PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

By

Isaac Newton

BOOK II, LEMMA 2.

(Third Edition, 1726)

Edited by David R. Wilkins

2002

NOTE ON THE TEXT

Lemma II in Book II of Isaac Newton's *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* is reproduced here. The text is taken from the third edition of the *Principia*, edited by Henry Pemberton, and published in 1726.

David R. Wilkins
Dublin, June 2002

LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmetica per multiplicationem, divisionem & extractionem radicum; in geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, sine additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & similes. Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sum nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\dfrac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\dfrac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstrantur vero lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$ seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducator rectangulum prius, & manebit excessus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per cas. 1.) erit $gC + cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q.E.D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q.E.D.*

Cas. 4. Unde cum $\dfrac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\dfrac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\dfrac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\dfrac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\dfrac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\dfrac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\dfrac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\dfrac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\dfrac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\dfrac{na}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\dfrac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\dfrac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q.E.D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque A^mB^n momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sivi affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q.E.D.*

Corol. 1 Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2 Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In epsitola quadam ad D. *J. Collinium* nostratem 10 Decem. 1672 data, cum descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicata; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel qomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum Huddenii methodus de maximis & minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente.