἄρα ἔξω πεσεῖται τῆς $\alpha\delta$ παράλληλος· δέδεικται δὲ ὅτι οὐδὲ ἐντός παρὰ τῷ στοιχειωτῇ· αὕτῃ ἄρα ἐστὶν ἡ $\alpha\delta$ τῇ $\beta\gamma$ παράλληλος· ἐν ταῖς αὐταῖς ἄρα παραλλήλοις ἐστὶ τὰ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις ἀποδέδεικται μὲν δὴ καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς· ἄξιον δὲ ἐπισημῆνασθαι ὅτι τριττῆς οὔσης τῆς τῶν θεωρημάτων ἀντιστροφῆς — ἡ γὰρ ὅλον ἀντιστρέφει πρὸς ὅλον, ὡς τὸ ὀκτωκαιδέκατον καὶ ἑννεακαιδέκατον εἶπομεν, ἡ ὅλον πρὸς μέρος, ὡς τὸ ἕκτον καὶ πέμπτον, ἡ μέρος πρὸς μέρος, ὡς τὸ ὀγδοὸν καὶ τέταρτον. οὐ γὰρ ὅλον τὸ δεδειγμένον ἐν θατέρῳ ζητούμενόν ἐστὶν ἐν θατέρῳ, οὐδὲ τὸ ζητούμενον δεδομένον, ἀλλὰ μέρος — ἔοικεν δὲ (?) τοιαῦτα εἶναι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν τριγώνων. ἦν γὰρ τὸ ζητούμενον ἐν τοῖς πρὸ τούτων ἴσα εἶναι τὰ τρίγωνα. τοῦτο δὲ οὐ μόνον ἐστὶ δεδομένον ἐν τούτοις, μέρος προσλαβὸν τῆς ἐν ἐκεῖνοις ὑποθέσεως. τὸ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἶναι βάσεως, ἢ ἐπὶ ἴσων, καὶ ἐπὶ τούτων δέδοται καὶ ἐπ' ἐκείνων, πλὴν ὅτι προσέθηκεν ἐν ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, οὐ μὴν ἐν ἐκείνοις, μήτε ζητούμενον, μήτε δεδομένον· τὸ γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔξωθεν προσείληπται.

[FR409]

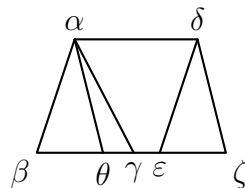
Prop. XL, theor. XXX. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων

βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐν ταῖς αὐταῖς παρα-
αλλήλοις ἐστι.

Καὶ ὁ τρόπος τῆς ἀντιστροφῆς ὁ αὐτὸς ἐπὶ τούτου καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀπαράλ-
λακτος καὶ τὸ παραλελειμμένον τῷ στοιχειωτῇ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀναγωγῆς
ὡσαύτως ἀποδείκνυται. καὶ οὐδὲν δεῖ τὰ αὐτὰ ἀνακυκλεῖν. τριῶν δὲ ὄντων
τούτων ἐν ταῖς εἰρημέναις προτάσεσι, τοῦ ἐπὶ ἴσων εἶναι βάσεων ἢ τῶν αὐτῶν,
τοῦ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, [τοῦ ἴσα εἶναι τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλό-
γραμμα], δῆλον ὅτι δύο συμπλέκοντες ἀεί, τὸ δὲ ἐν καταλείποντες ποικίλως
ἀντιστρέφουμεν. ἢ γὰρ τὰς βάσεις ὑποθησόμεθα τὰς αὐτὰς ἢ ἴσας καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παραλλήλοις τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ ποιήσομεν τέσ-
σαρα θεωρήματα, ἢ ἴσα ληψόμεθα αὐτὰ καὶ τὰς βάσεις τὰς αὐτὰς ἢ ἴσας, καὶ
ποιήσομεν ἄλλα τέτταρα — ὦν τὰ μὲν δύο παρῆκεν ὁ στοιχειωτής, τὰ ἐπὶ
τῶν παραλληλογράμμων, τὰ δὲ δύο ἔδειξεν τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων — ἢ καὶ ἴσα
λαβόντες καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις δεῖξομεν τὸ λοιπόν, ἢ ὅτι ἐπὶ τῶν αὐτῶν
ἐστὶν ἢ τῶν ἴσων βάσεων, καὶ ποιήσομεν ἄλλα τέτταρα, ἃ δὴ καὶ πάντῃ παρῆκεν
ὁ στοιχειωτής· καὶ γὰρ ἐπὶ τούτων ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις, πλην ὅσον τούτων τῶν
τεττάρων τὰ δύο οὐκ ἔστι καθ' ἑαυτὸ ἀληθῆ. οὐ γὰρ τὰ ἴσα παραλληλόγραμμα ἢ
τρίγωνα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις ἐξ ἀνάγκης ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως,
ἀλλὰ τὸ ὅλον τοῦτο ἐπὶ τούτων τῶν ὑποθέσεων ἀληθές, ὅτι ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἐστὶ
βάσεων ἢ ἐπὶ τῶν ἴσων, τὸ δὲ ἕτερον οὐκ ἐκ παντὸς ἔπεται ταῖς ληφθείσαις
ὑποθέσεσιν. ὥστε δέκα ὄντων τῶν πάντων θεωρημάτων ἐξ μὲν ὁ γεωμέτρης
ἀνέγραψεν, τέσσαρα δὲ παρῆκεν, ἵνα μὴ πάλιν [τὰ αὐτὰ λέγοι] τῆς αὐτῆς οὔσης
ἀποδείξεως. δεικνύσθητω γὰρ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὅτι, ἐὰν ἴσα ᾖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις, ἢ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἔσται βάσεων, ἢ ἐπὶ ἴσων. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν,
ἔστω τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ τρίγωνα οὕτως ἔχοντα ἐπὶ ἀνίσων βάσεων τῶν $\overline{\beta\gamma}$ $\overline{\epsilon\zeta}$,
καὶ ἔστω μείζων ἢ $\overline{\beta\gamma}$, καὶ ἀφηρήσθω ἢ $\overline{\beta\theta}$ ἴση τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ
 $\overline{\alpha\theta}$. ἐπεὶ οὖν τὰ $\overline{\alpha\beta\theta}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ ἐπὶ ἴσων ἐστὶ βάσεων τῶν $\overline{\beta\theta}$ $\overline{\epsilon\zeta}$ καὶ ἐν ταῖς

[FR410]

[FR411]



αὐταῖς παραλλήλοις, [ἴσα] ἄρα ἐστίν· ἀλλὰ καὶ τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ ἴσα ὑπόκειται·
τὰ ἄρα $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\alpha\beta\theta}$ ἴσα ἔσται, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισοι αἱ βάσεις τῶν
 $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ τριγώνων. ὁ δὲ αὐτὸς τρόπος τῆς ἀποδείξεως ἔσται καὶ ἐπὶ τῶν παρ-
αλληλογράμμων. ἐπεὶ οὖν καὶ ἡ μέθοδος τῆς δείξεως ἡ αὐτὴ καὶ τὸ ἀδύνατον τὸ
αὐτό, ὅτι τὸ ὅλον τῷ μέρει ἴσον, εἰκότως ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ παραλέλειπται.

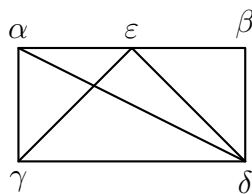
εἴρηται οὖν ὅτι δέκα θεωρήματα ἐξ ἀνάγκης, καὶ τίνα τὰ παραλελειμμένα, καὶ τίς ἡ αἰτία τῆς τούτων ἀποσιωπήσεως. ἀλλ' ἐπὶ τὰ ἐφεξῆς τούτοις μεταβαίνωμεν.

[FR412]

Prop. XLI, theor. XXXI. Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ἐστὶ μὲν δὴ καὶ το θεωρήμα τοῦτο τοπικόν, μίγνυσι δὲ τριγώνων καὶ παραλληλογράμμων συστάσεις ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κειμένων. ὥσπερ οὖν τὰ παραλληλόγραμμα χωρὶς ἐθεασάμεθα καὶ αὖ πάλιν τὰ τρίγωνα, οὕτω καὶ ἅμα ἀμφοτέρω λαβόντες ταῦτόν ἐκείνοις πεπονήτοτα τὸν λόγον, ὃν ἔχει πρὸς ἄλληλα, θεωρήσωμεν. ἐπ' ἐκείνων μὲν οὖν ὁ τῆς ἰσότητος ἀναφαίνεται λόγος — πάντα γὰρ ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων, εἴτε τρίγωνα, εἴτε παραλληλόγραμμα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις — ἐπὶ δὲ τούτων ὁ πρῶτιστος δείκνυται τῶν ἄνισων ὁ διπλάσιος. τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου διπλάσιον ἀποδείκνυσι τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως καὶ ὕψους τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ὁ μὲν στοιχειωτὴς τὴν τοῦ τριγώνου κορυφὴν ἐκτὸς ὑποθέμενος τοῦ παραλληλογράμμου τὸ προκείμενον ἔδειξεν, ἡμεῖς δὲ ἐπὶ τῆς ἐτέρας αὐτὴν λαβόντες τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶς, τῆς παραλλήλου τῇ κοινῇ αὐτῶν βάσει, τὸ αὐτὸ ἀποδείξομεν. δύο γὰρ αὗται τοῦ θεωρήματός εἰσι πτώσεις, ἐπειδὴ τῆς αὐτῆς βάσεως οὔσης ἀμφοῖν ἢ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου τὴν κορυφὴν ἔχειν ἀνάγκη τὸ τρίγωνον ἢ ἐκτος. ἔστω οὖν παραλληλόγραμμον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ τρίγωνον τὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$, καὶ κείσθω τὸ $\overline{\epsilon}$ μεταξὺ τοῦ $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\alpha\delta}$. ἐπεὶ οὖν τὸ

[FR413]



παραλληλόγραμμον τοῦ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ διπλάσιον, τὸ δὲ $\overline{\alpha\delta\gamma}$ ἴσον τῷ $\overline{\epsilon\delta\gamma}$ τριγώνῳ, τὸ ἄρα παραλληλόγραμμον τοῦ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$ τριγώνου διπλάσιον.

Ὅτι μὲν οὖν τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως δείκνυται τοῦ τριγώνου τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον δῆλον. κὰν ἴσαι δὲ ὦσιν αἱ βάσεις, ὡσαύτως δευθήσεται διάμετρον ἡμῶν ἀγαγόντων τῶν παραλληλογράμμων. τῶν γὰρ τριγώνων ἴσων ὄντων τὸ θατέρου διπλάσιον ἔσται καὶ τοῦ λοιποῦ διπλάσιον. τὰ δὲ τρίγωνα ἴσα διὰ τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων καὶ τὴν ταυτότητα τοῦ ὕψους. εἰκότως οὖν καὶ

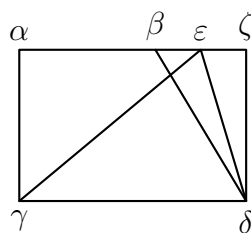
ταῦτα παρήκεν ὁ γεωμέτρης· ἡ αὐτὴ γὰρ [ῆ] ἀπόδειξις. ἡ γὰρ ταῦτόν μέρος ἔξουσιν, ἢ κατὰ σημεῖον μόνον συναφθήσονται, ἢ κεχωρισμέναι ἔσονται ἀπ' ἀλλήλων. ὅπως δ' ἂν ταῦτα διαποικίλληται, μία ἢ ἀπόδειξις κατὰ πάσας τὰς πτώσεις.

Καὶ μὴν καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα τῷ θεωρήματι ὡσαύτως ἀποδείξομεν, ὧν ἐν μὲν ἔστιν· ἐὰν τριγώνου παραλληλόγραμμον διπλάσιον ἢ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχη βάσιν ἀλλήλοις, ἢ ἴσας, εἰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἔσται παραλλήλοις — εἰ γὰρ μή, τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ μέρει, καὶ ὁ αὐτὸς ἔξει (?) λόγος. ἀνάγκη γὰρ ἢ ἐπὶ τῶν παραλλήλων πίπτειν τὴν τοῦ τριγώνου κορυφήν, ἢ ἐκτός. ὁμοτέρως δ' ἂν ἔχη, τὸ αὐτὸ ἀδύνατον ἀχθείσης παραλλήλου τῇ βάσει διὰ τῆς τοῦ τριγώνου κορυφῆς — ἕτερον δέ· ἐὰν τριγώνου παραλληλόγραμμον διπλάσιον ἢ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἀμφοτέρω ἐπὶ μιᾷς ἔσται βάσεως ἢ ἐπὶ ἴσων· εἰ γὰρ ἐπὶ ἀνίσων, ἴσας λαβόντες πᾶν τὸ ὅλον μέρει δείξομεν ἴσον. εἰς οὖν τοῦτο κοινὸν ἀδύνατον πάντα τελευτᾷ τὰ θεωρήματα. διόπερ ὁ στοιχειωτὴς ἡμῖν παρήκεν τὴν ἐν τούτοις ποικιλίαν ἀνερευνᾶν αὐτὸς ἐπὶ τῶν ἀπλουστέρων καὶ ἀρχοειδ-δεστέρων στήσας τὴν θεωρίαν.

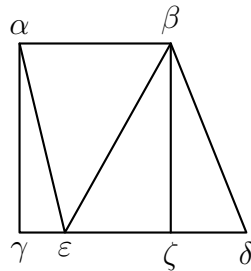
[FR414]

Ἄλλ' ἐπεὶ καὶ ταῦτα ὑπομένονται, φέρε γυμνασίας ἔνεκα μὴ λαβόντες παραλληλόγραμμον ἡμεῖς, ἀλλὰ **τραπέζιον**, οὗ δύο μόναι εἰσὶ παράλληλοι, τριγώνῳ τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς καίμενον παραλλήλοις, ἴδωμεν, ὃν ἔχει λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὅτι μὲν οὖν διπλάσιον οὐχ ἔξει δῆλον — ἢ γὰρ ἂν παραλληλόγραμμον εἴη τετράπλευρόν γε ὄν; — λέγω δὲ ὅτι ἢ μείζον διπλάσιον ἢ ἔλασσον. τῶν γὰρ δύο ὄντων παραλλήλων πάντως ἢ μὲν ἐστὶ μείζων, ἢ δὲ ἐλάσσων, ἐπεὶ ἴσων οὐσῶν καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς ἔσονται παράλληλοι. ἂν μὲν οὖν τὸ τρίγωνον τὴν μείζονα ἔχη βάσιν, ἔλασσον ἢ διπλάσιον ἔσται τοῦ τριγώνου τὸ τετράπλευρον, ἐὰν δὲ τὴν ἐλάσσονα, μείζον. ἔστω γὰρ τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τετράπλευρον καὶ ἐλάσσων ἢ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ $\overline{\alpha\beta}$ εἰς ἄπειρον, καὶ τρίγωνον τὸ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$ τὴν αὐτὴν ἐχέτω βάσιν τῷ τετραπλεύρῳ τὴν $\overline{\gamma\delta}$, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ δ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ παράλληλος ἢ $\overline{\delta\zeta}$. διπλάσιον ἄρα τοῦ $\overline{\epsilon\gamma\delta}$

[FR415]

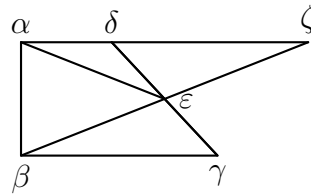


τριγώνου τὸ $\overline{\alpha\gamma\delta\zeta}$ παραλληλόγραμμον, ὥστε τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τετράπλευρον ἔλασσον ἢ διπλάσιον. πάλιν ἐχέτω τὸ τρίγωνον βάσιν τὴν $\overline{\alpha\beta}$, καὶ παράλληλος τῇ $\overline{\alpha\gamma}$ ἢ $\overline{\beta\zeta}$ · τὸ ἄρα $\overline{\alpha\beta\gamma\zeta}$ διπλάσιον τοῦ τριγώνου, ὥστε τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τετράπλευρον μείζον ἢ διπλάσιον. τούτων δὴ δεδειγμένων λέγομεν ὅτι τετραπλεύρου ὄντος, οὗ



δύο μόνον αἱ ἀπεναντίον παράλληλοι, ἐὰν μὲν ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν παραλλήλων δίχα τμηθείσης ἐπὶ τὴν λοιπὴν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, τοῦ γινομένου τριγώνου ἢ μείζον ἐστὶ τὸ τετράπλευρον ἢ διπλάσιον, ἢ ἔλασσον, εἰ δὲ ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν ἐπιζευγνουσῶν τὰς παραλλήλους δίχα τμηθείσης ἐπὶ τὴν ἐτέραν εὐθεῖαι τινες ἐπιζευχθεῖεν, τοῦ γινομένου τριγώνου τὸ τετράπλευρον πάντως διπλάσιόν ἐστιν. τοῦτο οὖν δεικνύσθω. ἔστω δὴ τετράπλευρον τὸ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ παράλληλος ἐν αὐτῷ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ [τῇ] $\overline{\gamma\beta}$, καὶ τεμνέσθω δίχα ἡ $\overline{\delta\gamma}$ κατὰ τὸ $\overline{\epsilon}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{\epsilon\alpha}$ $\overline{\epsilon\beta}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $\overline{\beta\epsilon}$ καὶ συμπιπτέτω τῇ $\overline{\alpha\delta}$ κατὰ τὸ $\overline{\zeta}$. ἐπεὶ

[FR416]

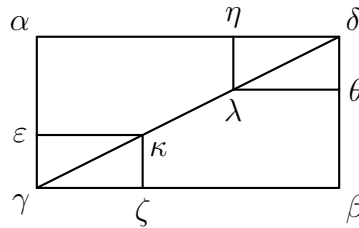


οὖν αἱ κατὰ τὸ $\overline{\epsilon}$ γωνίαι ἴσαι — κατὰ κορυφὴν γάρ — καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\zeta\delta\epsilon}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$, ἔσται καὶ ἡ $\overline{\zeta\epsilon}$ τῇ $\overline{\epsilon\beta}$ ἴση καὶ τὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ τρίγωνον τῷ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$ ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ $\overline{\alpha\delta\epsilon}$. ὅλον ἄρα τὸ $\overline{\alpha\zeta\epsilon}$ ἴσον τοῖς δύο τοῖς $\overline{\alpha\delta\epsilon}$ $\overline{\beta\gamma\epsilon}$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\alpha\epsilon\zeta}$ ἴσον τῷ $\overline{\alpha\epsilon\beta}$ — ἐπὶ γὰρ ἴσων βάσεων, τῶν $\overline{\beta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\zeta}$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. τὸ ἄρα $\overline{\alpha\epsilon\beta}$ ἴσον τοῖς $\overline{\alpha\delta\epsilon}$ * * *

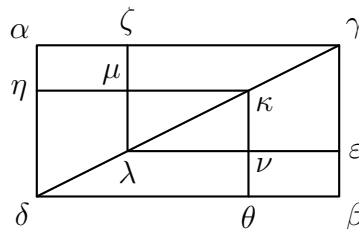
[Prop. XLII, probl. XI. Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν γωνίᾳ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Prop. XLIII, theor. XXXII. Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

* * * παραλληλόγραμμα μὴ συνάπτειν ἀλλήλοις καθ' ἓν σημεῖον. ὅτι [FR417]
 δὴ καὶ τὰ παραπληρώματα οὐκ ἔστι τετράπλευρα, δεῖ καὶ ταύτην ἐκθέμενον τὴν
 πτωσὶν ἰδεῖν τὸ αὐτὸ συμβαῖνον. ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμα τῷ $\overline{\alpha\beta}$ παρ-
 αλληλογράμμῳ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὰ $\overline{\gamma\kappa}$ $\overline{\delta\lambda}$, μεταξὺ δὲ αὐτῶν ἡ $\overline{\kappa\lambda}$
 εὐθεῖα τῆς διαμέτρου μέρος οὔσα. πάλιν οὖν τὰ αὐτὰ ἐρεῖς· τὸ $\overline{\alpha\gamma\delta}$ τρίγωνον



ἴσον τῷ $\overline{\beta\gamma\delta}$ καὶ τὸ $\overline{\epsilon\gamma\kappa}$ τῷ $\overline{\kappa\gamma\zeta}$ καὶ τὸ $\overline{\delta\eta\lambda}$ τῷ $\overline{\delta\theta\lambda}$. λοιπὸν ἄρα τὸ
 $\overline{\alpha\eta\lambda\kappa\epsilon}$ πεντάπλευρον ἴσον τῷ $\overline{\beta\zeta\kappa\lambda\theta}$ πενταπλεύρῳ. ταῦτα δὲ ἦν τὰ παρα-
 πληρώματα. εἰ δὲ μήτε συνάπτοιτο τὰ παραλληλόγραμμα κατὰ σημεῖον, μήτε
 διεστώτα εἶη, ἀλλὰ τέμνοντα ἄλληλα, ἡ αὐτὴ καὶ οὕτως ἀπόδειξις. ἔστω γὰρ
 παραλληλόγραμμον τὸ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ διάμετρος ἡ $\overline{\gamma\delta}$ καὶ παραλληλόγραμμα περὶ αὐτὴν
 ἐν μὲν τὸ $\overline{\epsilon\gamma\zeta\lambda}$, ἕτερον δὲ καὶ τέμνον τοῦτο τὸ $\overline{\delta\eta\kappa\theta}$. λέγω ὅτι τὰ $\overline{\zeta\eta}$ $\overline{\epsilon\theta}$ [FR418]
 παραπληρώματα ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ὅλον τὸ $\overline{\delta\eta\kappa}$ ἴσον τῷ $\overline{\delta\theta\kappa}$, ἐστὶν δὲ καὶ

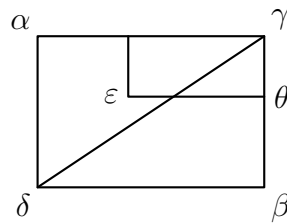


μέρος αὐτοῦ τὸ $\overline{\kappa\lambda\mu}$ ἴσον τῷ $\overline{\kappa\lambda\nu}$ — παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ $\overline{\lambda\kappa}$ —
 λοιπὸν ἄρα τὸ $\overline{\delta\lambda\nu\theta}$ τραπέζιον ἴσον τῷ $[\overline{\delta\lambda\mu\theta}]$ τραπεζίῳ. ἀλλὰ καὶ τὸ $\overline{\alpha\delta\gamma}$
 τρίγωνον ἴσον τῷ $\overline{\beta\delta\gamma}$, καὶ τὸ $\overline{\zeta\gamma\lambda}$ τῷ $\overline{\epsilon\gamma\lambda}$ ἐν τῷ $\overline{\epsilon\zeta}$ παραλληλογράμμῳ, καὶ
 τραπέζιον τὸ $\overline{\delta\eta\mu\lambda}$ τῷ $\overline{\delta\theta\nu\lambda}$, λοιπὸν ἄρα τὸ $\overline{\eta\zeta}$ τετράπλευρον ἴσον τῷ $\overline{\epsilon\theta}$
 τετραπλεύρῳ. δέδεικται ἄρα τὸ θεώρημα κατὰ πάσας τὰς πτώσεις. εἰσὶ δὲ τρεῖς
 μόνοι καὶ οὔτε πλείους οὔτε ἐλάσσους. τὰ γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ περὶ τὴν
 αὐτὴν διάμετρον ἢ τεμεῖ ἄλληλα, ἢ κατὰ σημεῖον ἄψεται ἀλλήλων ἢ διεστώτα
 ἔσται μέρος τι τῆς διαμέτρου.

Τὸ δὲ ὄνομα τῶν παραπληρωμάτων ἀπ' αὐτοῦ τοῦ πράγματος ἔλαβεν ὁ
 στοιχειωτὴς ὡς καὶ τούτων παρὰ τὰ δύο παραλληλόγραμμα συμπληρούντων τὸ
 ὅλον. διόπερ αὐτὸ καθ' αὐτὸ μνήμης ἐν τοῖς ὅροις οὐκ ἐξίωται. ποικιλίας γὰρ

ἔδει πρὸς τὴν σαφήνειαν, ἵνα γινώμεν, τί παραλληλόγραμμον, καὶ τίνα τὰ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τῷ ὅλῳ. τούτων γὰρ σαφηνισθέντων καὶ τὸ παραπλήρωμα μόνως ἂν ἐγένετο γινώριμον. ἐστὶν δὲ ἐκεῖνα τῶν παραλληλογράμμων περὶ διάμετρον τὴν αὐτὴν, ὅσα μέρος τῆς ὅλης διαμέτρου καὶ αὐτῶν ἔχει διάμετρον, ὅσα δὲ μή, οὐ. ὅταν γὰρ ἡ τοῦ ὅλου διάμετρος τῶν πλευρῶν τινα τέμνη τοῦ ἐντὸς παραλληλογράμμου, τότε οὐκ ἔστιν τῷ ὅλῳ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον περὶ διάμετρον τὴν αὐτὴν, οἷον ὡς ἐν τῷ $\overline{\alpha\beta}$ παραλληλογράμμῳ ἡ $\overline{\gamma\delta}$ τέμνει τοῦ

[FR419]



$\overline{\gamma\epsilon}$ παραλληλογράμμου τὴν $\overline{\epsilon\theta}$ πλευράν. τὸ οὖν $\overline{\epsilon\gamma}$ τῷ $\overline{\gamma\delta}$ περὶ τὴν αὐτὴν οὐκ ἔστιν διάμετρον.

Prop. XLIII, probl. XII. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἡ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἦστί μὲν ἀρχαῖα, φασὶν ὁ περὶ τὸν **Εὐδήμον**, καὶ τῆς τῶν **Πυθαγορείων** μούσης εὐρήματα ταῦτα, ἧ τε **παραβολῇ** τῶν χωρίων καὶ ἡ **ὑπερβολῇ** καὶ ἡ **ἐλλειψίς**. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετέγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολὴν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν κατέσαντες, τὴν δὲ ἐλλειψίν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θειῶν ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὠρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὀρώντων. ὅταν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρατείνης, τότε παραβάλλειν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασὶν, ὅταν μεῖζον δὲ ποιήσης τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναι τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν. καὶ οὕτως ἐν τῷ ἔκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ **Εὐκλείδης** μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐνταῦθα δὲ τῆς παραβολῆς ἐδεήθη τῷ δοθέντι τριγώνῳ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν [παραλληλόγραμμον?], ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὠρισμένην παραβολὴν· οἷον τριγώνου δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν ἔχοντος δώδεκα ποδῶν, εὐθείας δὲ ἐκκειμένης, ἧς τὸ μῆκος ἐστὶ τεττάρων ποδῶν, τὸ ἴσον τῷ τριγώνῳ παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβάλλομεν, εἰ λαβόντες τὸ μῆκος ὅλων τῶν τεττάρων ποδῶν εὗρομεν, πόσων εἶναι δεῖ ποδῶν τὸ πλάτος, ἵνα τῷ τριγώνῳ τὸ παραλληλόγραμμον ἴσον γένηται.

[FR420]

εὐρόντες γοῦν εἰ τύχοι πλάτος τριῶν ποδῶν καὶ ποιήσαντες τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, τοῦτο δὲ ὀρθῆς οὔσης τῆς ἐκκειμένης γωνίας, ἔξομεν τὸ χωρίον.

Τοιοῦτον μὲν δὴ τι τὸ παραβάλλειν ἐστὶν ἄνωθεν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων παραδεδομένον. τρία δὲ ἐστὶν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ τὰ δεδομένα· εὐθεῖα, παρ' ἣν δεῖ παραβάλλειν, ὡς ὅλην αὐτοῦ τοῦ χωρίου γενέσθαι πλευράν, καὶ τρίγωνον, ὃ ἴσον εἶναι δεῖ τὸ παραβαλλόμενον, καὶ γωνία, ἥ ἴσην εἶναι [δεῖ] τὴν τοῦ χωρίου γωνίαν. καὶ δῆλον πάλιν ὡς ὀρθῆς μὲν οὔσης τῆς γωνίας τὸ παραβαλλόμενον ἢ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες ἔσται, ὀξείας δὲ ἢ ἀμβλείας ἢ ῥόμβος τὸ χωρίον ἢ ῥομβοειδές. ὅτι γε μὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν εἶναι δεῖ πεπερασμένην φανερόν. οὐ γὰρ δύναται παρὰ τὴν ἄπειρον. ἅμα οὖν τῷ φάναι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν ἐδήλωσεν ὅτι καὶ πεπεράνθαι ἀνάγκη τὴν εὐθεῖαν.

[FR421]

Χρήται δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προβλήματος τούτου τῇ συστάσει τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἴσου τῷ δοθέντι τριγώνῳ. οὐ γὰρ ταῦτόν παραβολὴ καὶ σύστασις, καθὼς εἵπομεν, ἀλλ' ἡ μὲν ὅλον ὑφίστησι τὸ χωρίον καὶ αὐτὸ καὶ τὰς πλευρὰς ἀπάσας, ἡ δὲ μίαν ἔχουσα πλευράν δεδομένην παρὰ ταύτην ὑπίστησι τὸ χωρίον, οὔτε ἐλλείπουσα κατὰ τὴν ἔκτασιν ταύτην, οὔτε ὑπερβάλλουσα, ἀλλὰ μιᾷ πλευρᾷ ταύτῃ χρωμένη περιεχούσῃ τὸ ἐμβαδόν. διὰ τί οὖν, φαίης ἂν, ὅτε μὲν τρίγωνον τριγώνοις ἴσα ἐδείκνυ, θεωρήμωσιν ἐχρήτο, ὅτε δὲ τρίγωνον παραλληλογράμμοις, προβλήμασιν; ὅτι, φήσομεν, ἡ ἰσότης ὁμοειδῶν ὄντων αὐτοφυῆς ἐστὶ καὶ ἐπιβλέψεως δεομένη μόνης, τῶν δὲ διὰ τὴν κατ' εἶδος ἐξαλλαγήν ἡ ἰσότης γενέσεως δεῖται καὶ μηχανῆς ὡς κατ' ἑαυτὴν οὔσα δυσεύρετος.

[FR422]

Prop. XLV, probl. XIII. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Δύο προβλήματων, ἐν οἷς τὴν τε σήσασιν εὗρισκε καὶ τὴν παραβολὴν τῶν ἴσων τῷ δοθέντι τριγώνῳ παραλληλογράμμων, τοῦτο καθολικότερόν ἐστιν. εἴτε γὰρ τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ ὅλως τετράπλευρον, εἴτε ἄλλο τι πολύπλευρον εἴη δεδομένον, διὰ τούτου τοῦ προβλήματος ἴσον αὐτῷ παραλληλόγραμμον συστήσομεν. πᾶν γὰρ εὐθύγραμμον, ὡς καὶ πρότερον εἵπομεν, κατ' αὐτὸ εἰς τρίγωνα διαλύεται, καὶ τὴν μέθοδον τῆς εὐρέσεως τοῦ πλήθους τῶν τριγώνων παραδεδώκαμεν. ἀναλύσαντες οὖν τὸ δοθέν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα καὶ ἐνὶ μὲν αὐτῶν ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσαντες, τοῖς δὲ λοιποῖς παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσα παραλληλόγραμμα λαμβάνοντες ἐκείνην, παρ' ἣν ἐποιήσαμεν τὴν πρώτην παραβολήν, ἔξομεν τὸ ἐκ τούτων παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ἐξ ἐκείνων τῶν τριγώνων εὐθυγράμμῳ, καὶ ἔσται γεγονὸς τὸ ἐπιταχθέν. καὶ δεκάκλευρον οὖν ἢ τὸ εὐθύγραμμον, εἰς ὁκτώ μὲν τρίγωνα διαλύσομεν, ἐνὶ δὲ ἴσον συστήσομεν παραλληλόγραμμον καὶ ἐντάχῃς παραβάλλοντες ἴσα τοῖς λοιποῖς ἔξομεν τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τούτου δὲ οἶμαι τοῦ προβλήματος ἐπαχθέντες οἱ παλαιοὶ καὶ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν ἐζήτησαν. εἰ γὰρ παραλληλόγραμμον ἴσον εὐρίσκεται παντὶ εὐθυγράμμῳ, ζητήσεως ἄξιον, μὴ καὶ τὰ εὐθύγραμμα τοῖς περιφερογράμμοις ἴσα δεικνύναι δυνατόν. καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ κέντρου ἴση ἐστὶν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἀλλὰ ταῦτα ἐν ἄλλοις· ἐπὶ δὲ τὰ ἐξῆς ἴωμεν.

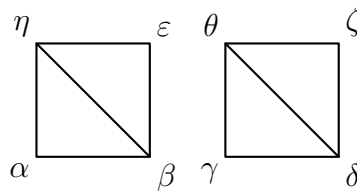
[FR423]

Prop. XLVI, probl. XIII. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Δεῖται μὲν τοῦ προβλήματος τούτου διαφερόντως εἰς τὴν τοῦ ἐφεξῆς θεωρήματος κατασκευὴν, ὅμοιον δὲ τῶν δύο γενέσεις ἐθελῆσαι παραδοῦναι τῶν ἐν εὐθυγράμμῳ ἀρίστων, ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τετραγώνου· διότι δὴ καὶ πρὸς τὴν σύστασιν τῶν κοσμικῶν σχημάτων καὶ μάλιστα τῶν τεττάρων, ὧν καὶ γενέσεις ἐστὶ καὶ ἀνάλυσις, τούτων χρεῖα τῶν εὐθυγράμμων. τὸ μὲν ἀνάλυσις, τούτων χρεῖα τῶν εὐθυγράμμων. τὸ μὲν γὰρ εἰκοσάεδρον καὶ ὀκτάεδρον καὶ ἡ πυραμὶς ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων σύγκειται τριγώνων, ὁ δὲ κύβος ἐκ τῶν τετραγώνων. διό μοι δοκεῖ προηγουμένως τὸ μὲν συστήσασθαι, τὸ δὲ ἀναγράψαι. πρέποντα γὰρ δὴ ταῦτα τὰ ὀνόματα ἀνεῦρεν τοῖσδε τοῖς σχήμασι. τὸ μὲν γὰρ ὡς ἐκ πολλῶν συγκροτούμενον συστάσεως δεῖται, τὸ δὲ ὡς ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς ἀπογεννώμενον ἀναγραφῆς. οὐ γάρ, ὥσπερ τὸ τετράγωνον ἔχομεν πολλαπλασιάσαντες τὸν τῆς δοθείσης εὐθείας ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτόν, οὕτως καὶ τὸ τρίγωνον, [ἀλλ'] ἀλλαχόθεν ἐπιζεύξαντες ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας συγκροτοῦμεν ἐκ τούτων ἐν ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ ἡ τῶν κύκλων καταγραφὴ συντελεῖ πρὸς τὸ ἀνευρεῖν ἐκεῖνο τὸ σημεῖον, ἀφ' οὗ δεῖ τὰς εὐθείας εἰς τὰ πέρατα τῆς ἐκκειμένης εὐθείας ἐπιζεύξαι.

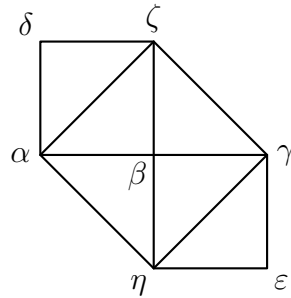
[FR424]

Ταῦτα μὲν οὖν δῆλα· δεικτέον δὲ ὅτι τῶν εὐθειῶν ἴσων, ἀφ' ὧν ἀναγράφεται τὰ τετράγωνα, καὶ αὐτὰ ἴσα ἐστίν. ἔστωσαν γὰρ ἴσαι αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{γδ}$, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς $\overline{αβ}$ ἀναγεγράφθω τὸ $\overline{αβεη}$, ἀπὸ δὲ τῆς $\overline{γδ}$ τὸ $\overline{γδθζ}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\overline{ηβ}$ $\overline{θδ}$. ἐπεὶ οὖν αἱ $\overline{αβ}$ $\overline{γδ}$ ἴσαι καὶ αἱ $\overline{αη}$ $\overline{γθ}$ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι,



καὶ ἡ $\overline{ηβ}$ τῇ $\overline{θδ}$ ἴση καὶ τὸ $\overline{αβη}$ τρίγωνον τῷ $\overline{γδθ}$ τριγώνῳ, καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν. τὸ ἄρα $\overline{αε}$ τῷ $\overline{γζ}$ ἴσον. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ἀντιστρέφον ἀληθές. εἰ γὰρ τὰ τετράγωνα ἴσα, καὶ αἱ εὐθεῖαι, ἀφ' ὧν ἀναγράφονται, ἴσαι ἔσονται. ἔστω γὰρ τετράγωνα ἴσα τὰ $\overline{αζ}$ $\overline{γη}$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $\overline{αβ}$

τῇ $\overline{\beta\gamma}$. ὀρθῶν ἄρα οὐσῶν τῶν γωνιῶν ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ $\overline{\zeta\beta}$ τῇ $\overline{\beta\eta}$ ἐστίν. [FR425]
ἐπεξεύχθησαν αἱ $\overline{\zeta\gamma}$ $\overline{\alpha\eta}$. ἐπεὶ οὖν ἴσον τὸ $\overline{\alpha\zeta}$ τετράγωνον τῷ $\overline{\gamma\eta}$ καὶ τὸ



$\overline{\alpha\zeta\beta}$ τρίγωνον ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ $\overline{\gamma\beta\eta}$. κοινὸν προσκείσθω τὸ $\overline{\beta\gamma\zeta}$. ὅλον ἄρα τὸ $\overline{\alpha\gamma\zeta}$ ἴσον τῷ $\overline{\gamma\zeta\eta}$, παράλληλος ἄρα ἡ $\overline{\alpha\eta}$ τῇ $\overline{\zeta\gamma}$. πάλιν ἐπεὶ ἡμισείας ὀρθῆς ἢ τε ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\eta}$ καὶ ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\eta\beta}$, παράλληλος ἡ $\overline{\alpha\zeta}$ τῇ $\overline{\gamma\eta}$. ἴση ἄρα ἡ $\overline{\alpha\zeta}$ τῇ $\overline{\gamma\eta}$, παραλληλογράμμου γὰρ εἰσιν ἀπεναντίον. ἐπὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστίν τὰ $\overline{\alpha\beta\zeta}$ $\overline{\beta\gamma\eta}$ τὰς ἐναλλάξ ἔχοντα γωνίας ἴσας, παραλλήλων οὐσων τῶν $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\gamma\eta}$, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν $\overline{\alpha\zeta}$ τῇ $\overline{\gamma\eta}$, ἴση ἔσται καὶ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῇ $\overline{\beta\gamma}$ καὶ ἡ $\overline{\beta\zeta}$ τῇ $\overline{\beta\eta}$. δέδεικται ἄρα ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ἐφ' ὧν ἀναγέγραπται τὰ $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\gamma\eta}$ τετράγωνα, ἴσαι εἰσὶν ἐκείνων ἴσων ὄντων.

[FR426]

Prop. XLVII, probl. XXXIII. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις $\overline{\Delta}$ τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις.

Τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντας τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς **Πυθαγόραν** ἀναπεμπόντων ἐστὶν εὐρεῖν καὶ βουθύτην λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὐρέσει. ἐγὼ δὲ θαυπάζω μὲν καὶ τοὺς πρώτους ἐπιστάνας τῇ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀληθείᾳ, μειζόνως δὲ ἄγαμαι τὸν στοιχειωτὴν, οὐ μόνον ὅτι δι' ἀποδείξεως ἐναργεστάτης τοῦτο καταδήσατο, ἀλλ' ὅτι καὶ τὸ καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀναλέγκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπίεσεν ἐν τῷ ἔκτῳ βιβλίῳ. δείκνυσι γὰρ ἐν ἐκείνῳ καθολικῶς ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν [εἶδος ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν] εἶδεν τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις. πᾶν μὲν γὰρ τετράγωνον ὁμοίον ἐστὶ τετραγώνῳ παντί, οὐ πάντα δὲ τὰ ὅμοια ἀλλήλοις εὐθύγραμμα τετράγωνα ἐστίν, καὶ γὰρ ἐν τριγώνοις καὶ ἐν ἄλλοις ἐστὶ πολυγώνοις ὁμοιότης.

ὁ τοίνυν ἀποδεικνύς λόγος τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεिनούσης τὴν ὀρθὴν εἶδος, ἢ τετραγωνικὸν εἶτε ἄλλο ὅποιονοῦν, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῖς ὁμοίους τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένοις εἵδεσιν καθολικώτερον δείκνυσι καὶ ἐπιστημονικώτερον τοῦ τὸ τετράγωνον μόνον ἴσον τοῖς τετραγώνοις ἀποφαίνοντος. ἐνταῦθα τὰρ καὶ ἡ αἰτία φανερά γίνεται τοῦ καθολικοῦ δειχθέντος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τὴν ἰσότητα παρέχεται τῷ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης αὐτὴν εἶδει πρὸς πάντα τὰ ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ὥσπερ ἡ μὲν ἀμβλύτης ὑπεροχῆς, ἡ δὲ ὀξύτης τῆς ἐλαττώσεως.

[FR427]

Ὅπως μὲν οὖν δείκνυται τὸ ἐν τῷ ἔκτῳ θεωρήματι, ἐν ἐκείνοις ἔσται δῆλον, ὅπως δὲ τὸ προκείμενον ἀληθές, νυνὶ σκοπῶμεν, τοσοῦτον προσθέντες, οὐκ ἐνταῦθα τὸ καθολικὸν δεικνύναι μηδὲν διδάξαντα περὶ ὁμοιότητος εὐθυγράμμων σχημάτων, μηδὲ ὅλως περὶ ἀναλογίας ἐνδειζόμενον. πολλὰ γοῦν τῶν ἐνταῦθα μερικώτερον (?) νῶν δέδεικται καθολικώτερον διὰ τῆς τοιαύτης μεθόδου. δείκνυσι δὲ οὖν ὁ στοιχειωτής ἐν τούτοις ἀπὸ τῆς περὶ τῶν παραλληλογράμμων κοινῆς θεωρίας τὸ ζητούμενον. διττῶν δὲ ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν μὲν ἰσοσκελῶν, τῶν δὲ σχαλῆνων, ἐν μὲν τοῖς ἰσοσκελέσιν οὐκ ἂν ποτε εὗροιμεν ἀριθμοὺς ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς. οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος, εἰ μὴ λέγοι τις τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ ἀπὸ τοῦ ε διπλάσιός ἐστιν α δέοντος. ἐν δὲ τοῖς σχαληνοῖς δυνατὸν λαβεῖν ἐναργῶς ἡμῖν δείκνυται τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν. τοιοῦτον γάρ ἐστι τὸ ἐν πολιτεῖα τρίγωνον, οὗ τὴν ὀρθὴν περιέχουσιν ὅτε τρία ταὶ ὁ τέσσαρα. ὑποτείνει δὲ αὐτὴν ὁ ε. τὸ γοῦν ἀπὸ τοῦ ε τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπ' ἐκείνων. τοῦτο μὲν γάρ ἐστιν εἴκοσι πέντε, τὰ ἀπ' ἐκείνων δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ γ, θ, το δὲ ἀπὸ τοῦ δ ἐκκαίδεκα.

[FR428]

Σαφές οὖν τὸ λεγόμενον ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν· παραδέδονται δὲ καὶ μέθοδοί τινες τῆς εὐρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν. [καὶ ἡ μὲν Πυθαγορικὴ] ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστὶν ἀριθμῶν. τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον καὶ τούτου μονάδα ἀφελούσα τοῦ λοιποῦ τὸ ἥμισυ τίθησι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν μέζονα· προσθεῖσα δὲ καὶ τούτῳ μονάδα τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσιν· οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελούσα τοῦ ἐννέα μονάδα τοῦ ἡ λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν δ, καὶ τούτῳ προστίθησι πάνιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν ε, καὶ εὔρηται τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν δὲ τεσσάρων, τὴν δὲ πέντε. ἡ δὲ Πλατωνικὴ ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ. λαβοῦσα γὰρ τὸν δοθέντα ἄρτιον τίθησιν αὐτὸν ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦτον διελούσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα τὸ ἥμισυ, μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσθεῖσα ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσιν, μονάδα δὲ ἀφελούσα τοῦ τετραγώνου ποιεῖ τὴν ἐτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν· οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα καὶ τούτου τὸ ἥμισυ τὸν β τετραγωνίσασα καὶ ποιήσῃ αὐτὸν δ. ἀφελούσα

[FR429]

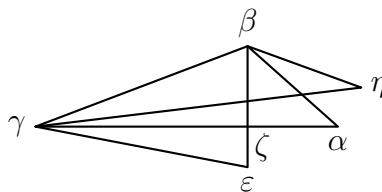
μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν $\bar{\gamma}$, προσθεῖσα δὲ ποιεῖ τὸν $\bar{\epsilon}$, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γενόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἐτέρας ἀπετελεῖτο μεθόδου. τὸ γὰρ ἀπὸ τούτου ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ $\bar{\gamma}$ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ $\bar{\delta}$ συντεθεῖσιν.

Ταῦτα μὲν οὖν ἔξωθεν προσισπορήσθω· τῆς δὲ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀποδείξεως οὔσης φανερᾶς οὐδὲν ἡγοῦμαι δεῖν προσθεῖναι περιττόν, ἀλλὰ ἀρκεῖσθαι τοῖς γεγραμμένοις, ἐπεὶ καὶ ὅσοι προσέθεσάν τι πλεόν, ὡς οἱ περὶ **Ἡρώνα** καὶ **Πάππον** ἠναγκάσθησαν προσλαβεῖν τι τῶν ἐν τῷ ἔκτῳ δεδειγμένων, οὐδενὸς ἔνεκα πραγματευώδους. ἐπὶ τὰ ἐξῆς οὖν μετῴμεν ἡμεῖς.

Prop. XLVIII, theor. XXXIII. Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν.

Ἀντιστρέφει μὲν τοῦτο τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι καὶ ὅλον πρὸς ὅλον ἀντιστρέφει. εἰ γὰρ ὀρθογώνιον, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν, καὶ εἰ τὸ ἀπὸ ταύτης ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ὀρθογώνόν ἐστι τὸ τρίγωνον ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ τῶν λοιπῶν περιεχομένην. καὶ ἡ μὲν ἀπόδειξις τοῦ στοιχειωτοῦ φανερά· ὄντος δὲ τριγώνου τοῦ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ καὶ ἔχοντος τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$, ἀγομένης ἐπ' αὐτοῦ [τῆς?] τῇ $\overline{\beta\gamma}$ πρὸς ὀρθᾶς ἀπὸ τοῦ $\overline{\beta}$ συμείου, ἐὰν λέγῃ τις ὅτι ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τὴν πρὸς ὀρθᾶς ἄγειν δεῖ καὶ μὴ ἐφ' ἃ ὁ στοιχειωτῆς ἠγάγεν, ἐροῦμεν ὅτι ἀδύνατος ὁ λόγος οὔτε γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτειν αὐτὸν δυνατόν, οὔτε ἐκτός, ἀλλ' αὐτὴ ἐστίν ἡ $\overline{\alpha\beta}$. εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ $\overline{\beta\epsilon}$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστίν ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$, ὁξεῖα ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ $\overline{\gamma\zeta\beta}$, ὥστε ἡ λοιπὴ ἀμβλεῖα, ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\zeta\beta}$. μείζον ἄρα ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\zeta}$. κείσθω οὖν τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἴση ἡ $\overline{\beta\epsilon}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\overline{\epsilon\beta\gamma}$,

[FR430]



τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\epsilon\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\epsilon\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$. ἀλλὰ ἡ $\overline{\epsilon\beta}$ τῇ $\overline{\beta\alpha}$ ἐστὶν ἴση, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\overline{\epsilon\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$. τοῖς δὲ αὐτοῖς ἴσον ἦν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\epsilon\gamma}$ τῷ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$, καὶ ἡ $\overline{\epsilon\gamma}$ ἄρα ἴση τῇ $\overline{\alpha\gamma}$. ἦν

δὲ καὶ ἡ $\overline{\epsilon\beta}$ ἴση τῇ $\overline{\alpha\beta}$. αἱ ἄρα $\overline{\beta\epsilon}$ $\overline{\epsilon\gamma}$ δύο ταῖς $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσαι συνέστησαν ἐπὶ τῆς $\overline{\beta\gamma}$ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐντὸς πεσεῖται ἡ πρὸς ὀρθάς. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ἐκτὸς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς $\overline{\alpha\beta}$. εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ $\overline{\beta\eta}$, καὶ ἴση ἔστω τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἢ $\overline{\beta\eta}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\overline{\gamma\eta}$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\overline{\eta\beta\gamma}$ τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\eta\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\beta\eta}$ $\overline{\beta\gamma}$. [ἀλλὰ ἡ $\overline{\eta\beta}$ τῇ $\overline{\beta\alpha}$ ἐστὶν ἴση, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\overline{\eta\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$.] ἦν δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\gamma}$ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$. ἴση ἄρα ἡ $\overline{\eta\gamma}$ τῇ $\overline{\alpha\gamma}$, ἀλλὰ καὶ ἡ $\overline{\eta\beta}$ τῇ $\overline{\beta\alpha}$ ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ τῆς $\overline{\beta\gamma}$, ὅπερ ἀδύνατον. οὔτε ἄρα ἐντός, οὔτε ἐκτὸς πεσεῖται ἡ ἀγομένη πρὸς ὀρθάς ἀπὸ τοῦ $\overline{\beta}$ σημείου τῇ $\overline{\beta\gamma}$. ἐπ' αὐτῆς ἄρα πεσεῖται τῆς $\overline{\alpha\beta}$, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta\gamma}$. λήλυται ἄρα ἡ ἔνστασις.

[FR431]

Τὸ μὲν οὖν πρῶτον βιβλίον ἄχρι τούτων ὁ στοιχειωτὴς συνεπλήρωσεν, πολλὰ μὲν ἀντιστροφῶν εἶδη παραδούς — καὶ γὰρ ὅλα πολλάκις ἀντέστρεψεν πρὸς ὅλα καὶ ὅλα πρὸς μέρη καὶ μέρη πρὸς μέρη θεωρημάτων — πολλὴν δὲ ποικιλίαν προβλημάτων ἐπινοήσας — καὶ γὰρ εὐθειῶν τομὰς καὶ γωνιῶν, καὶ θέσεις καὶ συστάσεις καὶ παραβολὰς παραδέδωκεν — ἐφαψάμενος δὲ καὶ τοῦ παραδόξου λεγομένου τόπου τῶν μαθημάτων, καὶ τῶν τοπικῶν αὐτῶν θεωρημάτων ἱκανῶς ἡμᾶς ἀναμνήσας, τῶν τε καθολικῶν καὶ τῶν ἐπὶ μέρους τὴν στοιχείωσιν ἐκφύνας, καὶ τῶν ἀδιορίστων καὶ διωρισμένων προβλημάτων τὴν διαφορὰν ἐνδειξάμενος — ἃ δὴ πάντα καὶ ἡμεῖς αὐτῷ συνεπόμενοι διηρηρώσαμεν — ὅλον δὲ τὸ βιβλίον εἰς ἓνα σκοπὸν ἀνενεγκὼν τὴν στοιχείωσιν τῆς περὶ τῶν ἀπλουστάτων εὐθυγράμμων θεωρίας, καὶ τὰς τε συστάσεις αὐτῶν ἐξευρών καὶ τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα αὐτοῖς ἀνασχεψάμενος. ἡμεῖς δέ, εἰ μὲν δυνηθείημεν καὶ τοῖς λοιποῖς τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξελθεῖν, τοῖς θεοῖς ἂν χάριν ὁμολογήσαιμεν, εἰ δὲ ἄλλαι φροντίδες ἡμᾶς περιστάσαιεν, τοὺς φιλοθεάμονας τῆς θεωρίας ταύτης ἀξιοῦμεν κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον καὶ τῶν ἐξῆς ποιήσασθαι βιβλίων τὴν ἐξήγησιν τὸ πραγματεῖωδες πανταχοῦ καὶ εὐδιαίρετον μεταδιώκοντας, ὡς τὰ γε φερόμενα νῦν ὑπομνήματα πολλὴν καὶ παντοδαπὴν ἔχει τὴν σύγχυσιν αἰτίας ἀπόδοσιν οὐδεμίαν συνεισφέροντα οὐδὲ κρίσιν διαλεκτικὴν οὐδὲ θεωρίαν φιλόσοφον.

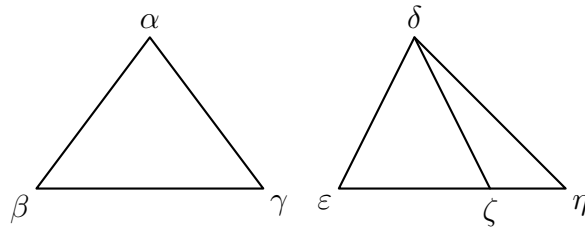
[FR432]

[FR433]

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ $\overline{\chi\delta}$ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰ δεῖ τὸ ἐμοὶ δοκοῦν ἀποφήνασθαι, ἔσφαλται ὁ φιλόσοφος. οὐ γὰρ δυνατόν ἐπ' αὐτῆς τῆς ὑποτετινούσης τὴν ὕστερον ἐκβληθεῖσαν εὐθειᾶν πεσεῖν, ἀλλ' ἐξ ἀνάγκης ἀνωτέρω πεσεῖται καθάπερ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο. ὅπερ δὲ ἐλέγομεν, δεῖξομεν οὕτως. ἔστω δυο $\overline{\Delta}$ ἰσοσκελῆ τὰ $\overline{\alpha\beta\gamma}$ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ τὰς δύο πλευρὰς τὰς $\overline{\beta\alpha}$ $\overline{\alpha\gamma}$ ταῖς δύο ταῖς $\overline{\epsilon\delta}$ $\overline{\delta\zeta}$ ἴσας ἔχοντα, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $\overline{\alpha}$ γωνίας τῆς πρὸς τῷ $\overline{\delta}$ μείζων ἔστω. οὐκοῦν θετέον ἴσην αὐτῇ γωνίαν

[FR434]



τὴν ὑπὸ $\overline{\epsilon\delta\eta}$, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ $\overline{\delta\eta}$ ἔστω ἴση τῇ $\overline{\epsilon\delta}$. ἔαν δὲ βουλώμεθα ἐπιζευῦσαι τὴν $\overline{\epsilon\eta}$, οὐ δυνατόν ταύτην τὴν ἐπιζευγνῦσαν ἐπ' εὐθείας εἶναι τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω αὐτῇ ἐπ' εὐθείας, τουτέστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πιπτέτω ἡ $\overline{\epsilon\eta}$, καθάπερ φαίνεται χρησάμενος ὁ **Πρόκλος** ἐν τῇ δευτέρᾳ αὐτοῦ ὑποθέσει. ἐπεὶ οὖν ἰσοσκελῆ ὑπόκειται τὰ $\overline{\Delta}$, ἴση ἂν εἴη ἡ πρὸς τῷ $\overline{\epsilon}$ γωνία τῇ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$. ἀλλὰ μὴν καὶ τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ γωνίᾳ. τὰ γὰρ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. εἰ δὲ τοῦτο ἀληθές, ἔσται τοῦ $\overline{\delta\zeta}$ $\overline{\eta\delta}$ ἡ ἐκτὸς γωνία τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $\overline{\epsilon\eta}$ εὐθεῖαν τῇ $\overline{\epsilon\zeta}$. εἰ δὲ τοῦτο οὐκ ἐνδέχεται, πολλῶ μᾶλλον οὐδὲ ἐκτὸς πεσεῖται· ἐντὸς ἄρα. οὐκ ἄρα ὀρθῶς εἴρηκεν ὁ φιλόσοφος.

Καὶ ἄλλως δὲ τοῦτο δεῖξομεν ἀδύνατον ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ὑπόκειται ἡ $\overline{\delta\epsilon}$ τῇ $\overline{\delta\zeta}$ καὶ τῇ $\overline{\delta\eta}$, καὶ ἡ $\overline{\delta\zeta}$ ἄρα τῇ $\overline{\delta\eta}$ ἴση ἂν εἴη, ὥστε ἰσοσκελῆ εἶναι τὰ τρία τρίγωνα, ἡγουν τὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ καὶ τὸ $\overline{\delta\zeta\eta}$ καὶ ἔτι τὸ $\overline{\delta\epsilon\eta}$. ἴσαι γὰρ ἐδείχθησαν ἀλλήλαις αἱ τρεῖς πλευραί. οὐκοῦν καὶ αἱ πρὸς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις πεσοῦνται, τουτέστιν ἡ πρὸς τῷ $\overline{\epsilon}$ τῇ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ καὶ ἔτι τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$, καὶ ἡ πρὸς τῷ $\overline{\eta}$ τῇ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\eta}$. αἱ τέσσαρες ἄρα γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν κατὰ μίαν, ὥστε καὶ δύο αὐτῶν τοῖς λοιποῖς δύο ἴσαι ἔσονται. ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς $\overline{\epsilon}$ καὶ $\overline{\eta}$ δύο ταῖς ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ $\overline{\delta\zeta\eta}$ δυσὶν ἴσαι, ὅπερ συναμφοτέραι συναμφοτέραις. αἱ δὲ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ $\overline{\delta\zeta\eta}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἴπερ εὐθεῖα ἡ $\overline{\delta\zeta}$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $\overline{\epsilon\eta}$ ἐφέστηκεν, ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{\delta\epsilon\zeta}$ $\overline{\delta\eta\zeta}$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. εἰ δὲ τοῦτο ἀληθές, ἀνήρηται τὸ $\overline{\iota\zeta}$ θεώρημα. ἀλλὰ μὴν ἐκεῖνο ἀληθές, ἀδύνατον ἄρα τοῦτο. οὐκ ἄρα ἡ ἐκβαλλομένη εὐθεῖα ἡ $\overline{\delta\eta}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπιζευχθήσεται τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$. εἰ δὲ τοῦτο οὐχ οἶόν τε, πολλῶ μᾶλλον, ὥς εἴρηται, οὐδὲ ἐκτός. μείζον γὰρ τούτου ἐπ' ἐκεῖνου τὸ συμβαῖνον ἄτοπον. ῥητέον οὖν ὑπὲρ τοῦ φιλοσόφου ὅτι πρὸς εἰσαγομένους διαλεγόμενος οὐ πάνυ ἐμμελῶς ἐξέθετο, ἢ γυμνασίας χάριν τῶν εὐφυῶς διαχειμένων καὶ προθυμοποιίας, ἢ καὶ ἴσως ἐπελάθετο, καὶ οὐδὲν θαυμαστόν.

[FR435]

Καὶ ἄλλως· ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθησαν αἱ τέσσαρες γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις κατὰ μίαν τουτέστιν ἢ τε ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ καὶ ἢ ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\eta}$ καὶ ἔτι ἢ πρὸς $\tau\tilde{\omega}$ $\overline{\epsilon}$ καὶ ἢ πρὸς $\tau\tilde{\omega}$ $\overline{\eta}$, ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ποιῇ, ὀρθή ἐστὶν ἑκάτερα, ὥστε ὀρθὴ ἂν εἴη ἑκάτερα τῶν ὑπὸ $\overline{\delta\zeta\epsilon}$ $\overline{\delta\zeta\eta}$. εἰ δὲ τοῦτο, καὶ ἢ πρὸς [$\tau\tilde{\omega}$ $\overline{\epsilon}$ καὶ ἢ πρὸς] $\tau\tilde{\omega}$ $\overline{\eta}$ ὀρθαὶ ἂν εἴεν. εἰ δὲ τοῦτο, ἀνήρηται πάλιν τὸ $\overline{\iota\zeta}$ θεώρημα. παντὸς γὰρ φησιν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἐλάσσονές εἰσιν· ἢ δὲ ὑπόθεσις ἡμῶν δείκνυσιν αὐτὰς δύο ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἄτοπον.

[FR436]