INTRODUCTIO
AD QUADRATURAM CURVARUM

By

Isaac Newton

Edited by David R. Wilkins

2002

NOTE ON THE TEXT

The Latin text of Isaac Newton's *Introductio ad Quadraturam Curvarum* reproduced here is taken from the collection of mathematical papers of Isaac Newton, *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumereratione Linearum Tertii Ordinis*, edited by William Jones and published in London in 1711.

The *Introductio ad Quadraturam Curvarum* was written by Isaac Newton as an introduction to a treatise *De Quadratura Curvarum* written some years earlier, but first published with Isaac Newton's *Opticsk: or, a Treatise on the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light* in 1704.

The text taken from William Jones's 1711 edition has been compared with that of the earlier edition included with the first edition of the *Opticks.* The sentence

Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur.

in the 7th paragraph, and the phrase

per Methodos Indivisibilium

in the penultimate paragraph were added in William Jones's 1711 edition.

David R. Wilkins
Dublin, June 2002

INTRODUCTIO

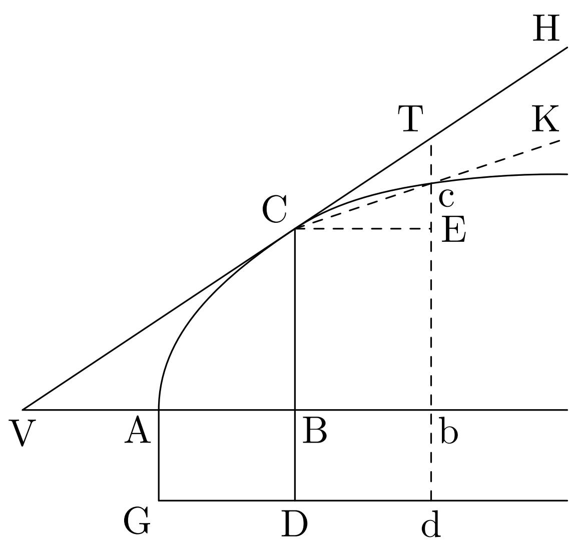
AD

Quadraturam Curvarum.

Quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium genesin docuerunt rectangulorum.

Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones* & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *Annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita; &, ut accurate loquar, sunt in prima ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque quæ sunt ipsis proportionales.



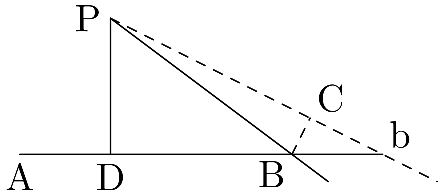
Ut si areæ ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uniformi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxiones erunt inter se ut Ordinatæ describentes BC & BD, & per Ordinatas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia. Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta VTH quæ Curvam tangat in C ipsisque bc & BA productis occurrat in T & V: & Abscissæ AB, Ordinatæ BC, & Lineæ Curvæ ACc augmenta modo genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum augmentorum nascentium ratione prima sunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est per latera trianguli consimilis VBC.

Eodem recidit si sumantur fluxiones in ultima ratione partium evanescentium. Agatur recta Cc & producatur eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evanescens CEc in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter se ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem distant recta CK parvo intervallo a tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes ultimæ linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quam minimi in rebus Mathematicis non sunt contemnendi.

Simili argumento si circulus centro B radio BC descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur, fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimeter Circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim.

Nam quo tempore solidum ABC generatur ducendo circulum illum in longitudinem abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem Curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur.

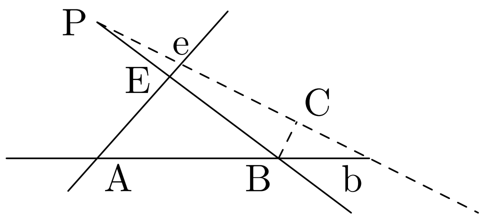
Recta PB circa polum datum P revolvens secet aliam positione datam rectam AB: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & PB.



Progrediatur recta PB de loco suo PB in loco novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo bBC; & ob similitudinem triangulorum bBC, bPD erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB ut augmenta illa evanescant, & evanescentium ratio ultima, id est ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.

Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione datas rectas AB & AE in B & E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta involvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipsi Pb occurens in C, & erit Bb



ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut Ab $\times$ PB ad Ae $\times$ PE. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut AB $\times$ PB ad AE $\times$ PE, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis Curvas positione datas secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangant in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut AB $\times$ PB ad AE $\times$ PE. Id quod etiam eveniet si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Fluat quantitas x *uniformiter & invenienda sit fluxio quantitatis* x^n. Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x+o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}|^n$, id est per methodum serierum infinitarum

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&\text{c.}$$

Et augmenta

$$o \quad \& \quad nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&\text{c.}$$

sunt ad invicem ut

$$1 \quad \& \quad nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&\text{c.}$$

Evanescant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1}.

Similibus argumentis per methodum rationum primarum & ultimarum colligi possunt fluxiones linearum seu rectarum seu curvarum in casibus quibuscunque, ut & fluxiones superficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus Analysin sic instituere, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometriæ Veterum: & volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in figuris quibuscunque seu finitis seu infinite parvis quæ figuris evanescentibus finguntur similes, ut & in figuris quæ per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius est, & solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de qua sequentia olim scripsi.