PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

By

Isaac Newton

SECTIO 1

(Third Edition, 1726)

Edited by David R. Wilkins

2002

NOTE ON THE TEXT

Section I in Book I of Isaac Newton's *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* is reproduced here. The text is taken from the third edition of the *Principia*, edited by Henry Pemberton, and published in 1726.

David R. Wilkins
Dublin, June 2002

DE

MOTU CORPORUM
LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

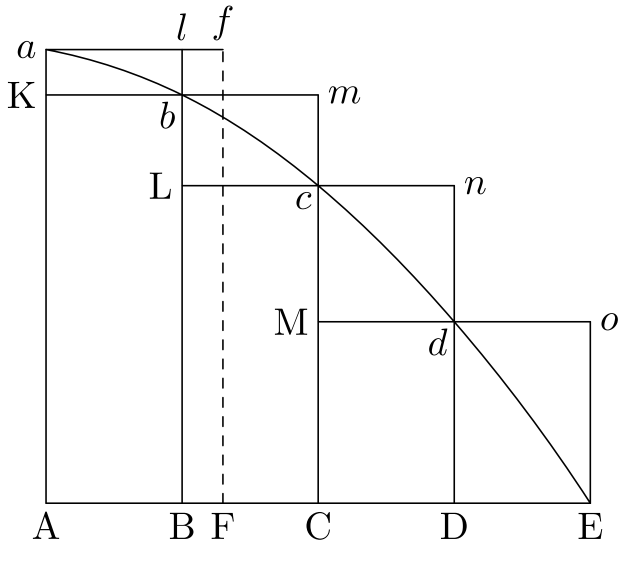
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimo inæquales, & sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figura quavis A a c E*, rectis* A a, A E *& curva* a c E *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, *&c. sub basibus* A B, B C, C D, *&c. æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, *&c. figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, *&c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* A K b L c M d D, *circumscripta* A a l b m c n d o E, *& curvilinea* A a b c d E, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa paralleogrammorum $K\,l$, $L\,m$, $M\,n$, $D\,o$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi $K\,b$ & altitudinum summa $A\,a$, id est, rectangulum $A\,B\,l\,a$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus $A\,B$ in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma I) figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines A B, B C, C D, *&c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim $A\,F$ æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $F\,A\,a\,f$. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ; at latitudine sua $A\,F$ in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

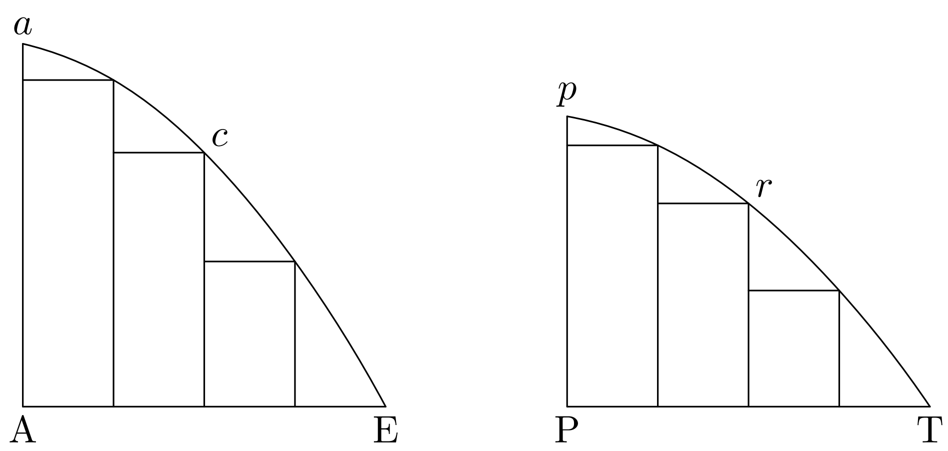
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros $a\,c\,E$,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A a c E, P p r T, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* A a c E, P p r T, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) sit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figura priore (per lemma III) ad summam priorem, & figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q.E.D.*

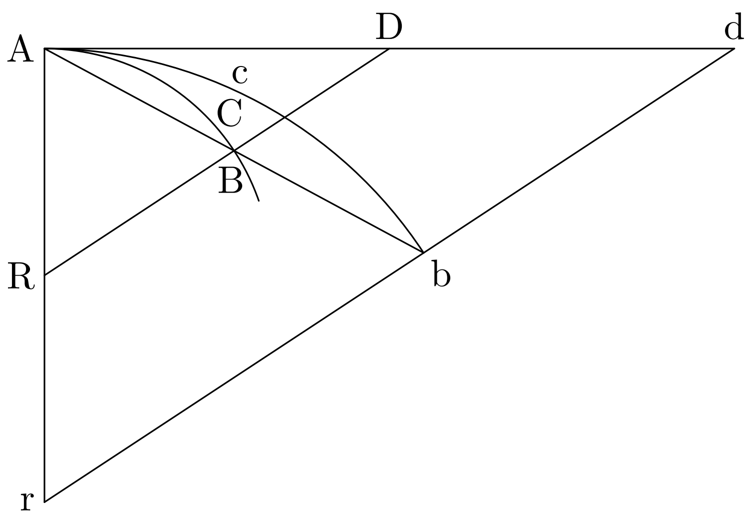
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus A C B *subtendatur chorda* A B*, & in puncto aliquo* A*, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* A D*; dein puncta* A*,* B *ad invicem accedant & coëant; dico quod augulus* B A D*, sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*

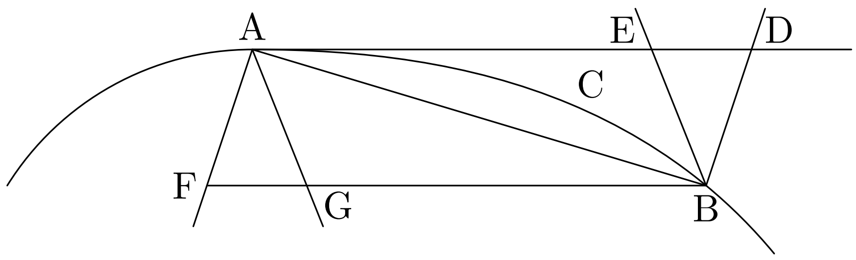


Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua b ac d produci, & secanti BD parallela agatur bd. Sitque arcus Acb semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus dAb, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ Ab, Ad, & arcus intermedius Acb coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q.E.D.*



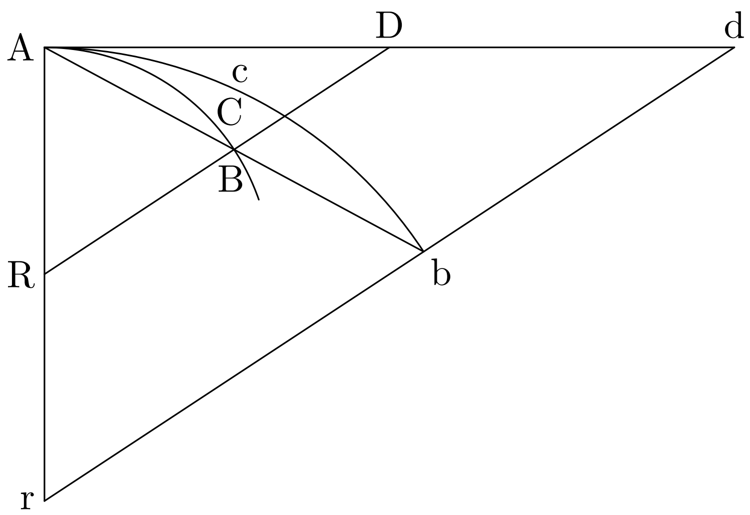
Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc BF ultimo ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo $AFBD$ rationem semper habet æqualitatis ad AD.

Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, secantes tangentem AD & ipsius parallelam BF; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcus AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

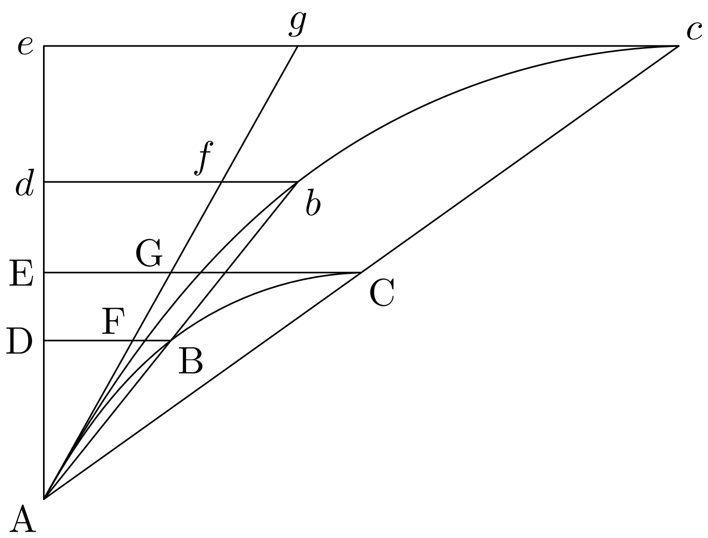


Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB, AD, AR ad puncta longinqua b, d & r produci, ipsique RD parallela agi rbd, & arcui ACD similis semper sit arcus Acb. Et coeuntibus punctis A, B, angulus bAd evanescet, & propterea triangula tria semper finita rAb, $rAcb$, rAd coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB, $RACB$, RAD fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q.E.D.*

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A*, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE*, curvæ occurrentes in* B, C*, dein puncta* B, C *simul accedant ad punctam* A*: dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*



Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua d & e, ut sint Ad, Ae ipsis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ db, ec ordinatis DB, EC parallelæ quæ occurrant ipsis AB, AC productis in b & c. Duci intelligatur, tum curva Abc ipsi ABC similis, tum recta Ag, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatim applicatas DB, EC, db, ec in F, G, f, g. Tum manente longitudine Ae coeant puncta B, C cum puncto A; & angulo cAg evanescente, coincident areæ curvilineæ Abd, Ace cum rectilineis Afd, Age; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum Ad, Ae: Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE. Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD, AE. *Q.E.D.*

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicata ratione temporum AD, AE. *Q.E.D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum a figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directe & quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe & vires inverse.

Scholium.

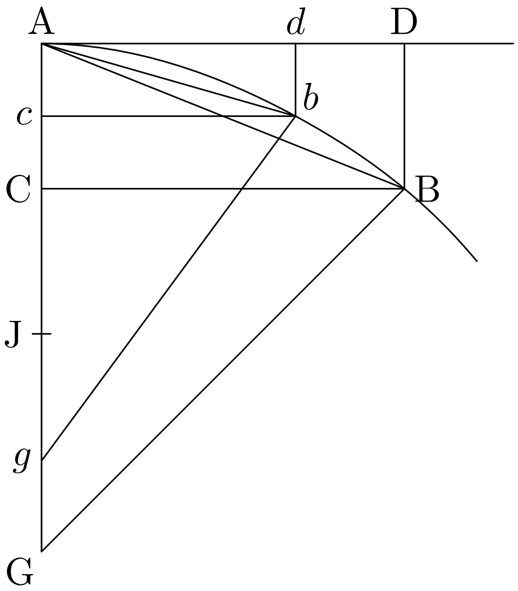
Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe vel inverse: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe & C directe & D inverse: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $\mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \frac{1}{\mathrm{D}}$ hoc est, quod A & $\frac{\mathrm{B\,C}}{\mathrm{D}}$ sunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcus AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est quod distantia G, J minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$ & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$; ideoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, ideoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per lemma I, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* eadem cum ratione ultima BD ad bd. *Q.E.D.*

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, ideoque eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q.E.D.*



Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta $B\,D$ ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli D, d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. I, & propterea lineæ $B\,D$, $b\,d$ sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q.E.D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes $A\,D$, $A\,d$, arcus $A\,B$, $A\,b$, & eorum sinus $B\,C$, $b\,c$ fiant ultimo chordis $A\,B$, $A\,b$ æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ $B\,D$, $b\,d$.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ $B\,D$, $b\,d$.

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea $A\,D\,B$, $A\,d\,b$ sunt ultimo in triplicata ratione laterum $A\,D$, $A\,d$, inque sesquiplicata laterum $D\,B$, $d\,b$; utpote in composita ratione laterum $A\,D$ & $D\,B$, $A\,d$ & $d\,b$ existentia. Sic & triangula $A\,B\,c$, $A\,b\,c$ sunt ultimo in triplicata ratione laterum $B\,C$, $b\,c$. Rationem vero sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicata componitur.

Corol. 5. Et quoniam $D\,B$, $d\,b$ sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum $A\,D$, $A\,d$: erunt areæ ultimæ curvilineæ $A\,D\,B$, $A\,d\,b$ (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $A\,D\,B$, $A\,d\,b$, & segmenta $A\,B$, $A\,b$ partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segementa erunt in triplicata ratione tum tangentium $A\,D$, $A\,d$; tum chordarum & arcuum $A\,B$, $A\,b$.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum $A\,J$ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest $D\,B$ ut $A\,D^3$: quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem $A\,D$ & curvam $A\,B$ duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contatctus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat DB successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Praemisi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id iest, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intellegendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus, igitur siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.