Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen

Von G. Cantor in Halle a. S.

[Math. Annalen **5**, 123–132 (1872).]

Im folgenden werde ich eine gewisse Ausdehnung des Satzes, dass die trigonometrischen Reihendarstellungen eindeutig sind, mittheilen.

Dass zwei trigonometrische Reihen:

$$\tfrac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \text{ und } \tfrac{1}{2}b_0' + \sum(a_n' \sin nx + b_n' \cos nx),$$

welche für jeden Werth von x convergiren und dieselbe Summe haben, in ihren Coefficienten übereinstimmen, habe ich im „Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 72. S. 139“ nachzuweisen versucht; in einer auf diese Arbeit sich beziehenden Notiz habe ich a. a. O. ferner gezeigt, dass dieser Satz auch erhalten bleibt, wenn man für eine endliche Anzahl von Werthen des x entweder die Convergenz oder die Uebereinstimmung der Reihesummen aufgiebt.

Die *hier* beabsichtigte Ausdehnung besteht darin, dass für eine *unendliche* Anzahl von Werthen des x im Intervalle $(0 \ldots (2\pi))$ auf die Convergenz oder auf die Uebereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne dass die Gültigkeit des Satzes aufhört.

Zu dem Ende bin ich aber genöthigt, wenn auch zum grössten Theile nur andeutungsweise, Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind; dabei werde ich zu gewissen Definitionen hingeleitet, welche hier nur zum Behufe einer möglichst gedrängten Darstellung des beabsichtigten Satzes, dessen Beweis im § 3. gegeben wird, aufgestellt werden.

§ 1.

Die rationalen Zahlen bilden die Grundlage für die Feststellung des weiteren Begriffes einer Zahlengrösse; ich will sie das Gebiet A nennen (mit Einschluss der Null).

Wenn ich von einer Zahlengrösse im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, dass eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationen Zahlen:

$$(1)\qquad a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, dass die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsenden n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit anderen Worten, dass bei beliebig angennommenem (positiven, rationalen) ε eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so dass $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, wenn $n \geq n_1$ und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „*Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b.*“

Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn als den eines Ausdruckes für jene Beschaffenheit der Reihe, und aus dem Umstande, dass wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen b verbinden, folgt, dass bei verschiedenen derartigen Reihen auch verschiedene Zeichen $b, b', b'', \dots$ zu bilden sind.

Ist eine zweite Reihe:

$$(1')\qquad a'_1, a'_2, \dots a'_n, \dots$$

gegeben, welche eine bestimmte Grenze b' hat, so findet man, dass die beiden Reihen (1) and (1′) eine von den folgenden 3 Beziehungen stets haben, die sich gegenseitig ausschliessen: Entweder 1. wird $a_n - a'_n$ unendlich klein mit wachsendem n oder 2. $a_n - a'_n$ bleibt von einem gewissen n an stets grösser, als eine positive (rationale) Grösse ε oder 3. $a_n - a'_n$ bleibt von einem gewissen n an stets kleiner, als eine negative (rationale) Grösse $-\varepsilon$.

Wenn die erste Beziehung stattfindet, setze ich:

$$b = b',$$

bei der zweiten $b > b'$, bei der dritten $b < b'$.

Ebenso findet man, dass eine Reihe (1), welche eine Grenze b hat, zu einer rationalen Zahl a nur eine von den folgenden 3 beziehungen hat. Entweder:

1. wird $a_n - a$ unendlich klein mit wachsendem n, oder 2. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen n an immer grösser, als eine positive (rationale) Grösse ε oder 3. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen n an immer kleiner, als eine negative (rationale) Grösse $-\varepsilon$.

Um das Bestehen dieser Beziehungen auszudrücken, setzen wir resp.:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergiebt sich als *Folge*, dass, wenn b die Grenze der Reihe (1) ist, alsdann $b - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, womit *nebenbei* die Bezeichnung „Grenze der Reihe (1)“ für b eine gewisse Rechtfertigung findet.

Die Gesamtheit der Zahlengrössen b möge durch B bezeichnet werden.

Mittels obiger Festsetzungen lassen sich die Elementaroperationen, welche mit rationalen Zahlen vorgenommen werden, ausdehnen auf die beiden Gebiete A und B zusammengenommen.

Sind nämlich b, b', b'' drei Zahlengrössen aus B, so dienen die Formeln:

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

als Ausdruck dafür, dass zwischen den den Zahlen b, b', b'' entsprechenden Reihen:

$$\begin{gathered} a_1, a_2, \dots \\ a'_1, a'_2, \dots \\ a''_1, a''_2, \dots \end{gathered}$$

resp. die Beziehungen bestehen:

$$\lim(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0, \quad \lim(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$
$$\lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0,$$

wo ich auf die Bedeutung des Lim-Zeichens nach dem Vorhergehenden nicht näher einzugehen brauche. Aehnliche Definitionen werden für die Fälle aufgestellt, dass von den drei Zahlen eine oder zwei dem Gebiete A angehören.

Allgemein wird sich daraus jede mittelst einer endliche Anzahl von Elementaroperationen gebildete Gleichung:

$$F(b, b', \dots b^{(\varrho)}) = 0$$

als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung ergeben, welche unter den Reihen stattfindet, durch welche die Zahlengrössen $b, b', b'', \dots b^{(\varrho)}$ gegeben sind[1].

Das Gebiet B ergab sich aus dem Gebiete A; es erzeugt nun in analoger Weise in Gemeinschaft mit dem Gebiete A ein neues Gebiet C.

Liegt nämlich eine unendliche Reihe:

$$b_1, b_2, \dots b_n, \dots \tag{2}$$

von Zahlengrössen aus den Gebieten A und B vor, welche nicht sämmtlich dem Gebiete A angehören, und hat diese Reihe die Beschaffenheit, dass $b_{n+m} - b_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch m sei, eine Beschaffenheit, die nach den vorangegangenen Definitionen begrifflich etwas ganz Bestimmtes ist, so sage ich von dieser Reihe aus, dass sie eine bestimmte Grenze c hat.

[1] Wenn z. B. eine Gleichung μ^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten: $f(x) = 0$, eine reelle Wurzel ω besitzt, so heisst dies im Allgemeinen *nichts anderes*, als dass eine Reihe:

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

von der Beschaffenheit der Reihe (1) vorliegt, für deren Grenze das Zeichen ω gewählt ist, welche ausserdem die Eigenschaft hat:

$$\lim f(a_n) = 0.$$

Die Zahlengrössen c constituieren das Gebiet C.

Die Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins, sowie der Elementaroperationen sowohl unter den Grössen c, wie auch zwischen ihnen und den Grössen der Gebiete B und A werden dem Früheren analog gegeben.

Während sich nun die Gebiete B und A so zueinander verhalten, dass zwar jedes a einem b, nicht aber umgekehrt jedes b einem a gleichgesetzt werden können, stellt es sich hier heraus, dass sowohl jedes b einem c, wie auch umgekehrt jedes c einem b gleichgesetzt werden können.

Obgleich hierdurch die Gebiete B und C sich gewissermassen gegenseitig decken, ist es bei der hier dargelegten Theorie (in welcher die Zahlengrösse, zunächst an sich im Allgemeinen gegenstandlos, nur als Bestandtheil von Sätzen erscheint, welchen Gegenständlichkeit zukommt, des Satzes z. B., dass die entsprechende Reihe die Zahlengrösse zur Grenze hat) wesentlich, an dem begrifflichen Unterschiede der beiden Gebiete B und C festzuhalten, indem ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengrössen b, b' aus B ihre Identität nicht einschliesst, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziehen.

Aus dem Gebiete C und den vorhergehenden geht analog ein Gebiet D, aus diesen ein E hervor u. s. f.; durch λ solcher Uebergänge (wenn ich den Uebergang von A zu B als den ersten ansehe) gelangt man zu einem gebiete L von Zahlengrössen. Dasselbe verhält sich, wenn man die Kette von Definitionen für Gleich-, Grösser- und Kleinersein und für die Elementaroperationen von Gebiet zu Gebiet vollzogen denkt, zu den vorhergehenden, mit Ausschluss von A, so, dass eine Zahlengrösse l stets gleichgesetzt werden kann einer Zahlengrösse $k, i, \dots c, b$ und umgekehrt.

Auf die Form solcher Gleichsetzungen lassen sich die Resultate der Analysis (abgesehen von wenigen bekannten Fällen) zurückführen, obgleich (was hier nur mit Rücksicht auf jene Ausnahmen berührt sein mag) der Zahlenbegriff, soweit er hier entwickelt ist, den Keim zu einer in sich nothwendigen und absolut unendlichen Erweiterung in sich trägt.

Es scheint sachgemäss, wenn eine Zahlengrösse im Gebiete L gegeben ist, sich des Ausdruckes zu bedienen: *sie ist als Zahlengrösse, Werth oder Grenze* λ^{ter} *Art gegeben*, woraus ersichtlich ist, dass ich mich der Worte *Zahlengrösse*, *Werth* und *Grenze* im Allgemeinen in gleicher Bedeutung bediene.

Eine mittelst einer endlichen Anzahl von Elementaroperationen aus Zahlen $l, l', \dots l^{(\varrho)}$ gebildete Gleichung $F(l, l', \dots l^{(\varrho)}) = 0$ erscheint bei der hier angedeuteten Theorie genau genommen als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung zwischen $\rho + 1$, *im Allgemeinen* λ*fach unendlichen Reihen rationaler Zahlen*; es sind dies die Reihen, welche aus den einfach unendlichen, auf die sich die Grössen $l, l', \dots l^{(\varrho)}$ zunächst beziehen, hervorgehen, indem man in ihnen die Elemente durch ihre entsprechenden Reihen ersetzt, die entstehenden, im Allgemeinen zweifach unendlichen Reihen ebenso behandelt und diesen Prozess so lange fortführt, bis man nur rationale Zahlen vor sich sieht.

Es sei mir vorbehalten, auf diese Verhältnisse bei einer andern Gelegenheit ausführlicher zurückzukommen. *Wie* die in diesem § auftretenden Festsetzungen und Operationen mit Nutzen der Infinitesimalanalysis dienen können, darauf einzugehen ist hier gleichfalls nicht der Ort. Auch das folgende, wo der Zusammenhang der Zahlengrössen mit der Geometrie der geraden Linie dargelegt wird, beschränkt sich fast nur auf die nothwendigen Sätze, aus welchen, wenn ich nicht irre, das Uebrige mittels rein logischer Beweisführung abgeleitet werden kann. Zum Vergleiche mit § 1. und § 2. sei das 10. Buch der „Elemente des Euklides“ erwähnt, welches für den darin behandelten Gegenstand massgebend bleibt.

§ 2.

Die Punkte einer geraden Linie werden dadurch begrifflich bestimmt, dass man unter Zugrundelegung einer Masseinheit ihre Entfernungen, Abscissen, von einem festen Punkte o der geraden Linie mit dem $+$ oder $-$ Zeichen angiebt, jenachdem der betreffende Punkt in dem (vorher fixierten) positiven oder negativen Theile der Linie von o aus liegt.

Hat diese Entfernung zur Masseinheit ein rationales Verhältniss, so wird sie durch eine Zahlengrösse des Gebietes A ausgedrückt; im andern Falle ist es, wenn der Punkt etwa durch eine Construktion *bekannt* ist, immer möglich, eine Reihe:

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots \tag{1}$$

anzugeben, welche die in § 1. ausgedrückte Beschaffenheit und zur fraglichen Entfernung eine solche Beziehung hat, dass die Punkte der Geraden, denen die Entfernungen $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ zukommen, dem zu bestimmenden Punkte mit wachsendem n unendlich nahe rücken.

Dies drücken wir so aus, dass wir sagen: *Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte o ist gleich b*, wo b die der Reihe (1) entsprechende Zahlengrösse ist.

Hierauf wird nachgewiesen, dass das Grösser-, Kleiner- und Gleichsein von bekannten Entfernungen in Uebereinstimmung ist mit dem in § 1. definierten Grösser-, Kleiner- und Gleichsein der entsprechenden Zahlengrössen, welche die Entfernungen angeben.

Dass nun ebsenso auch die Zahlengrössen der Gebiete $C, D, \dots$ befähigt sind, bekannte Entfernungen zu bestimmen, ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1. definierten Zahlengrössen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, dass auch umgekehrt zu jeder Zahlengrösse ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Coordinate gleich ist jener Zahlengrösse, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird.[2]

[2] Es gehört also zu jeder Zahlengrösse ein bestimmter Punkt, einem Punkte kommen aber unzählig viele gleiche Zahlengrössen als Coordinaten in obigen Sinne zu; denn es folgt, wie schon oben angedeutet wurde, aus rein logischen Gründen, dass gleichen Zahlengrössen *nicht* verschiedene Punkte entsprechen können und dass ungleichen Zahlengrössen als Coordinaten *nicht* ein und derselbe Punkt zukommen kann.

Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.

Durch ihn wird denn auch nachträglich für die Zahlengrössen eine gewisse Gegenständlichkeit gewonnen, von welcher sie jedoch ganz unabhängig sind.

Dem Obigen gemäss betrachte ich einen Punkt der Geraden als bestimmt, wenn seine Entfernung von o mit dem gehörigen Zeichen versehen, als Zahlengrösse, Werth oder Grenze λ^{ter} *Art gegeben ist.*

Wir wollen nun, unserm eigentlichen Gegenstande näher tretend, Beziehungen betrachten, welche auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind.

Nach dem Vorhergehenden können die Zahlengrössen den Punkten einer Geraden zugeordnet gedacht werden. Der Anschaulichkeit wegen, (nicht dass es wesentlich zur Sache gehörte) bedienen wir uns dieser Vorstellung im Folgenden und haben, wenn wir von Punkten sprechen, stets Werthe im Auge, durch welche sie gegeben sind.

Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrössen nenne ich der Kürze halber eine *Werthmenge* und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine *Punktmenge*. Was im folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, lässt sich dem gesagten gemäss unmittelbar auf Werthmengen übertragen.

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im Allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im Allgemeinen eine dritte etc. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definieren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt einer Punktmenge* vorauszuschicken.

Unter einem Grenzpunkt einer Punktmenge P verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, dass in jeder Umgebung desselben *unendlich* viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, dass er ausserdem selbst zu der Menge gehört. Unter Umgebung eines Punktes sie aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, dass eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende Punktmenge stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.

Es is nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P, entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihre Grenzpunkte begrifflich mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und die *erste abgeleitete Punktmenge* von P nennen will.

Besteht die Punktmenge P' nicht aus einer bloss endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge P'', ich nenne sie *die zweite abgeleitete von* P. Man findet durch ν solcher Uebergänge den Begriff der ν^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von P.

Besteht beispielsweise die Menge P aus allen Punkten der Geraden, denen rationale Abscissen zwischen 0 und 1, die Grenzen ein- oder ausgeschlossen, zukommen, so besteht die abgeleitete Menge P' aus *allen* Punkten des Intervalles $(0 \dots 1)$, die Grenzen 0 und 1 mit eingeschlossen. Die folgenden Mengen $P'', P''', \dots$ stimmen hier mit P' überein. Oder, besteht die Menge P aus den Punkten, welchen die Abscissen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots$ zukommen, so besteht die Menge P' aus dem einen Punkte 0 und hat selbst keine Abgeleitete.

Es kann eintreffen, und dieser Fall ist es, welcher uns hier ausschliesslich interessiert, dass nach ν Uebergängen die Menge $P^{(\nu)}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, mithin selbst keine abgeleitete Menge hat; in diesem Falle wollen wir die ursprüngliche Punktmenge P *von der* ν^{ten} *Art* nennen, woraus folgt, dass alsdann $P', P'', \dots$ von den $\overline{\nu-1}^{\text{ten}}, \overline{\nu-2}^{\text{ten}}, \dots$ Art sind.

Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbaren Punktmengen betrachtet, von welchem Genus die sogenannten Punktmengen ν^{ter} Art eine besondere Art ausmachen.

Ein Beispiel einer Punktmenge ν^{ter} Art beitet schon ein einzelner Punkt dar, wenn seine Abscisse als Zahlengrösse ν^{ter} Art, welche gewissen, leicht festzustellenden Bedingungen genügt, gegeben ist. Löst man nämlich alsdann diese Zahlengrösse in die Glieder $(\overline{\nu-1}^{\text{ter}}$ Art) der ihr entsprechenden Reihe auf, diese Glieder wieder in die sie constituierenden Glieder $(\overline{\nu-2}^{\text{ter}}$ Art) u. s. f. so erhält man zuletzt eine unendliche Anzahl rationaler Zahlen; denkt man sich die diesen Zahlen entspechende Punktmenge, so ist dieselbe von der ν^{ten} Art.[3]

Nach diesen Vorbereitungen sind wie nun im Stande, den beabsichtigen Satz im folgenden § kurz anzugeben und zu beweisen.

§ 3.

Theorem. *Wenn eine Gleichung besteht von der Form:*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots, \tag{I}$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0$*;* $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$*, für alle Werthe von* x *mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle* $(0 \dots (2\pi))$ *gegebenen Punktmenge* P *der* ν^{ten} *Art entsprechen, wobei* ν *eine beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, so ist*:

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Beweis: In diesem Beweise hat man, wie durch den Fortgang ersichtlich wird, wenn von P die Rede ist, nicht bloss die gegebene Menge ν^{ter} Art der Ausnahmepunkte im Intervalle $(0 \dots (2\pi))$, sondern diejenige Menge im Auge, welche auf der ganzen, unendlichen Linie aus der periodischen Wiederholung jener hervorgeht.

[3] Dass dies nicht stets der Fall ist, möchte vielleicht noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden verdienen. In Allgemeinen kann die auf jene Weise aus einer Zahlengrösse ν^{ter} Art hervorgehenende Punktmenge sowohl von niederer wie auch von höherer als der ν^{ten} Art oder selbst gar nicht von bestimmter Art sein.

Betrachten wir nun die Function:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots$$

Aus der Natur einer Punktmenge ν^{ter} Art ergiebt sich leicht, dass ein Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ vorhanden sein muss, in welchem kein Punkt der Menge P liegt; für alle Werthe von x in diesem Intervalle wird also wegen der vorausgesetzten Convergenz unserer Reihe (I) sein:

$$\lim(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

mithin ist einem bekannten Satze gemäss (S. diese Annalen Bd. IV. Seite 139):

$$\lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 0.$$

Die Function $F(x)$ hat also (siehe Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, § 8.) folgende Eigenschaften:

1) sie ist stetig in der Nähe eines jeden Werthes von x.

2) es ist $\lim \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, wenn $\lim \alpha = 0$, für alle Werthe von x, mit Ausnahme der den Punkten der Menge P entsprechenden Werthe.

3) es ist $\lim \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha} = 0$, wenn $\lim \alpha = 0$, für jeden Werth von x, ohne Ausnahme.

Ich will nun zeigen, dass $F(x) = cx + c'$ ist.

Dazu betrachte ich zuerst irgend ein Intervall $(p \ldots q)$, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegt: diese Punkte seien $x_0, x_1, \ldots x_r$, ihrer Aufeinanderfolge nach geschrieben.

Ich behaupte, dass $F(x)$ im Intervalle $(p \ldots q)$ linear ist; denn $F(x)$ ist wegen der Eigenschaften 1) und 2) eine lineare Function in jedem der Intervalle, in welche $(p \ldots q)$ durch die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_r$ getheilt wird; da nämlich in keines dieser Intervalle Ausnahmepunkte fallen, so gelten hier die im Aufsatze (siehe Journal f. r. u. a. Math. Bd. 72, S. 139) angewandten Schlüsse; es bleibt daher nur übrig, die Identität dieser linearen Functionen nachzuweisen.

Ich will dies für je zwei benachbarte thun und wähle dazu die in den beiden Intervallen $(x_0 \ldots x_1)$ und $(x_1 \ldots x_2)$.

In $(x_0 \ldots x_1)$ sie $F(x) = kx + l$.

In $(x_1 \ldots x_2)$ sie $F(x) = k'x + l'$.

Wegen 1) ist $F(x_1) = kx_1 + l$; ferner ist für hinreichend kleine Werthe von α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l'; \quad F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

Wegen 3) hat man also:

$$\lim \frac{(k' - k)x_1 + l' - l + \alpha(k' - k)}{\alpha} = 0, \text{ für } \lim \alpha = 0,$$

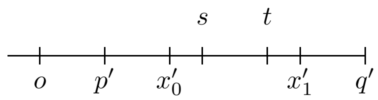
was nicht anders möglich ist, als wenn:

$$k = k', \quad l = l'.$$

Wir wollen der Uebersicht wegen das Resultat besonders hervorheben:

(A) *„Ist $(p \dots q)$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear.“*

Weiter betrachte ich irgend ein Intervall $(p' \dots q')$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten $x'_0, x'_1, \dots x'_r$ der ersten abgeleiteten Menge P' enthält;— und behaupte zunächst, dass in jedem der Theilintervalle, in welche $(p \dots q)$ durch die Punkte $x'_0, x'_1, \dots$ zerfällt, die Function $F(x)$ linear ist, z. B. in $(x'_0 \dots x'_1)$.



Denn jenes dieser Theilintervalle enthält zwar in Allgemeinen unendlich viele Punkte aus P, so dass das Resultat (A) nicht unmittelbar auf dasselbe Anwendung findet; dagegen enthält jedes Intervall $(s \dots t)$, welches ganz innerhalb $(x'_0 \dots x'_1)$ fällt, nur eine endliche Anzahl von Punkten aus P (weil sonst zwischen x'_0 und x'_1 noch andere Punkte der Menge P' fallen würden), und die Function ist also in $(s \dots t)$ wegen (A) linear. Indem man aber die Endpunkte s und t den punkten x'_0 und x'_1 beliebig nahe bringen kann, wird ohne weiteres geschlossen, dass die stetige Function $F(x)$ auch linear ist in $(x'_0 \dots x'_1)$.

Nachdem dies für jedes der Theilintervalle von $(p' \dots q')$ nachgewiesen ist, erhält man durch dieselben Schlüsse wie diejenigen, welche das Resultat (A) erzielten, Folgendes:

(A$'$) *„Ist $(p' \dots q')$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P' liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear.“*

Der Beweis geht in diesem Sinne fort. *Steht nämlich einmal fest, dass $F(x)$ eine lineare Function ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten aus der k^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(k)}$ von P enthält, so folgert man ebenso wie bei dem Uebergänge von* (A) *zu* (A$'$) *weiter, dass $F(x)$ auch eine lineare Function ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der $(k+1)^{\text{ten}}$ abgeleiteten Punktmenge $P^{(k+1)}$ in sich fasst.*

Wir schliessen so durch eine endliche Anzahl von Uebergängen, dass $F(x)$ in jedem Intervalle, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge $P^{(\nu)}$ enthält, linear ist. Nun ist aber die Menge P von der ν^{ten} Art, wie vorausgesetzt wurde, es enthält mithin überhaupt ein beliebig in der Geraden angenommenes Intervall $(a \dots b)$ nur eine endliche Anzahl Punkte aus $P^{(\nu)}$. Es ist also $F(x)$ linear in jedem willkürlich angennommenen Intervalle $(a \dots b)$, und daraus folgt, wie leicht zu sehen, für $F(x)$ die Form: $F(x) = cx + c'$ für alle Werthe des x. Nachdem dies dargethan ist, geht der Beweis in der nämlichen Weise weiter, wie in der schon zweimal citierten Abhandlung von dem Momente an, wo darin ebenfalls für $F(x)$ die lineare Form nachgewiesen ist.

Dem hier bewiesenen Satze kann auch die folgende Fassung gegeben werden:

„Eine unstetige Function $f(x)$, welche für alle Werthe von x, welche den Punkten einer im Intervalle $(0 \dots (2\pi))$ gegeben Punktmenge P der ν^{ten} Art entsprechen, von Null verschieden, oder unbestimmt, für alle übrigen Werthe des x aber gleich Null ist, kann durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden.“

Halle, den 8. Nov. 1871.